MÁXIMO

11.º ano

Matemática A

Maria Augusta Ferreira Neves
Ana Machado
Bruno Roque
Pedro Rocha Almeida
António Pinto Silva
Luís Guerreiro

Geometria analítica

Porto Editora

Pág. 143

Tarefa de revisão

1. $A_{\text{semicircunferência}} = \frac{1}{2}\pi r^2$

$A_{\text{metade da semicircunferência}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\pi r^2$

$A_{\text{cinzenta}} = \frac{1}{2}\pi r^2 + \left(r \times 2r - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cancel{2}}\pi r^2 \times \cancel{2} \right) =$

$= \frac{1}{2}\pi r^2 + 2r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 = 2r^2$

$A_{\text{branca}} = \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{1}{2}\pi r^2 + \left(r \times 2r - \frac{1}{2}\pi r^2 \right) =$

$= \frac{1}{2}\pi r^2 + 2r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 = 2r^2$

$\frac{A_{\text{cinzenta}}}{A_{\text{branca}}} = \frac{2r^2}{2r^2} = 1$

2. $O(0, 0)$, $B(10, 10)$

$\overline{OB} = \sqrt{(10-0)^2 + (10-0)^2} = \sqrt{100+100} =$

$= \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ u. c.

3. $C(0, 10)$, $P\left(3, \sqrt{37}\right)$

$\overline{CP} = \sqrt{(3-0)^2 + \left(\sqrt{37} - 10\right)^2} =$

$= \sqrt{9 + 37 - 20\sqrt{37} + 100}$

$= \sqrt{146 - 20\sqrt{37}} \approx 4{,}93 < 5$

Como a distância do ponto P ao ponto C é inferior ao raio da circunferência, o ponto P terá que pertencer à parte branca.

4. $D(5, 5)$; $r = 5$

Equação da circunferência de centro em D e tangente aos lados do quadrado [$ABCO$]:

$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$

5. D está à mesma distância dos pontos médios de $[OC]$ e $[BC]$. Logo, pertence à mediatriz do segmento de reta de extremos nesses mesmos pontos.

6.1. $\overrightarrow{OD}$ e $\overrightarrow{OB}$, por exemplo.

6.2. $\overrightarrow{OD} = (5, 5)$

$\overrightarrow{OB} = (10, 10)$

$-\overrightarrow{OB} = (-10, -10)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, 10) - (10, 0) = (0-10, 10-0) =$

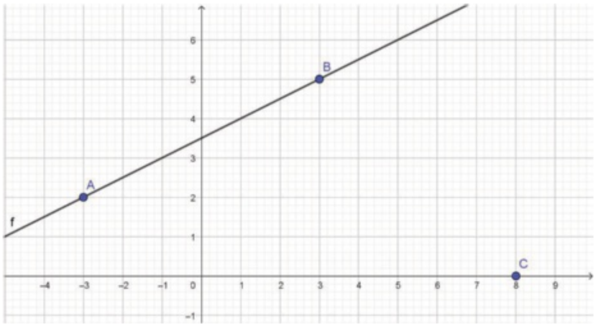
$= (-10, 10)$

1. Declive e inclinação de uma reta

Pág. 144

Tarefa 1

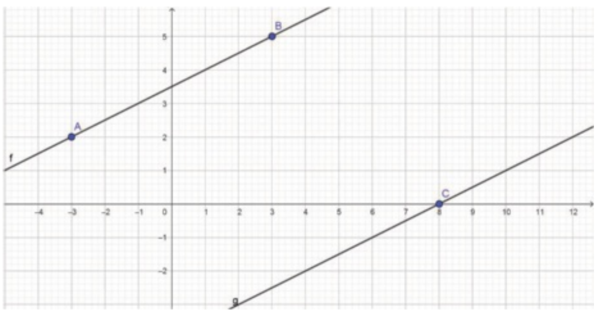
1.



2. $m = \frac{1}{2}$

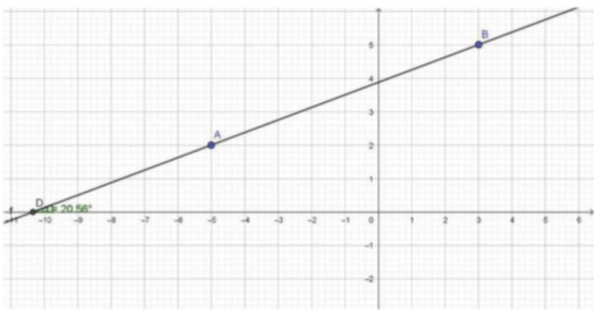
3. $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 5) - (-3, 2) = (3+3, 5-2) = (6, 3)$

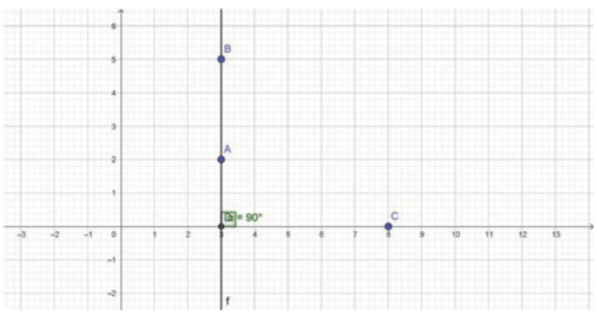
4.

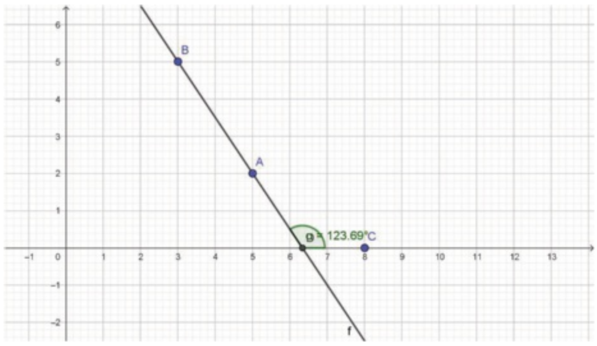


5. Os declives das duas retas são iguais e os vetores diretores são colineares.

6.







Para abcissas pertencentes ao intervalo $[-5, 3[$, o ângulo é agudo. Para abcissas pertencentes ao intervalo $]3, 5]$, o ângulo é obtuso e para abcissa igual a 3, o ângulo é reto.

Pág. 145

1.1. $(-2, 0)$ e $(0, 2)$ são pontos da reta *r*.

Seja $P(-2, 0)$ e $Q(0, 2)$.

$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (0, -2) - (-2, 0) = (0 + 2, 2 - 0) =$

$= (2, 2)$

Por exemplo, $-\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$ é um vetor colinear com $\overrightarrow{PQ}$.

Logo, é também um vetor diretor da reta *r*.

$-\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{2}(2, 2) = (-1, -1)$.

$(2, 2)$ e $(-1, -1)$ são dois vetores diretores da reta *r*.

1.2. Equação vetorial da reta *r* :

$(x, y) = (2, 0) + k(2, 2), k \in \mathbb{R}$

Equação reduzida da reta *r* :

$m = \frac{2}{2} = 1 \wedge b = 2$

$r : y = x + 2$

1.3. Seja *s* a reta paralela a *r* e que passa por $B(1, 2)$

$s : y = x + b \wedge B \in s$

$2 = 1 + b \Leftrightarrow 1 = b$

$s : y = x + 1$

$A(2k, k - 1) \in s$

$k - 1 = 2k + 1 \Leftrightarrow -k = 2 \Leftrightarrow k = -2$

Pág. 146

2. Como a reta *r* é vertical, a sua inclinação é $\frac{\pi}{2}$ rad.

Como a reta *s* é horizontal, a sua inclinação é 0 rad.
Como a reta *t* é a bissetriz dos quadrantes pares, a sua inclinação é $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ rad.

Pág. 147

3.1. *GA* é uma reta horizontal. Logo, a sua inclinação é $0°$.

3.2. $[ADE]$ é um triângulo equilátero.

Logo, $A\hat{E}D = \frac{180°}{3} = 60°$.

A inclinação da reta *ED* é $60°$.

3.3. Inclinação da reta $AD : 180° - 60° = 120°$

3.4. A inclinação da reta *AB*:

$180° - (60° + 90°) = 180° - 150° = 30°$

3.5. $BC \mathbin{/\!/} AD$. Logo, *BC* e *AD* têm a mesma inclinação.
Inclinação de *BC* é $120°$.

3.6. $CD \mathbin{/\!/} AB$. Logo, *CD* e *AB* têm a mesma inclinação.
Inclinação de *CD* é $30°$.

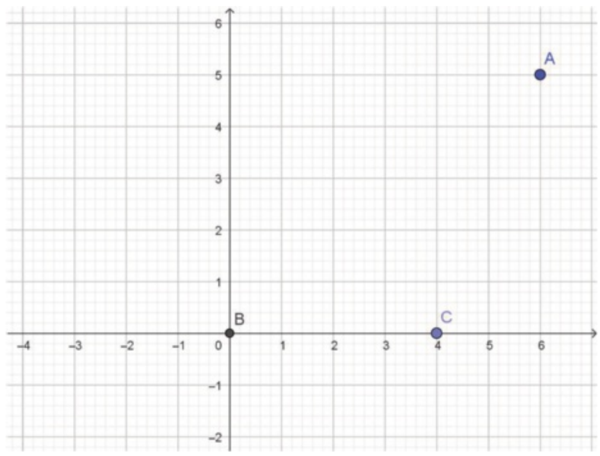
4. Seja *r* a reta tangente à circunferência no ponto *A* e seja *P*, o ponto de interseção da reta *r* com o eixo Ox.
Como *AB* é a bissetriz dos quadrantes ímpares, a sua inclinação é $45°$, ou seja, $P\hat{O}A = 45°$.
Como a reta *r* é tangente à circunferência no ponto *A*, é perpendicular ao raio no ponto de tangência, ou seja, $O\hat{A}P = 90°$

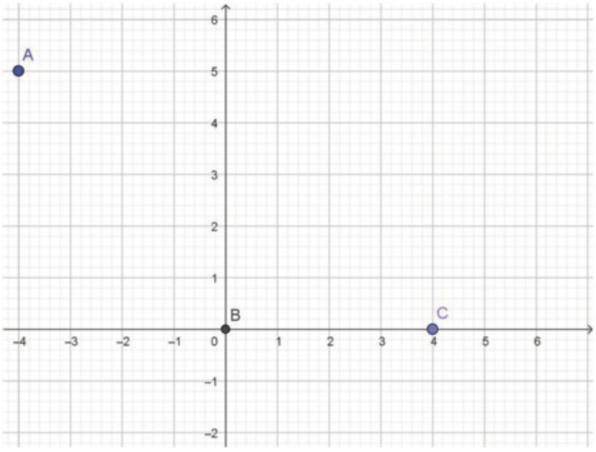
$A\hat{P}O = 180° - (90° + 45°) = 180° - 135° = 45°$

Inclinação de $r = 180° - 45° = 135°$
Como as duas retas tangentes são paralelas, têm a mesma inclinação, ou seja, têm, as duas, inclinação $135°$.

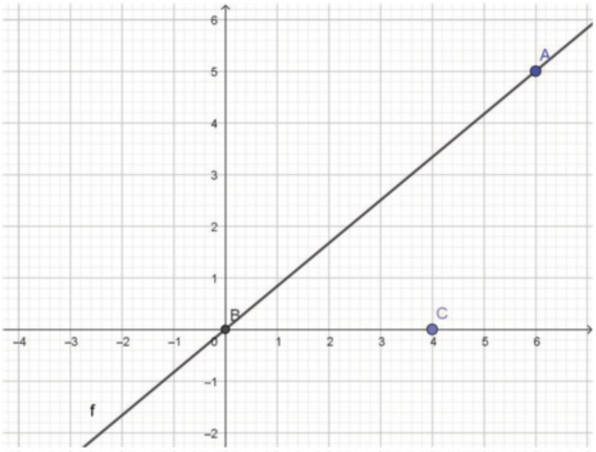
Pág. 148

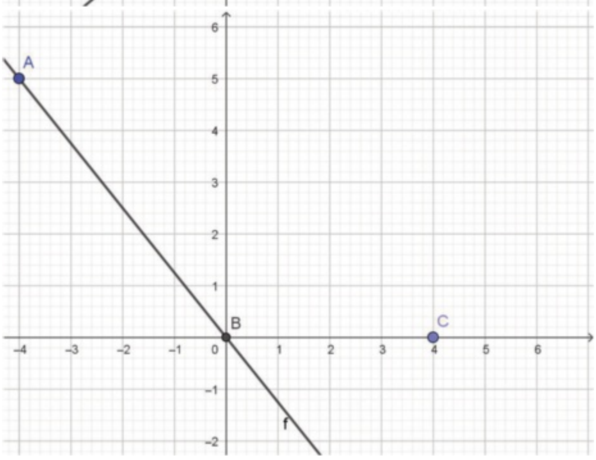
1.



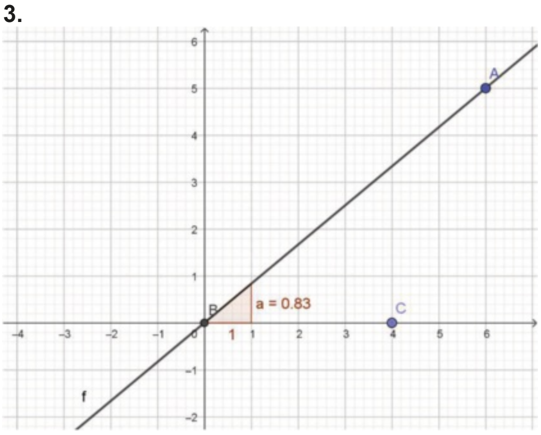


2.

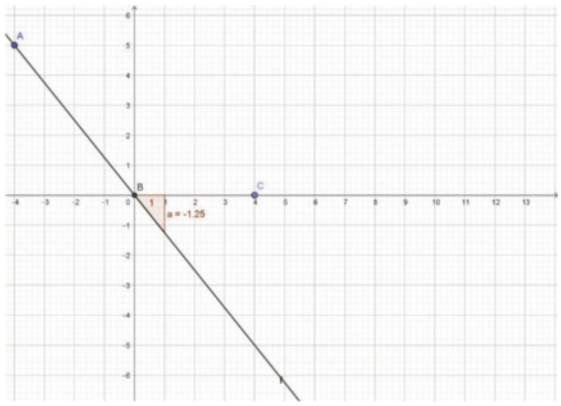




3.

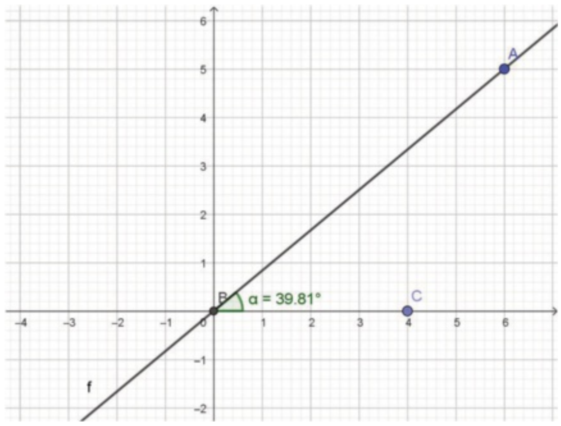


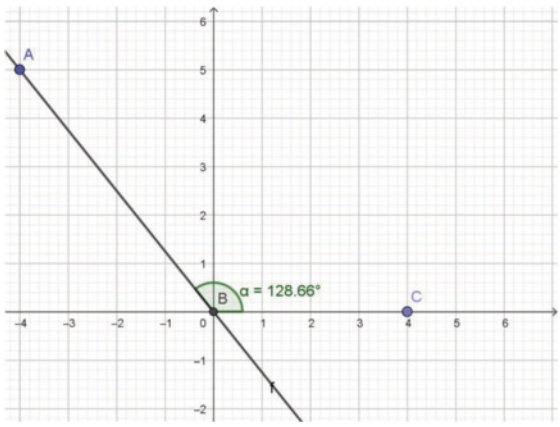
$m \approx 0,83$



$m = -1,25$

4.





α é a inclinação da reta *AB.*

5. $\tan\alpha \approx 0,83$; $\tan\alpha = -1,25$

6. $m = \tan\alpha$

7.1. $m = \dfrac{\sqrt{3}-0}{1-0} = \sqrt{3}$

7.2. $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

7.3. $\tan\theta = \sqrt{3}$ e θ é um ângulo agudo

$\theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = 60°$ ou $\dfrac{\pi}{3}$ rad.

Pág. 149

5. Seja s a reta perpendicular a r e que passa no ponto P, da bissetriz dos quadrantes pares com ordenada igual a –5.
Bissetriz dos quadrantes pares: $y = -x$

$P(5, -5)$

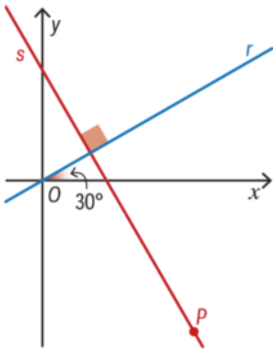
Inclinação da reta s: $30° + 90° = 120°$

$m_s = \tan 120° = -\sqrt{3}$

$s:\ y = -\sqrt{3}x + b \wedge P \in s$

$-5 = -\sqrt{3} \times 5 + b \Leftrightarrow -5 + 5\sqrt{3} = b$

$s:\ y = -\sqrt{3}x - 5 + 5\sqrt{3}$



Pág. 150

6.1. a) Seja r a reta de inclinação $30°$ e que passa no ponto C.

$m_r = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$r: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b \wedge c \in r$

$0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 1 + b \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} = b$

$r: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) Seja s a reta de inclinação $\frac{3\pi}{4}$ rad e que passa por C.

$m_s = \tan\frac{3\pi}{4} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

$s: y = -x + b \wedge C \in s$

$0 = 1 + b \Leftrightarrow 1 = b$

$s: y = -x + 1$

6.2. a) $m_{AB} = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{0 - (-2)} = \frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \sqrt{3}$

Seja α a inclinação de AB.

Como $m > 0$ e $\sqrt{3} = \tan\alpha$, $\alpha = \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$

ou $60°$.

b) $m_{AC} = \frac{0 - \sqrt{3}}{1 - (-2)} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Seja β a inclinação de AC.

Como $m < 0$ e $-\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\beta$,

$\beta = \tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$ ou $150°$.

c) $m_{CD} = \frac{-1 - 0}{2 - 1} = -1$

Seja θ a inclinação de CD.

Como $m < 0$ e $-1 = \tan\theta$,

$\theta = \tan^{-1}(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$ ou $135°$.

6.3. $m_{BC} = \frac{0 - 3\sqrt{3}}{1 - 0} = -3\sqrt{3}$

Seja α a inclinação de BC.

Como $-3\sqrt{3} = \tan\alpha$,

$\alpha = \tan^{-1}\left(-3\sqrt{3}\right) + \pi \approx 1{,}8$ rad.

7.1. a) $CD \,//\, AB$. Logo, CD e AB têm a mesma inclinação.
A inclinação da reta CD é $30°$.

b) A inclinação da reta AD é: $30° + 90° = 120°$

7.2. $m_{AD} = \tan 120° = \tan(180° - 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$

$AD:\ y = -\sqrt{3}x + b \wedge A \in AD$

$0 = -\sqrt{3} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \sqrt{3}$

$AD:\ y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$; $\qquad D\left(0, \sqrt{3}\right)$

$\overline{AD} = \sqrt{\left(\sqrt{3} - 0\right)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$

$A_{[ABCD]} = \overline{AD}^2 = 2^2 = 4$ u. a.

Pág. 151

8.1. A soma dos ângulos externos de um polígono é $360°$. Como se trata de um hexágono regular, cada um dos seus ângulos externos tem de amplitude $\frac{360°}{6°} = 60°$. $\quad E\hat{D}C = 180° - 60° = 120°$

8.2. $m_{AB} = \tan 60° = \sqrt{3}$

$AB: y = \sqrt{3}x + b \wedge A \in AB$

$0 = \sqrt{3} \times 2 + b \Leftrightarrow -2\sqrt{3} = b$

$AB: y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$

9. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan^2\alpha = \frac{9}{8} - 1 \Leftrightarrow \tan^2\alpha = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \tan\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{8}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan\alpha = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \tan\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$

Como $m < 0$, então, $m = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Pág. 152

Tarefas de consolidação 1

1.1. $m = \tan 150° = \tan(180° - 30°) = -\tan 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$r : y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ e $B \in r$

$0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times (-2\sqrt{3}) + b \Leftrightarrow -2 = b$

$r : y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$

1.2. $A(0, -2)$; $C(3, 2)$

$m_s = \frac{2-(-2)}{3-0} = \frac{4}{3}$

$s : y = \frac{4}{3}x + b$ e $b = -2$

$s : y = \frac{4}{3}x - 2$

1.3. $m_s = \frac{4}{3}$

Como $m_s > 0$ e $\frac{4}{3} = \tan\alpha$, $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53{,}1°$

A inclinação da reta *s* é $53{,}1°$.

2.1. a) $[AOB]$ é um triângulo retângulo e isósceles.

Então, $A\hat{B}O = O\hat{A}B = 45°$ ou $\frac{\pi}{4}$ rad.

Seja θ a inclinação reta *BC*

$\theta = 180° - (90° + 45°) = 180° - 135° = 45°$ ou

$\frac{\pi}{4}$ rad.

b) Inclinação de $BD = 45° + 45° = 90°$ ou $\frac{\pi}{2}$ rad.

c) Seja β a inclinação de *AB*.

$\beta = 45° + 90° = 135°$

$m_{AB} = \tan 135° = \tan(180° - 45°) = -\tan 45° = -1$

$AB : y = -x + b$ e $b = 3$

$AB : y = -x + 3$

2.2. $\overline{AB}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OA}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 3^2 + 3^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 18$

$\overline{AB}^2 = 18 \wedge \overline{AB} > 0 \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ u. c.

$A_{[ABO]} = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$ u. a.

$A_{[ABCD]} = \sqrt{18}^2 = 18$ u. a.

$A_{[AOBCD]} = A_{[ABO]} + A_{[ABCD]} = 18 + \frac{9}{2} = \frac{45}{2} = 22{,}5$ u. a.

2.3. $C(6, 3)$

$m_{OC} = \frac{3-0}{6-0} = \frac{1}{2}$

$\tan\alpha = \frac{1}{2}$

$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{4}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$

α é um ângulo agudo.

Então, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\tan\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\sin^2\alpha}{\frac{2\sqrt{2}}{5}} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$

$3\cos\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha) =$

$= 3\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) - (-\cos\alpha) =$

$= 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\alpha = 3\sin\alpha + \cos\alpha =$

$= 3 \times \frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\cancel{5}\sqrt{5}}{\cancel{5}} = \sqrt{5}$

3. $\overline{AO} = \overline{AT}$. Então, a abcissa de *A* é igual à ordenada, $A(1, 1)$.

$m_{AB} = m_{AT} = \frac{0-1}{2-1} = -1$

Como $m_{AT} < 0$ e $-1 = \tan\alpha$,

$\alpha = \tan^{-1}(-1) + \pi = \frac{-\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$

4. **I.** Falsa porque, se $\cos\alpha < 0$ e $0 \le \alpha < \pi$, tem-se que $\tan\alpha < 0$.

Como $m_r = \tan\alpha$, $m_r < 0$.

Logo, a afirmação é falsa.

II. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{5}{25} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{20}{25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{20}}{5} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos\alpha < 0$. Então, $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{5}}}{\frac{-2\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{5}}} = -\frac{1}{2}$

$m_r = \tan\alpha = -\frac{1}{2} \neq -2$

Logo, a afirmação é falsa.

Pág. 153

5.1. $m_s = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$

Seja α a inclinação da reta s.

Como $m_s < 0$ e $-\sqrt{3} = \tan\alpha$,

$\alpha = \tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) + 180° = -60° + 180° = 120°$

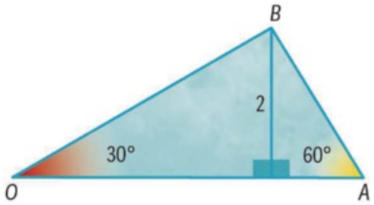
5.2. $B\hat{A}O = 180° - \alpha = 180° - 120° = 60°$

$A\hat{O}B + O\hat{A}B + O\hat{B}A = 180° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 30° + 60° + O\hat{B}A = 180° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow O\hat{B}A = 180° - 90° \Leftrightarrow O\hat{B}A = 90°$

5.3.



1.º Processo:

$r: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

$B\left(x_B, 2\right)$ e $B \in r$

$2 = \frac{\sqrt{3}}{3}x_B \Leftrightarrow x_B = \frac{6}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x_B = 2\sqrt{3}$

$B\left(2\sqrt{3}, 2\right)$

$s: y = -\sqrt{3}x + b \Leftrightarrow 2 + 6 = b \Leftrightarrow b = 8$

$s: y = -\sqrt{3}x + 8$

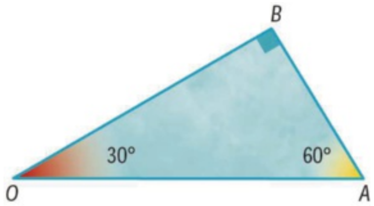
$B\left(x_A, 0\right)$ e $A \in s$

$0 = -\sqrt{3}x_A + 8 \Leftrightarrow x_a = \frac{8}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x_A = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

$A\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}, 0\right)$

$A_{[OAB]} = \frac{\frac{8\sqrt{3}}{3} \times 2}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ u. a.

2.º Processo:



$\sin 30° = \frac{2}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \overline{OB} = 4$ u. c.

$\sin 60° = \frac{2}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$A_{[ABO]} = \frac{\overline{OB} \times \overline{AB}}{2} = \frac{4 \times \frac{4\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{6} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ u. a.

6. $m_r = \frac{a-1}{\sqrt{3}}$

Seja α a inclinação de r.

$m_r = \tan\alpha \Leftrightarrow \frac{a-1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{a-1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\cancel{\sqrt{3}}\left(a-1\right)}{\cancel{3}} = \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{3}} \Leftrightarrow a - 1 = 1 \Leftrightarrow a = 2$

7.1. **a)** $A\left(-1, 0\right)$

$m_r = \tan 60° = \sqrt{3}$

$r: y = \sqrt{3}x + b$ e $A \in r$

$0 = \sqrt{3}\left(-1\right) + b \Leftrightarrow \sqrt{3} = b$

$r: y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$

b) $D \in r$. Então $D\left(x, \sqrt{3}x + \sqrt{3}\right)$

D é um ponto da circunferência.
Então,

$x^2 + \left(\sqrt{3}x + \sqrt{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x^2 + 6x + 3 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 4 \times 2}}{2 \times 4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{8} \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-6-2}{8} \vee x = \frac{-6+2}{8} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -\frac{1}{2}$

$A\left(-1, 0\right)$, $D\left(-\frac{1}{2}, y\right)$

$y = \sqrt{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$D\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

7.2. C tem a mesma ordenada que D e abcissa positiva. $C\left(x, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $x > 0$

C pertence a circunferência.

$x^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 - \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

$C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \times \overline{BC} = \frac{1 + \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{5}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{8}$ u. a.

8. $m_r = \dfrac{\frac{5}{2} - 0}{\frac{5\sqrt{3}}{2} - 0} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Como $m_r > 0$ e $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \tan \alpha_r$,

$\alpha_r = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30°$

A reta *s* é tangente à circunferência. Então é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

$\alpha_s = 90° + 30° = 120°$

$m_s = \tan 120° = \tan(180° - 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$

$-\dfrac{1}{m_s} = -\dfrac{1}{-\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = m_r$

Como $m_r > 0$ e $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \tan \alpha_r$, $\alpha_r = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30°$

Pág. 155

1.1. $m = \dfrac{2-3}{-2-2} = \dfrac{-1}{-4} = \dfrac{1}{4}$

Como $m > 0$ e $\dfrac{1}{4} = \tan \alpha$,

$\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right) \approx 14°$.

1.2. $y + x = -5 \Leftrightarrow y = -x - 5$

$m = -1$

Como $m < 0$ e $-1 = \tan \alpha$,

$\alpha = \tan^{-1}(-1) + 180° = -45° + 180° = 135°$

1.3. $m = \dfrac{4}{-2} = -2$

Como $m < 0$ e $-2 = \tan \alpha$,

$\alpha = \tan^{-1}(-2) + 180° \approx 117°$

2. $m_{AB} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Seja θ a inclinação da reta *AB*.

Como $m_{AB} < 0$ e $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \tan \theta$,

$\theta = \tan^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) + 180° = -30° + 180° = 150°$

$\alpha = 180° - 150° = 30°$

$\beta = O\hat{B}A = 180° - (90° + 30°) = 180° - 120° = 60°$

Opção **(C)**

3. I: $\alpha_r = \tan 135° = \tan(180° - 45°) = -\tan 45° = -1$

Como $P(2, 3) \in r$, tem-se que de $y = -x + b$,

vem que $3 = -2 + b \Leftrightarrow 5 = b$

Logo, a equação reduzida da reta r é $y = -x + 5$.

Opção **a)**

II: $(1, -1)$ e $(2, -2)$ são vetores diretores da reta *r*.

$(2, 3) = (2, 1) + k(-1, 1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2 - k \\ 3 = 1 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ 2 = k \end{cases}$

Sistema impossível.

P não pertence à reta definida na opção **a)**

$(2, 3) = (1, 4) + k(2, -2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 1 + 2k \\ 3 = 4 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2k \\ 2k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{1}{2} \\ k = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

P pertence à reta definida na opção **c)**

I – a) ; II – c)

4.1. Seja *D* o ponto de interseção da reta *CB* com o eixo Ox .

$D\hat{C}O = 180° - 100° = 80°$

$C\hat{O}D = 180° - 135° = 45°$

$O\hat{D}C = 180° - (45° + 80°) = 55°$

A inclinação da reta *CB* é 55º.

Outra alternativa:

A inclinação da reta CB é igual à da reta OA porque são retas paralelas.

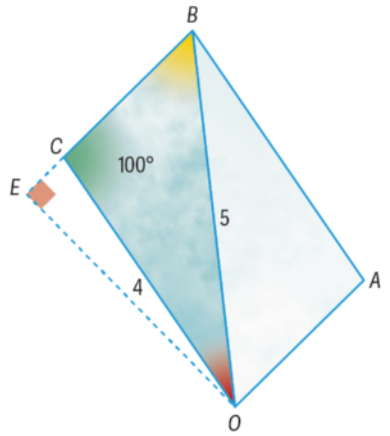
Tem-se que $A\hat{O}C = 135° - O\hat{C}B$.

Como o quadrilátero $[OABC]$ é um paralelogramo.

$O\hat{C}B = 180° - O\hat{C}B = 180° - 100° = 80°$

Assim, $A\hat{O}C = 135° - O\hat{C}B = 135° - 80° = 55°$.

4.2.



Seja *E* o pé da perpendicular a *CB* que passa por *O*.

$E\hat{C}O = 180° - 100° = 80°$

$\sin 80° = \dfrac{\overline{OE}}{4} \Leftrightarrow \overline{OE} = 4\sin 80°$

$\sin E\hat{B}O = \dfrac{\overline{OE}}{5} \Leftrightarrow \sin E\hat{B}O = \dfrac{4\sin 80°}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin E\hat{B}O \approx 0{,}7878$

$E\hat{B}O = \sin^{-1}(0{,}7878) \approx 52°$

$B\hat{O}C = 180° - (100° + 52°) = 28°$

Inclinação da reta $OB : 135° - 28° = 107°$

5. $m_r = \dfrac{\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)} = \dfrac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}} = \tan\frac{\pi}{5}$

A inclinação da reta *r* é $\frac{\pi}{5}$ rad.

As retas *r* e *s* têm a mesma inclinação. Logo, são paralelas.

2. Produto escalar de dois vetores

Pág. 156

1.1. a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{e}$

b) $-\vec{u} = \vec{a}$

c) $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{b}$

d) $1{,}5\vec{v} = \vec{c}$

e) $\vec{u}$ e $\vec{a}$; $\vec{b}$ e $\vec{d}$

1.2. $\|\vec{a}\| = 3$

2. **Situação 1:**

$\cos\theta = \cos 90° = 0$

Logo, $\vec{F} \cdot \vec{d} = 0$ (zero).

Situação 2:

θ é um ângulo agudo

Então, $\cos\theta > 0$.

Logo, $\vec{F} \cdot \vec{d} > 0$ (positivo)

Situação 3:

$\cos\theta = \cos 180° = -1 < 0$

Logo, $\vec{F} \cdot \vec{d} < 0$ (negativo)

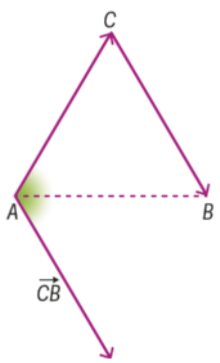
Pág. 157

10.1. $\left(\overrightarrow{CA} \hat{,} \overrightarrow{CB}\right) = \dfrac{180°}{3} = 60°$

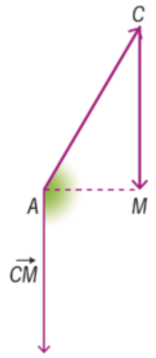
10.2. $\left(\overrightarrow{AB} \hat{,} \overrightarrow{MB}\right) = \left(\overrightarrow{AB} \hat{,} \overrightarrow{AM}\right) = 0°$

10.3. $\left(\overrightarrow{AM} \hat{,} \overrightarrow{BM}\right) = \left(\overrightarrow{MB} \hat{,} \overrightarrow{MA}\right) = 180°$

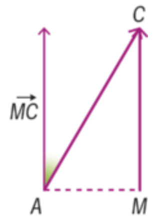
10.4. $\left(\overrightarrow{AC} \hat{,} \overrightarrow{CB}\right) = 2 \times 60° = 120°$



10.5. $\left(\overrightarrow{AC} \hat{,} \overrightarrow{CM}\right) = 60° + 90° = 150°$



10.6. $\left(\overrightarrow{AC} \hat{,} \overrightarrow{MC}\right) = 90° - 60° = 30°$



Pág. 158

11.1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) = 3 \times 4 \times \cos 60° =$

$= 12 \times \dfrac{1}{2} = 6$

11.2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) = 3 \times 2{,}5 \times \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$

$= 7{,}5\cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{15}{2} \times \left(-\cos\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{15}{2} \times \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= -\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

11.3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos 90° =$

$\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times 0 = 0$

11.4. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) = 3 \times 4 \times \cos\pi =$

$= 12 \times (-1) = -12$

12. $\dfrac{360°}{6} = 60°$

12.1. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OC}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{OA} \hat{,} \overrightarrow{OC}\right) =$

$= 2 \times 2 \times \cos(2 \times 60°) = 4\cos(180° - 60°) =$

$= 4(-\cos 60°) = 4 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2$

12.2. $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EB} = \left\|\overrightarrow{AF}\right\| \times \left\|\overrightarrow{EB}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AF} \hat{,} \overrightarrow{EB}\right) =$

$= 2 \times (2 \times 2) \times \cos 180° = 8 \times (-1) = -8$

12.3. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \times \cos 0° = 4 \times 4 \times 1 = 16$

12.4. $\left(\overrightarrow{AE}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AF}\right) = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

$[AED]$ é um triângulo retângulo porque está inscrito numa semicircunferência.

$\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{ED}^2 \Leftrightarrow 4^2 = \overline{AE}^2 + 2^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16 - 4 = \overline{AE}^2 \Leftrightarrow \overline{AE} = \sqrt{12} \Leftrightarrow \overline{AE} = 2\sqrt{3}$

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \left\|\overrightarrow{AE}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AF}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AE}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AF}\right) =$

$= 2\sqrt{3} \times 2 \times \cos 30º = 4\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

13. $\left\|\vec{u}\right\| = 6$

$\left\|\vec{v}\right\| - 4 = 6 \Leftrightarrow \left\|\vec{v}\right\| = 10$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}\right) = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \dfrac{\left\|\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{v}\right\|} = 6 \times 6 = 36$

Pág. 159

14.1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{CF}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{CF}\right) =$

$= 3 \times 20 \times \cos 90^\circ = 60 \times 0 = 0$

14.2. $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA} = \left\|\overrightarrow{BD}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{BD}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BA}\right) =$

$= \cancel{\left\|\overrightarrow{BD}\right\|} \times 3 \times \dfrac{3}{\cancel{\left\|\overrightarrow{BD}\right\|}} = 9$

15.1. $[APB]$ é um triângulo inscrito numa semicircunferência, pelo que, é retângulo em P.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AP}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AP}\right) =$

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} = 2 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{OB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OP}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{OB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OP}\right) = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \times 2 \times \cos\left(\overrightarrow{OB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OP}\right) = 2 \Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{OB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OP}\right) = \dfrac{1}{2}$

$\left(\overrightarrow{OB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OP}\right) = 60^\circ$

$\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AP}\right) = \dfrac{\left(\overrightarrow{OB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OP}\right)}{2} = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

$\cos\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AP}\right) = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AP}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\left\|\overrightarrow{AP}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 4 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AP}\right\| = 2\sqrt{3}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = \left\|\overrightarrow{AP}\right\|^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 4 \times 3 = 12$

15.2. $[OP]$ e $[OA]$ são raios da mesma circunferência, pelo que, $[OPA]$ é um triângulo isósceles.

$\left(\overrightarrow{AO}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AP}\right) = \left(\overrightarrow{PO}\,\hat{,}\,\overrightarrow{PA}\right) = 30º$

$\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} = \left\|\overrightarrow{PO}\right\| \times \left\|\overrightarrow{PA}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{PO}\,\hat{,}\,\overrightarrow{PA}\right) =$

$= 2 \times 2\sqrt{3} \times \cos 30^\circ = 4\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2 \times 3 = 6$

16. $\overline{DA} = \dfrac{20}{4} = 5$

Seja M o ponto de interseção das diagonais do losango.

$\overline{DA}^2 = \overline{DM}^2 + \overline{AM}^2 \Leftrightarrow 5^2 = \overline{DM}^2 + 4^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9 = \overline{DM}^2 \underset{\left(\overline{DM}>0\right)}{\Leftrightarrow} \overline{DM} = 3$

$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DA} = -\left\|\overrightarrow{DB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{DA}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{DB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{DA}\right) =$

$= -\left\|\overrightarrow{DB}\right\| \times \cancel{\left\|\overrightarrow{DA}\right\|} \times \dfrac{\left\|\overrightarrow{DM}\right\|}{\cancel{\left\|\overrightarrow{DA}\right\|}} = -2\overline{DM} \times \overline{DM} = -2 \times 3 \times 3 =$

$= -18$

Pág. 160

17.1. Positivo, porque $0º < \left(\overrightarrow{CA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{CB}\right) < 90^\circ$.

17.2. Nulo, porque $\left(\overrightarrow{CA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{CF}\right) = 90º$.

17.3. Negativo, porque $90^\circ < \left(\overrightarrow{CA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AF}\right) < 180^\circ$.

17.4. Negativo, porque $\left(\overrightarrow{CA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AF}\right) = 180^\circ$.

17.5. Positivo, porque $\left(\overrightarrow{CA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{FD}\right) = 0º$.

17.6. Nulo, porque $\left(\overrightarrow{CA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{EF}\right) = 90º$.

Pág. 161

18.1. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{u}\right\| \times \cos\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{u}\right) = \left\|\vec{u}\right\|^2 \times \cos 0º = \left\|\vec{u}\right\|^2 \times 1 =$

$= \left\|\vec{u}\right\|^2$

18.2. $\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2 = \left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$

$= \left\|\vec{u}\right\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$

19. $\left\|\vec{u}\right\| = 3$ e $\left\|\vec{v}\right\| - 1 = 3 \Leftrightarrow \left\|\vec{v}\right\| = 4$

19.1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}\right) = 3 \times 4 \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) =$

$= 12 \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = 12\left(-\cos\dfrac{\pi}{3}\right) = -12 \times \dfrac{1}{2} = -6$

19.2. $\left(\sqrt{3}\vec{u}\right) \cdot \left(-\sqrt{12}\vec{v}\right) = \left(-\sqrt{3} \times \sqrt{12}\right)\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 \times (-6) = 36$

19.3. $\left(3\vec{v} + 2\vec{u}\right) \cdot \left(-2\vec{v}\right) = -3 \times 2\vec{v} \cdot \vec{v} - 2 \times 2\vec{u} \cdot \vec{v} =$

$= -6\left\|\vec{v}\right\|^2 - 4 \times (-6) = -6 \times 4^2 + 24 = -96 + 24 = -72$

19.4. $\left(-\vec{u}\right) \cdot \left(2\vec{v} - \vec{u}\right) = -2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} = -2 \times (-6) + \left\|\vec{u}\right\|^2 =$

$= 12 + 3^2 = 21$

Pág. 162

20.1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AC}\right) =$

$= 4 \times 9 \cos\dfrac{\pi}{3} = 36 \times \dfrac{1}{2} = 18$

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=$

$=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2+\overrightarrow{AB}\cdot\left(-\overrightarrow{AC}\right)=9^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=81-18=63$

20.2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{AB}\hat{,}\overrightarrow{AC}\right)=$

$=4\times 2\cos 120°=8\cos\left(180°-60°\right)=$

$=-8\cos 60°=-8\times\frac{1}{2}=-4$

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2^2-(-4)=4+4=8$

21.1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$, porque $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$.

21.2. $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$

$\underset{\left(\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}\right)}{=}0+\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\cos\left(\overrightarrow{AD}\hat{,}\overrightarrow{BC}\right)=2\times 6\cos 0°=$

$=12\times 1=12$

21.3. $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CD}\cdot\left(-\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB}=$

$=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CB}=$

$\underset{\left(\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{CB}\right)}{=}\frac{2}{3}\left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2+0=\frac{2}{3}\times 6^2=\frac{2}{3}\times 36=24$

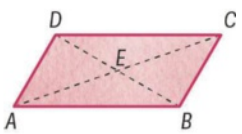
21.4. $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{DC}\cdot\left(-\overrightarrow{DA}\right)=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=$

$=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}=$

$\underset{\left(\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{DA}\right)}{=}0+\frac{2}{\cancel{3}}\left(-\cancel{3}\overrightarrow{DA}\right)=-2\left\|\overrightarrow{DA}\right\|^2=-2\times 2^2=-8$

Pág. 163

22.



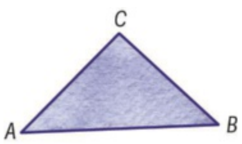
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}\right)=$

$=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{ED}=$

$\underset{\left(\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{BE}\right)}{=}\left\|\overrightarrow{AE}\right\|^2+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BE}=$

$=\left\|\overrightarrow{AE}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{BE}\right\|^2=\overline{AE}^2-\overline{BE}^2$

23.



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$

24. $\left\|2\vec{u}-3\vec{v}\right\|^2=\left(2\vec{u}-3\vec{v}\right)\cdot\left(2\vec{u}-3\vec{v}\right)=$

$=4\vec{u}\cdot\vec{u}-6\vec{u}\cdot\vec{v}-6\vec{u}\cdot\vec{v}+9\vec{v}\cdot\vec{v}=$

$=4\left\|\vec{u}\right\|^2-12\vec{u}\cdot\vec{v}+9\left\|\vec{v}\right\|^2=$

$=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-12\times\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\cos\left(\vec{u}\hat{,}\vec{v}\right)+9\times 3^2=$

$=\cancel{4}\times\frac{1}{\cancel{4}}-12\times\frac{1}{2}\times 3\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+9\times 9=$

$=1-18\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+81=1-18\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)+81=$

$=1+18\times\frac{1}{2}+81=1+9+81=91$

25. $\overline{AB}^3=8\Leftrightarrow\overline{AB}=\sqrt[3]{8}\Leftrightarrow\overline{AB}=2$

25.1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HE}=0$, porque $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{HE}$.

25.2. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}\right)=$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BF}=$

$\underset{\left(\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BF},\ \overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AB}\text{ e }\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{BF}\right)}{=}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+0+0+0=2^2=4$

25.3. $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AH}\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HG}\right)=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HG}=$

$\underset{\left(\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{HG}\right)}{=}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}\right)+0=$

$=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{DH}=$

$\underset{\left(\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{DH}\right)}{=}\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2+0+0+\left\|\overrightarrow{DH}\right\|^2=2^2+2^2=4+4=8$

Pág. 164

Tarefas de consolidação 2

1. $A_{[BCDE]}=10\Leftrightarrow\frac{\overline{DC}+\overline{EB}}{2}\times\overline{BC}=10\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{4+\overline{EB}}{2}\times 4=10\Leftrightarrow\left(4+\overline{EB}\right)\times 2=10\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4+\overline{EB}=5\Leftrightarrow\overline{EB}=1$

1.1. a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BE}=$

$=-\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BE}\right\|\cos\left(\overrightarrow{BA}\hat{,}\overrightarrow{BE}\right)=$

$=-4\times 1\cos 0°=-4\times 1=-4$

b) $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$, porque $\overrightarrow{EB}\perp\overrightarrow{AD}$.

c) $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}=\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}\right)\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CB}=$

$\underset{\left(\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}\text{ e }\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{CB}\right)}{=}\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DA}+0=\left\|\overrightarrow{DA}\right\|^2=4^2=16$

d) $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{DC}=\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}=$

$\underset{\left(\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{DC}\right)}{=}\left\|\overrightarrow{EA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{DC}\right\|\cos\left(\overrightarrow{EA}\hat{,}\overrightarrow{DC}\right)+0=$

$=3\times 4\times\cos 180°=-12$

1.2. $p(x)=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DA}\cdot\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}\right)=$

$=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CF}=$

$\underset{\left(\overrightarrow{DA}\perp\overrightarrow{DC}\right)}{=}0+\left\|\overrightarrow{DA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{CF}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{DA}\hat{,}\overrightarrow{CF}\right)=$

$=4\times(4-x)\times\cos 0°=(16-4x)\times 1=16-4x$

Então, o gráfico da função p será uma parte da reta de equação $y = 16 - 4x$.

O gráfico apresentado pela Ana não representa uma parte de uma reta.

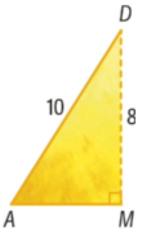
O gráfico da Bianca tem o domínio $[0, 4]$ e sabemos que o ponto F nunca coincide com B nem com C. Logo, o domínio da função p teria de ser $]0, 4[$.

2. $\overline{AD}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{DM}^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10^2 = 8^2 + \overline{AM}^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 100 - 64 = \overline{AM}^2 \Leftrightarrow \overline{AM}^2 = 36 \Leftrightarrow$

$\underset{(\overline{AM}>0)}{\Leftrightarrow} \overline{AM} = \sqrt{36} \Leftrightarrow \overline{AM} = 6$



2.1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MD} =$

$\underset{(\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{MD})}{=} \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AM}\right\| \cos\left(\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AM}\right) + 0 = 10 \times 6 \times \cos 0° =$

$= 60 \times 1 = 60$

2.2. $\left\|\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{DM}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2$

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} \underset{(\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC})}{=} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2$

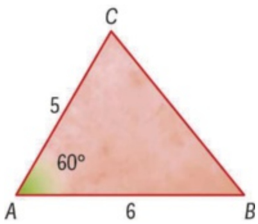
Logo, $\left\|\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{DM}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2$.

3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 15 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AC}\right) = 15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AC}\right) = 15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times 5 \times \cos 60° = 15 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times 5 \times \frac{1}{2} = 15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 6 \Leftrightarrow \overline{AB} = 6$ u. c.



Pág. 165

4. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 36 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = 36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} = 36 \Leftrightarrow$

$\underset{(\overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{AC})}{\Leftrightarrow} \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + 0 = 36 \underset{(\overline{AC} \geq 0)}{\Leftrightarrow} \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{36} \Leftrightarrow$

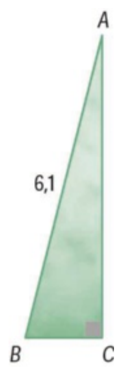
$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 6$ u. c.

$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow 6{,}1^2 = 6^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 37{,}21 = 36 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 1{,}21 \Leftrightarrow$

$\underset{\overline{BC}>0}{\Leftrightarrow} \overline{BC} = \sqrt{1{,}21} \Leftrightarrow \overline{BC} = 1{,}1$ u. c.

$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{6 \times 1{,}1}{2} = 3{,}3$ u. a.



5.1. Por exemplo:

$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CA}$.

5.2. $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BC} = -25 \Leftrightarrow -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = -25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = -25 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = 25 \underset{(\|\overrightarrow{BC}\|>0)}{\Leftrightarrow} \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = 5$ cm

$A_{[ABCD]} = 5^2 = 25$ cm^2

$V_{[ABCDV]} = \frac{1}{3} \times 25 \times 9 = 75$ cm^3

6. $\vec{w} = 4\vec{u}$

6.1. **a)** $\vec{w} \cdot (2\vec{v}) = 4\vec{u} \cdot (2\vec{v}) = 8\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 \times (-4) = -32$

b) $\vec{w} \cdot \vec{w} = \|\vec{w}\|^2 = \left(4\|\vec{u}\|\right)^2 = (4 \times 3)^2 = 12^2 = 144$

6.2. $2\vec{u} \cdot \left(-\vec{v} - 3\vec{v} + k\vec{u}\right) = -10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\vec{u} \cdot \vec{v} - 6\vec{u} \cdot \vec{u} + 2k\vec{u} \cdot \vec{u} = -10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 \times (-4) - 6 \times \|\vec{u}\|^2 + 2k\|\vec{u}\|^2 = -10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8 - 6 \times 3^2 + 2k \times 3^2 = -10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 18k = -10 - 8 + 54 \Leftrightarrow 18k = 36 \Leftrightarrow k = 2$

7.1. $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AG} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HG}\right) =$

$= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HG} =$

$\underset{\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{AH},\ \overrightarrow{HG} \perp -\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{HG}}{=} -\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}\right) =$

$= -a^2 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DH} =$

$\underset{\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{DH}}{=} -a^2 + \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 + 0 + 0 + \left\|\overrightarrow{DH}\right\|^2 =$

$= -a^2 + a^2 + a^2 = a^2$

7.2. $\overline{AH}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DH}^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$\overline{BH}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AH}^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2$

$\left\|\overrightarrow{AG}\right\| = \left\|\overrightarrow{BH}\right\|$

$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AG} = a^2 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{BH}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AG}\right\| \times \cos\alpha = a^2 \Leftrightarrow$

$\underset{\|\overrightarrow{AG}\| = \|\overrightarrow{BH}\|}{\Leftrightarrow} \left\|\overrightarrow{BH}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BH}\right\| \times \cos\alpha = a^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{BH}\right\|^2 \times \cos\alpha = a^2 \Leftrightarrow$

$3a^2 \times \cos\alpha = a^2 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\cancel{a^2}}{3\cancel{a^2}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3}$

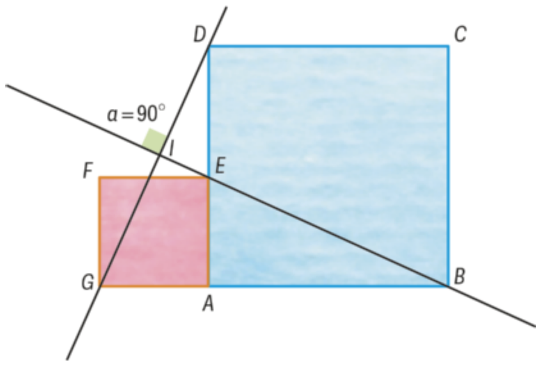
Assim, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70{,}5°$.

8. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OP} =$

$= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AO}\right\| \times \cos 0° + \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OP}\right\| \times \cos\alpha =$

$= 2r \times r \times 1 + 2r \times r \cos\alpha = 2r^2(1 + \cos\alpha)$

9.1.



$B\hat{I}D = 90°$

9.2. $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{GD} = \left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD}\right) =$

$= \overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} =$

$\underset{\overrightarrow{EA}\perp\overrightarrow{GA}\ e\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}}{=} 0 - \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AG} + 0 =$

$= -\left\|\overrightarrow{AE}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\cos\left(\overrightarrow{AE}\hat{,}\overrightarrow{AD}\right) -$

$-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AG}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{AB}\hat{,}\overrightarrow{AG}\right) =$

$\underset{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{AD}\right\|,\ \left\|\overrightarrow{AG}\right\|=\left\|\overrightarrow{AE}\right\|}{=} -\left\|\overrightarrow{AE}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\cos 0° -$

$-\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AE}\right\|\times\cos 180° =$

$= -\left\|\overrightarrow{AE}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AD}\right\| + \left\|\overrightarrow{AE}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = 0$

Logo, $B\hat{I}D = 90°$.

Pág. 167

Avaliação formativa 2

1.1. **a)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{CD}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{AB}\hat{,}\overrightarrow{CD}\right) =$

$= 12\times 12\cos 180° = 144\times(-1) = -144$

b) $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BC} \underset{\overrightarrow{DC}\perp\overrightarrow{BC}}{=} 0$

c) $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{DE}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{DE}\hat{,}\overrightarrow{AB}\right) =$

$= \cancel{\left\|\overrightarrow{DE}\right\|}\times 12\times\dfrac{6}{\cancel{\left\|\overrightarrow{DE}\right\|}} = 72$

d) $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} =$

$= -\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{AD}\hat{,}\overrightarrow{AC}\right) =$

$= -8\times\cancel{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}\times\dfrac{8}{\cancel{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}} = -64$

1.2. $\left(\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{CE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{DA}-\dfrac{1}{2^4}\overrightarrow{AC}\right) =$

$= \left(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{DA}-\dfrac{1}{16}\overrightarrow{AC}\right) =$

$= \overrightarrow{DC}\cdot\left(\overrightarrow{DA}-\dfrac{1}{16}\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA} - \dfrac{1}{16}\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AC} =$

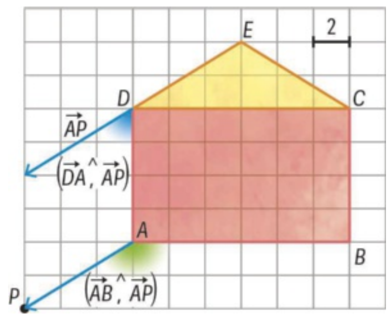
$\underset{\overrightarrow{DC}\perp\overrightarrow{DA}}{=} 0 - \dfrac{1}{16}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} =$

$= -\dfrac{1}{16}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cos\left(\overrightarrow{AB}\hat{,}\overrightarrow{AC}\right) =$

$= -\dfrac{1}{16}\times 12\times\cancel{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}\dfrac{12}{\cancel{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}} = -9$

Opção **(B)**

1.3.



$90° < \left(\overrightarrow{AB}\hat{,}\overrightarrow{AP}\right) < 180°$

Então, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP} < 0$

$0 \leq \left(\overrightarrow{DA}\hat{,}\overrightarrow{AP}\right) < 90°$

Então, $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AP} > 0$.

2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \dfrac{1}{4}$

A área da base (quadrado) é igual a $\dfrac{1}{4}$ m^2.

64 cm $= 0{,}64$ m

$V_1 = \dfrac{1}{4}\times 0{,}64 = 0{,}16$

$V_2 = \dfrac{3}{4}\times 0{,}16 = 0{,}12$

$V_3 = \dfrac{1}{2}\times 0{,}16 = 0{,}08$

$V = V_1 + V_2 + V_3 = 0{,}16 + 0{,}12 + 0{,}08 = 0{,}36$

O volume do pódio é igual a $0{,}36$ m^3.

3.1. Opção **c)** **3.2.** Opção **a)**

4.1. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\cos\left(\overrightarrow{AC}\hat{,}\overrightarrow{BC}\right) =$

$= 1\times 1\times\cos 180° = 1\times(-1) = -1 \neq 1$

Opção **(C)**

4.2. $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ}\right)\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB} =$

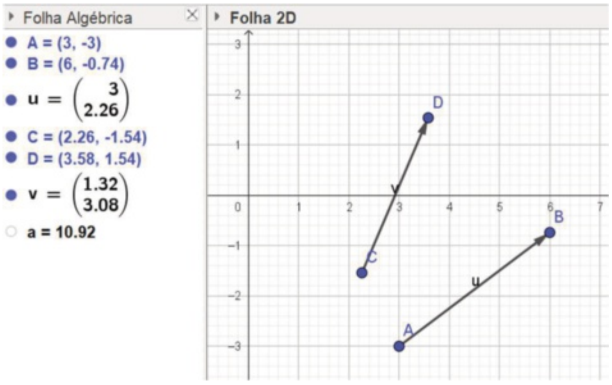
$= \left\|\overrightarrow{AP}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{AP}\hat{,}\overrightarrow{AB}\right) =$

$= \left\|\overrightarrow{AP}\right\|\times\cancel{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}\dfrac{\left\|\overrightarrow{AP}\right\|}{\cancel{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}} = \left\|\overrightarrow{AP}\right\|^2 = \overline{AP}^2$

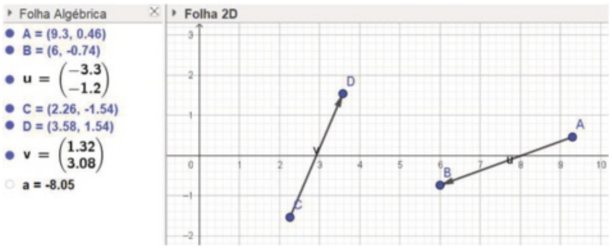
3. Produto escalar de dois vetores em referencial o. n.

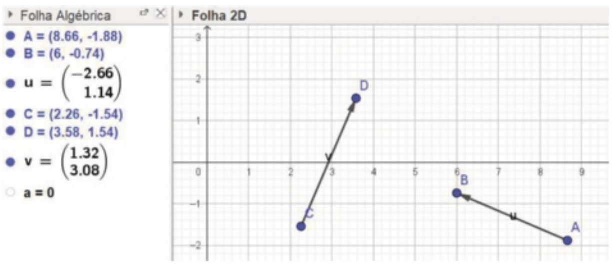
Pág. 168

1.1.

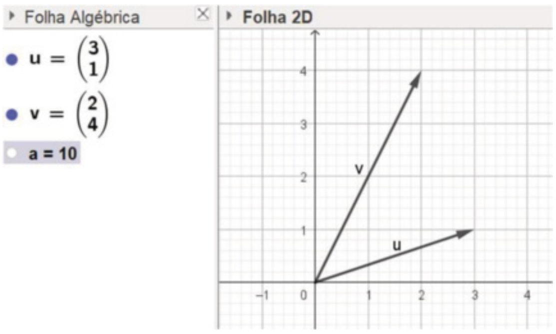


1.2.





2.1.



2.2. **a)** 4

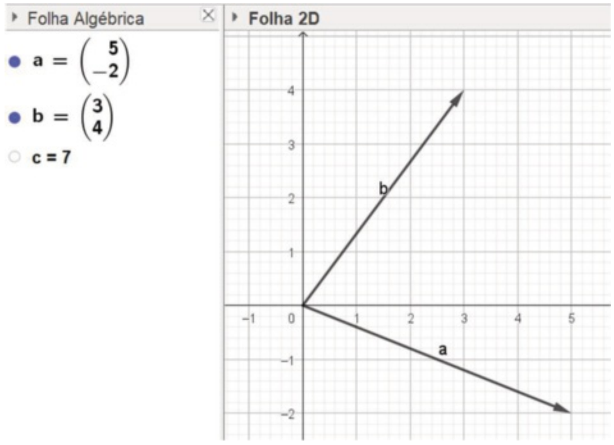
b) $\left(2\overrightarrow{e_1}+4\overrightarrow{e_2}\right)$

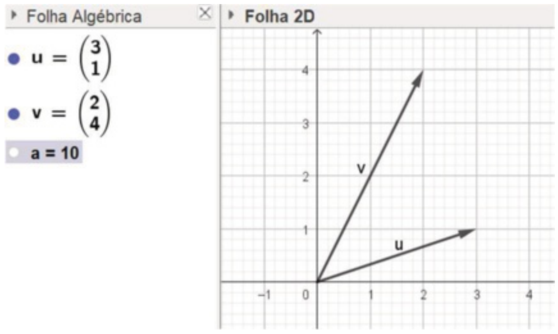
c) $1\times 2\times \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_1}$

d) $\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_1}=0$

e) 1

3.





$\vec{a}\cdot\vec{b}=5\times 3+(-2)\times 4=7$

Pág. 169

26.1. a) $\overrightarrow{AB}=B-A=(5,-3)-(2,-1)=(5-2,-3+1)=$

$=(3,-2)$

$\vec{e}_1\cdot\overrightarrow{AB}=(1,0)\cdot(3,-2)=1\times 3+0\times(-2)=3$

b) $(\vec{u}+\vec{e}_1)\cdot(\vec{e}_1-\overrightarrow{AB})=(2,4)\cdot(-2,2)=$

$=2\times(-2)+4\times 2=4$

Cálculos auxiliares:

$\vec{u}+\vec{e}_1=(1,4)+(1,0)=(1+1,4+0)=(2,4)$

$\vec{e}_1-\overrightarrow{AB}=(1,0)-(3,-2)=(1-3,0+2)=(-2,2)$

26.2. $P(x,x+1)$

$\overrightarrow{OP}=P-O=(x,x+1)-(0,0)=(x,x+1)$

$\overrightarrow{OP}\perp\vec{u}$

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{OP}=0\Leftrightarrow(1,4)\cdot(x,x+1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+4(x+1)=0\Leftrightarrow x+4x+4=0\Leftrightarrow 5x=-4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{4}{5}$

$P\left(-\dfrac{4}{5},-\dfrac{4}{5}+1\right)=\left(-\dfrac{4}{5},\dfrac{1}{5}\right)$

27.1. $\overrightarrow{OA}=A-O=(2,0,0)-(0,0,0)=(2,0,0)$

$\overrightarrow{BD}=D-A=(0,0,2)-(2,2,0)=(0-2,0-2,2-0)=$

$=(-2,-2,2)$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BD}=(2,0,0)\cdot(-2,-2,2)=$$
$$=2\times(-2)+0\times(-2)+0\times2=$$
$$=-4+0+0=-4$$

27.2. $P(x,y,1)$

$$(x,y,1)=(1,0,-2)+k(1,-2,3)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+k\\y=-2k\\1=-2+3k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\\-\\3=3k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+1\\y=-2\times1\\1=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-2\\-\end{cases}$$

$P(2,-2,1)$

$F(2,2,2)$; $G(0,2,2)$

$$M\left(\frac{2+0}{2},\frac{2+2}{2},\frac{2+2}{2}\right)=(1,2,2)$$

$$\overrightarrow{MP}=P-M=(2,-2,1)-(1,2,2)=$$
$$=(2-1,-2-2,1-2)=(1,-4,-1)$$

$$\overrightarrow{EO}=O-E=(0,0,0)-(2,0,2)=(-2,0,-2)$$

$$\overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{MP}=(-2,0,-2)\cdot(1,-4,-1)=$$
$$=-2\times1+0\times(-4)+(-2)\times(-1)=-2+0+2=0$$

$$\overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{MP}=0$$

Então, $\overrightarrow{EO}\perp\overrightarrow{MP}$.

Pág. 170

28.1. $\cos\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}\right)=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\dfrac{(1,-2)\cdot(2,3)}{\sqrt{1^2+(-2)^2}\times\sqrt{2^2+3^2}}=$

$$=\frac{1\times2+(-2)\times3}{\sqrt{5}\times\sqrt{13}}=-\frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}\right)=\cos^{-1}\left(-\frac{4}{\sqrt{65}}\right)\approx119{,}7^{\circ}$$

28.2. $\cos\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}\right)=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\dfrac{(-1,1)\cdot(-3,1)}{\sqrt{(-1)^2+1^2}\times\sqrt{(-3)^2+1^2}}=$

$$=\frac{-1\times(-3)+1\times1}{\sqrt{2}\times\sqrt{10}}=\frac{4}{\sqrt{20}}=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\approx26{,}6^{\circ}$$

28.3. $\cos\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}\right)=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\dfrac{(4,-2)\cdot(2,1)}{\sqrt{4^2+(-2)^2}\times\sqrt{2^2+1^2}}=$

$$=\frac{4\times2+(-2)\times1}{\sqrt{20}\times\sqrt{5}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$$\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\approx53{,}1^{\circ}$$

29.1. $\cos\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}\right)=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=$

$$=\frac{(1,0,1)\cdot(-1,5,1)}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\times\sqrt{(-1)^2+5^2+1^2}}=$$

$$=\frac{1\times(-1)+0\times5+1\times1}{\sqrt{2}\times\sqrt{27}}=\frac{0}{\sqrt{54}}=0$$

$$\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}\right)=\cos^{-1}(0)=\frac{\pi}{2}$$

29.2. $\cos\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}\right)=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=$

$$=\frac{(2,-2,0)\cdot(-2,1,-2)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+0^2}\times\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}}=$$

$$=\frac{2\times(-2)+(-2)\times1+0\times(-2)}{\sqrt{8}\times3}=\frac{-6}{3\times2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}\right)=\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$$

29.3. $\cos\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}\right)=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=$

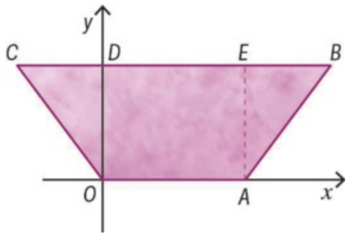
$$=\frac{\left(\sqrt{3},1,0\right)\cdot\left(\sqrt{3},1,2\sqrt{3}\right)}{\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2+0^2}\times\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}+1\times1+0\times2\sqrt{3}}{2\times4}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$$

Pág. 171

30.



30.1.

1.º Processo:

$$\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{BA}=\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EA}\right)=$$
$$=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{EA}=$$
$$=3\times3\times(-1)+0+0+4\times4\times1=7$$

2.º Processo:

$O(0,0)$; $A(5,0)$; $B(8,4)$; $C(-3,4)$

$$\overrightarrow{CO}=O-C=(0,0)-(-3,4)=(3,-4)$$

$$\overrightarrow{BA}=A-B=(5,0)-(8,4)=(-3,-4)$$

$$\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{BA}=(3,-4)\cdot(-3,-4)=3\times(-3)+(-4)\times(-4)=$$
$$=-9+16=7$$

30.2. $\overrightarrow{OA}=A-O=(5,0)$

$$\overrightarrow{CO}=O-C=(-3,4)$$

$$\cos\left(A\hat{O}C\right)=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OC}\right\|}=\frac{(5,0)\cdot(-3,4)}{\sqrt{5^2+0^2}\times\sqrt{(-3)^2+4^2}}=$$

$$=\frac{5\times(-3)+0\times 4}{5\times 5}=-\frac{15}{25}=-\frac{3}{5}$$

$$A\hat{O}C=\cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)\approx 126{,}9^\circ$$

31. $P(0,-4,z),\ z<0$

31.1. $\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AP}\right\|}=\cos\left(\overrightarrow{AB}\hat{\ ,}\overrightarrow{AP}\right)=\cos\left(B\hat{A}P\right)=$

$$=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

31.2. $\overrightarrow{AB}=B-A=(0,-4,0)-(3,0,0)=(-3,-4,0)$

$\overrightarrow{AP}=P-A=(0,-4,z)-(3,0,0)=(-3,-4,z)$

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2+0^2}=5$

$\left\|\overrightarrow{AP}\right\|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2+z^2}=\sqrt{25+z^2}$

$$\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AP}\right\|}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{(-3,-4,0)\cdot(-3,-4,z)}{5\sqrt{25+z^2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{-3\times(-3)+(-4)\times(-4)+0\times z}{5\sqrt{25+z^2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{25}{5\sqrt{25+z^2}}=\frac{1}{2}\underset{5\sqrt{25+z^2}>0}{\Leftrightarrow}\sqrt{25+z^2}=10$$

Como o radicando, bem como os dois membros da equação, são não negativos, elevando os dois ao quadrado, obtém-se:

$25+z^2=10^2\Leftrightarrow z^2=75\Leftrightarrow z=\pm\sqrt{75}$

Como $z<0$, $z=-\sqrt{75}=-5\sqrt{3}$

Pág. 173

32.1. $\vec{r}=(3,1)$, $\vec{s}=(4,-3)$

$$\cos\left(\vec{r}\hat{\ ,}\vec{s}\right)=\frac{\left|\vec{r}\cdot\vec{s}\right|}{\left\|\vec{r}\right\|\times\left\|\vec{s}\right\|}=\frac{\left|(3,1)\cdot(-4,-3)\right|}{\sqrt{3^2+1^2}\times\sqrt{(-4)^2+3^2}}=$$

$$=\frac{\left|3\times 4+1\times(-3)\right|}{\sqrt{10}\times 5}=\frac{9}{5\sqrt{10}}$$

$$\left(\vec{r}\hat{\ ,}\vec{s}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{9}{5\sqrt{10}}\right)\approx 55^\circ$$

32.2. $\vec{r}=(3,1)$, $\vec{t}=(0,1)$

$$\cos\left(\vec{r}\hat{\ ,}\vec{t}\right)=\frac{\left|\vec{r}\cdot\vec{t}\right|}{\left\|\vec{r}\right\|\times\left\|\vec{t}\right\|}=\frac{\left|(3,1)\cdot(0,1)\right|}{\sqrt{3^2+1^2}\times\sqrt{0^2+1^2}}=$$

$$=\frac{\left|3\times 0+1\times 1\right|}{\sqrt{10}\times 1}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\left(\vec{r}\hat{\ ,}\vec{t}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\approx 72^\circ.$$

32.3. $\vec{s}=(-4,3)$, $\vec{t}=(0,1)$

$$\cos\left(\vec{s}\hat{\ ,}\vec{t}\right)=\frac{\left|\vec{s}\cdot\vec{t}\right|}{\left\|\vec{s}\right\|\times\left\|\vec{t}\right\|}=\frac{\left|(4,3)\cdot(0,1)\right|}{\sqrt{4^2+3^2}\times\sqrt{0^2+1^2}}=$$

$$=\frac{\left|-4\times 0+3\times 1\right|}{5\times 1}=\frac{3}{5}$$

$$\left(\vec{s}\hat{\ ,}\vec{t}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\approx 53^\text{o}.$$

33.1. $\vec{r}=(3,1)$, $\vec{s}=(3,a)$

$r\perp s\Leftrightarrow\vec{r}\cdot\vec{s}=0\Leftrightarrow(1,-2)\cdot(3,a)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1\times 3+(-2)\times a=0\Leftrightarrow 3-2a=0\Leftrightarrow 3=2a\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=\frac{3}{2}$

33.2. $m_r=-2$, $m_s=\frac{a}{3}$

$m_r=m_s\Leftrightarrow -2=\frac{a}{3}\Leftrightarrow a=-6$

34.1. $\overrightarrow{OA}=(1,2,2)$

$r^2=\left\|\overrightarrow{OA}\right\|^2=\sqrt{1^2+2^2+2^2}^{\,2}=\sqrt{9}^{\,2}=9$

Equação da superfície esférica:

$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=r^2\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=9$

34.2. $B(0,y,0),\ y>0$

Vetor diretor da reta OB: $(0,1,0)$

$\overrightarrow{OA}=(1,2,2)$

$$\cos\left(\overrightarrow{OA}\hat{\ ,}\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\left|\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right|}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OB}\right\|}=$$

$$=\frac{\left|(1,2,2)\cdot(0,1,0)\right|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\times\sqrt{0^2+1^2+0^2}}=\frac{|2|}{3\times 1}=\frac{2}{3}$$

$$\left(\overrightarrow{OA}\hat{\ ,}\overrightarrow{OB}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\approx 48^\circ$$

Pág. 174

35.1. $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+4\\ y=-x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+1=\frac{1}{2}x+4\\ \_\_\_\_\_\_\_\_\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+2=x+8\\ \_\_\_\_\_\_\_\_\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x=6\\ \_\_\_\_\_\_\_\_\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=-(-2)+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=3\end{cases}$

O ponto de interseção de r e s: $I(-2,3)$

35.2. Sejam a e b as retas perpendiculares a r e s, respetivamente e que passam por I.

$m_a=-2$

$\vec{a}=(1,-2)$

Equação vetorial de a:

$a:(x,\ y)=(-2,\ 3)+k(1,\ -2),\ k\in\mathbb{R}$

Equação reduzida de *a*:

$a: y=-2x+b$ e $I\in a$

$3=-2\times(-2)+b \Leftrightarrow 3-4=b \Leftrightarrow b=-1$

$a: y=-2x-1$

$m_b=1$

$\vec{b}=(1,1)$

Equação vetorial de *b*:

$b:(x,\ y)=(-2,\ 3)+k(1,\ 1),\ k\in\mathbb{R}$

Equação reduzida de *b*:

$b: y=x+b$ e $I\in b$

$3=-2+b \Leftrightarrow b=5$

$b: y=x+5$

36. $m_r=\tan 150^\circ=\tan(180^\circ-30^\circ)=-\tan 30^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Seja *s* a reta perpendicular a *r* e que passa em $P(0,1)$.

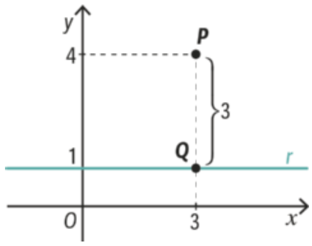
$m_r=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$ e $b=1$

$s: y=\sqrt{3}x+1$

Pág. 175

37.1. Seja *Q* o ponto de interseção da reta *r* com uma reta perpendicular a *r* e que passa por *P*.

$\overline{PQ}=4-1=3$



37.2. $x=3-5 \Leftrightarrow x=-2$

$x=3+5 \Leftrightarrow x=8$

Retas de equações: $x=-2$ e $x=8$

37.3. $2x+y-5=0 \Leftrightarrow y=-2x+5$

Seja *p* uma reta perpendicular a *s* e que passa por *P*.

$m_p=\dfrac{1}{2}$

$p: y=\dfrac{1}{2}x+b$ e $P\in p$

$4=\dfrac{1}{2}\times 3+b \Leftrightarrow 4-\dfrac{3}{2}=b \Leftrightarrow \dfrac{5}{2}=b$

$p: y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

Seja *I* o ponto de interseção de *s* e *p*.

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2} \\ y=-2x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+5=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2} \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x+10=x+5 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x=-5 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2\times 1+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$$

$I(1,3)$

O ponto mais próximo de *s* tem coordenadas $(1,3)$.

37.4. $\overline{IP}=\sqrt{(3-1)^2+(4-3)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

38.1. $2x-9y+22=0 \Leftrightarrow -9y=-2x-22 \Leftrightarrow y=\dfrac{2}{9}x+\dfrac{22}{9}$

$m_r=\dfrac{2}{9}$

$m_p=-\dfrac{9}{2}$

$p: y=-\dfrac{9}{2}x+b$ e $A\in p$

$2=-\dfrac{9}{2}\times(-2)+b \Leftrightarrow 2-9=b \Leftrightarrow 7=b$

$p: y=-\dfrac{9}{2}x-7$

38.2. Seja *t* a reta perpendicular a *s* e que passa por *B*.

$m_s=\dfrac{7}{6}$

$m_t=-\dfrac{6}{7}$

$t: y=-\dfrac{6}{7}x+b$ e $B\in t$

$-3=\dfrac{6}{7}\times 1+b \Leftrightarrow -3+\dfrac{6}{7}=b \Leftrightarrow -\dfrac{15}{7}=b$

$t: y=-\dfrac{6}{7}x-\dfrac{15}{7}$

C é o ponto de interseção das retas *p* e *t*.

$$\begin{cases} y=-\dfrac{9}{2}x-7 \\ y=-\dfrac{6}{7}x-\dfrac{15}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{6}{7}x-\dfrac{15}{7}=-\dfrac{9}{2}x-7 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -12x-30=-63x-98 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 51x=-68 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{68}{51} \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{4}{3} \\ y=-\dfrac{6}{7}\times\left(-\dfrac{4}{3}\right)-\dfrac{15}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ y=-1 \end{cases}$$

$C\left(-\dfrac{4}{3},-1\right)$

Pág. 176

Tarefas de consolidação 3

1. **I.** $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(1,3,-1)\cdot(2,-1,2)=$

$=1\times 2+3\times(-1)+(-1)\times 2=-3<0$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}<0$. Logo, o triângulo é obtusângulo.

II. $\left\|\overrightarrow{BA}\right\|=\sqrt{1^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{11}$

$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$

$\left\|\overrightarrow{BA}\right\| \neq \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$

Sendo ABC um ângulo obtuso para que o triângulo fosse isósceles, teria que $\left\|\overrightarrow{BA}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$.

Logo, o triângulo não é isósceles.

2.1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (-4, 3) - (1, 2) = (-5, 1)$

$m_{AB} = -\frac{1}{5}$

Seja t a reta tangente à circunferência.

$t \perp AB$

$m_t = 5$

$t : y = 5x + b$ e $B \in t$

$t : y = 5x + b$

$3 = 5 \times (-4) + b \Leftrightarrow 23 = b$

$t : y = 5x + 23$

2.2. $r^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \sqrt{(-5)^2 + 1^2}^{\,2} = \sqrt{26}^{\,2} = 26$

Equação da circunferência:

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 26$

$D(x, 7)$, $x > 0$ e D é um ponto da circunferência.

$(x-1)^2 + (7-2)^2 = 26 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 25 = 26 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x - 1 = \pm 1 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 0$

Como $x > 0$, $D(2, 7)$.

$\overrightarrow{AD} = D - A = (2, 7) - (1, 2) = (1, 5)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = (-5, 1) \cdot (1, 5) = -5 \times 1 + 1 \times 5 = -5 + 5 = 0$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$

$D\hat{A}B = \frac{\pi}{2}$

3.1. $B\hat{C}A = 180° - (90° + 30°) = 180° - 120° = 60°$

$C\hat{A}B = 180° - (90° + 60°) = 180° - 150° = 30°$

$m_r = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$r : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ e $A(-12, 0) \in r$

$0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times (-12) + b \Leftrightarrow 4\sqrt{3} = b$

$r : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 4\sqrt{3}$

3.2. $B(3, y)$ e $B \in r$

$y = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 3 + 4\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

$B(3, 5\sqrt{3})$

$s \perp r$

$m_s = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$

$s : y = -\sqrt{3}x + b$ e $B \in s$

$5\sqrt{3} = -\sqrt{3} \times 3 + b \Leftrightarrow 8\sqrt{3} = b$

$s : y = -\sqrt{3}x + 8\sqrt{3}$

$C(x, 0)$ e $C \in s$

$0 = -\sqrt{3}x + 8\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}x = 8\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 8$

$C(8, 0)$

4.1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \cdot \overrightarrow{AC} =$

$= -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - 0 = -\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 =$

$= -1{,}2^2 = -1{,}44$

4.2. $\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{1{,}2}{2} = 0{,}6$

$\alpha = \cos^{-1}(0{,}6) \approx 53°$

4.3. $C(x, 0, 6)$ e C pertence à circunferência trigonométrica.

$x^2 + 0{,}6^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 - 0{,}36 \Leftrightarrow x^2 = 0{,}64 \Leftrightarrow$

$\underset{x<0}{\Leftrightarrow} x = -0{,}8$

$\overrightarrow{OC} = (-0{,}8; 0{,}6)$

$m_{OC} = \frac{0{,}6}{-0{,}8} = -\frac{3}{4}$

Seja β a inclinação da reta OC.

Como $m_{OC} < 0$ e $-\frac{3}{4} = \tan\beta$:

$\beta = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) + 180° \approx 143°$

4.4. $m_{OC} = -\frac{3}{4}$

Seja t a reta tangente à circunferência em C.

$m_t = \frac{4}{3}$

$t : y = \frac{4}{3}x + b$ e $C \in t$

$0{,}6 = \frac{4}{3} \times (-0{,}8) + b \Leftrightarrow \frac{3}{5} + \frac{16}{15} = b \Leftrightarrow b = \frac{5}{3}$

$t : y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$

Bissetriz dos quadrantes pares: $y = -x$

$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x = 4x + 5 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -7x = 5 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{7} \\ y = \frac{5}{7} \end{cases}$

Ponto de interseção: $\left(-\frac{5}{7}, \frac{5}{7}\right)$

Pág. 177

5. $C(3, y),\ y > 0$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 0) - (1, 0) = (1, 0)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (3, y) - (1, 0) = (2, y)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \cos\left(\overrightarrow{AB} \hat{,} \overrightarrow{AC}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1, 0) \cdot (2, y) = 1 \times \sqrt{2^2 + y^2} \times \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 = \sqrt{2^2 + y^2} \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4 = \sqrt{4 + y^2}$

Como o radicando, bem como os dois membros da equação são não negativos, elevando os dois ao quadrado obtém-se,

$16 = 4 + y^2 \Leftrightarrow 12 = y^2 \Leftrightarrow y = \pm 2\sqrt{3}$

Como $y > 0$, $C\left(3, 2\sqrt{3}\right)$.

6.1. Seja $\vec{p}(a, b, c)$ um vetor perpendicular a $\vec{u}$.

$\vec{u} \cdot \vec{p} = 0 \Leftrightarrow (-1, 2, 1) \cdot (a, b, c) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -a + 2b + c = 0 \Leftrightarrow c = a - 2b$

$\vec{p} = (a, b, a - 2b)$

Por exemplo,

Se $a = 0$ e $b = -1$, $\vec{p} = (0, -1, 2)$

Se $a = 1$ e $b = 0$, $\vec{p} = (1, 0, 1)$

Se $a = 2$ e $b = 1$, $\vec{p} = (2, 1, 0)$

Se $(0, -1, 2), (1, 0, 1)$ e $(2, 1, 0)$, por exemplo.

6.2. Seja $\vec{w} = (a, b, c)$.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1, 2, 1) \cdot (a, b, c) = 0 \\ (-3, 1, 0) \cdot (a, b, c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b + c = 0 \\ -3a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2(3a) + c = 0 \\ b = 3a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + 6a + c = 0 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -5a \\ b = 3a \end{cases}$$

$\vec{w} = (a, 3a, -5a)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Por exemplo, se $a = 1$, $\vec{w} = (1, 3, -5)$.

7.1. $B(0, y, 0),\ B \in BE$

$(0, y, 0) = (0, -1, 6) + k(0, -1, 1)$

$$\begin{cases} 0 = 0 + 0 \\ y = -1 - k \\ 0 = 6 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ y = -1 + 6 \\ k = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ y = 5 \\ \_\_\_\_ \end{cases}$$

Logo, a ordenada de B é 5.

7.2. $B(0, 5, 0), E(0, 0, 5), F(0, 0, -5)$

$\overrightarrow{BE} = E - B = (0, 0, 5) - (0, 5, 0) = (0, -5, 5)$

$\overrightarrow{BF} = F - B = (0, 0, -5) - (0, 5, 0) = (0, -5, -5)$

$\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BF} = (0, -5, -5) \cdot (0, 5, 0) =$

$= 0 \times 0 + (-5) \times (-5) + 5 \times (-5) = 25 - 25 = 0$

Como $\overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{BF}$ então, $BE \perp BF$

$\left(\overrightarrow{BE} \hat{,} \overrightarrow{BF}\right) = 90°$.

7.3. $A(5, 0, 0)$

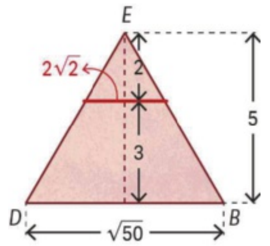
Um vetor perpendicular ao vetor $\overrightarrow{BE}$ e ao vetor $\overrightarrow{BF}$ é, por exemplo, $\vec{e}_1(1, 0, 0)$.

Uma equação da reta pedida é:

$(x, y, z) = (5, 0, 0) + k(1, 0, 0),\ k \in \mathbb{R}$

7.4. O octaedro pode ser decomposto em duas pirâmides cuja base é um quadrado de lado $\sqrt{50}$:

$\overline{AB}^2 = 5^2 + 5^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 50 \underset{\overline{AB} > 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{50}$



O plano $z = 3$ interseta a pirâmide $[ABCDE]$ e decompõe-na num tronco de pirâmide e uma pirâmide com altura 2: $[A'B'C'D'E]$

Pela semelhança de triângulos, tem-se:

$\frac{2}{5} = \frac{b}{\sqrt{50}} \Leftrightarrow b = \frac{2\sqrt{50}}{5} \Leftrightarrow b = 2\sqrt{2}$

$V = V_{[ABCDE]} - V_{[A'B'C'D'E]} =$

$= \frac{1}{3} \times \left(\sqrt{50}\right)^2 \times 5 - \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}\right)^2 \times 2 = 78$

O volume pedido é igual a 78 u. v.

8. $A(3, -4, 0)$ $C(0, 8, 0)$, $I(3, 6, 3)$

$\overrightarrow{IA} = A - I = (3, -4, 0) - (3, 6, 3) = (0, -10, -3)$

$\overrightarrow{IC} = C - I = (0, 8, 0) - (3, 6, 3) = (-3, 2, -3)$

$$\cos\alpha = \cos\left(\overrightarrow{IA} \hat{,} \overrightarrow{IC}\right) = \frac{\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}}{\|\overrightarrow{IA}\| \cdot \|\overrightarrow{IC}\|} =$$

$$= \frac{(0, -10, -3) \cdot (-3, 2, -3)}{\sqrt{0^2 + (-10)^2 + (-3)^2} \times \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-3)^2}} =$$

$$= \frac{0 \times (-3) + (-10) \times 2 + (-3) \times (-3)}{\sqrt{109} \times \sqrt{22}} = -\frac{11}{\sqrt{2398}}$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\left(-\frac{11}{\sqrt{2398}}\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\alpha = \frac{2398}{121} - 1 \Leftrightarrow \tan^2\alpha = \frac{2277}{121} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\alpha = \frac{207}{11}$$

9. **1.º Processo:**

$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EG}=\left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}\right)=$

$=\left(2\overrightarrow{HF}+2\overrightarrow{FJ}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{HF}+2\overrightarrow{FI}\right)=$

$=\left(2\left(\overrightarrow{HF}+\overrightarrow{FJ}\right)\right)\cdot\left(2\left(\overrightarrow{HF}+\overrightarrow{FI}\right)\right)=$

$=\left(2\overrightarrow{HJ}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{HI}\right)=4\overrightarrow{HJ}\cdot\overrightarrow{HI}$

$\dfrac{\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EG}}{\overrightarrow{HJ}\cdot\overrightarrow{HI}}=\dfrac{4\overrightarrow{HJ}\cdot\overrightarrow{HI}}{\overrightarrow{HJ}\cdot\overrightarrow{HI}}=4$

2.º Processo:

Seja a o comprimento da aresta do cubo

$B(a, a, 0)$; $E(a, 0, a)$; $G(0, a, a)$; $H\left(a, \frac{1}{2}a, a\right)$;

$I\left(\frac{1}{2}a, a, a\right)$; $J\left(a, a, \frac{1}{2}a\right)$

$\overrightarrow{EB}=B-E=(a, a, 0)-(a, 0, a)=(0, a, -a)$

$\overrightarrow{EG}=G-E=(0, a, a)-(a, 0, a)=(-a, a, 0)$

$\overrightarrow{HJ}=J-H=\left(a, a, \frac{1}{2}a\right)-\left(a, \frac{1}{2}a, a\right)=\left(0, \frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}a\right)$

$\overrightarrow{HI}=I-H=\left(\frac{1}{2}a, a, a\right)-\left(a, \frac{1}{2}a, a\right)=\left(-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, 0\right)$

$\dfrac{\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EG}}{\overrightarrow{HJ}\cdot\overrightarrow{HI}}=\dfrac{(0, a, -a)\cdot(-a, a, 0)}{\left(0, \frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}a\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, 0\right)}=$

$=\dfrac{0\times(-a)+a\times a-a\times 0}{0\times\left(-\frac{1}{2}a\right)+\frac{1}{2}a\times\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\times a\times 0}=\dfrac{\cancel{a^2}}{\frac{1}{4}\cancel{a^2}}=4$

Pág. 179

Avaliação formativa 3

1. $\overrightarrow{AB}=B-A=(2, k-1, -2k)-(1, 0, 1)=$

$=(1, k-1, -2k-1)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(k+1, 1, 4)-(1, 0, 1)=(k, 1, 3)$

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow(1, k-1, -2k-1)\cdot(k, 1, 3)=0$

$\Leftrightarrow 1\times k+(k-1)\times 1+(-2k-1)\times 3=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k+k-1-6k-3=0\Leftrightarrow -4k=4\Leftrightarrow k=-1$

Opção **(D)**

2.1. $r: 2y-x+2=0\Leftrightarrow 2y=x-2\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-1$

$m_r=\frac{1}{2}$ e $s\perp r$

$m_s=-2$. Logo, não pode ser **a)**.

$P(3, 3)\in s$, substituindo em **b)**:

$3+2\times 3-9=0\Leftrightarrow 0=0$ (Verdadeiro)

I – b)

2.2. A projeção ortogonal de P sobre r é o ponto de interseção das retas r e s.

$\begin{cases}2y-x+2=0\\ y+2x-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y+2=x\\ y+2(2y+2)-9=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-\\ y+4y+4-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\\ 5y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\times 1+2\\ y=1\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=1\end{cases}$

$(4, 1)$

II – c)

3. Seja $\vec{v}=(v_1, v_2)$

$\vec{u}\perp\vec{v}$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow(-1, 3)\cdot(v_1, v_2)=0\Leftrightarrow -v_1+3v_2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v_1=3v_2$

$\vec{v}=(3v_2, v_2)$

$\|\vec{v}\|=5\sqrt{10}\Leftrightarrow\sqrt{(3v_2)^2+{v_2}^2}=5\sqrt{10}$

Como o radicando, bem como os dois membros da equação, são não negativos, elevando os dois ao quadrado, obtém-se:

$9{v_2}^2+{v_2}^2=25\times 10\Leftrightarrow 10{v_2}^2=250\Leftrightarrow{v_2}^2=25\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v_2=\pm 5$

$\vec{v}=(3\times 5, 5)=(15, 5)$

Ou

$\vec{v}=(3\times(-5), -5)=(-15, -5)$

$\vec{v}=(15, 5)$ ou $\vec{v}=(-15, -5)$

4.1. $B=(0, y_B, z_B)$

$(0, y_B, z_B)=(2, 0, 7)+k(1, -1, 2)$

$\begin{cases}0=2+k\\ y_B=-k\\ z_B=7+2k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-2\\ y_B=2\\ z_B=7-4=3\end{cases}$

$B(0, 2, 3)$

$A(0, y_A, 1)$ e $y_A=y_B$

$A(0, 2, 1)$

4.2. $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DE}=0$, porque $\overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{DE}$.

4.3. $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=12\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}\right)=12\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{ED}=12\Leftrightarrow$

$\underset{\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BE},\ \overrightarrow{ED}=-\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BE}\perp\overrightarrow{ED}}{\Leftrightarrow}0-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\left\|\overrightarrow{BE}\right\|^2+0=12\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{BE}\right\|^2=12\Leftrightarrow-(3-1)^2+\left\|\overrightarrow{BE}\right\|^2=12\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left\|\overrightarrow{BE}\right\|^2=16\underset{\left\|\overrightarrow{BE}\right\|>0}{\Leftrightarrow}\left\|\overrightarrow{BE}\right\|=4$

$\overline{AE}^2=\overline{BE}^2+\overline{AB}^2\Leftrightarrow\overline{AE}^2=16+4\underset{\left(\overline{AE}>0\right)}{\Leftrightarrow}\overline{AE}=\sqrt{20}=$

$=2\sqrt{5}$

$$\cos\left(\overrightarrow{AE} \hat{,} \overrightarrow{BD}\right)=\frac{\left|\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}\right|}{\left\|\overrightarrow{AE}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BD}\right\|}\underset{\left\|\overrightarrow{BD}\right\|=\left\|\overrightarrow{AE}\right\|}{=}\frac{12}{\left\|\overrightarrow{AE}\right\|^2}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

$$\left(\overrightarrow{AE} \hat{,} \overrightarrow{BD}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\approx 53°$$

4.4. $B(0, 2, 3)$; $C(2, 2, 3)$; $D(0, 6, 1)$

$\overrightarrow{BC}=C-B=(2, 2, 3)-(0, 2, 3)=(2, 0, 0)$

$\overrightarrow{CD}=D-C=(0, 6, 1)-(2, 2, 3)=(-2, 4, -2)$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\times\left\|\overrightarrow{CD}\right\|}=\frac{(2, 0, 0)\cdot(-2, 4, -2)}{2\times\sqrt{(-2)^2+4^2+(-2)^2}}=$$

$$=\frac{2\times(-2)+0\times4+0\times(-2)}{2\times\sqrt{24}}=-\frac{2}{\sqrt{24}}=-\frac{2}{2\sqrt{6}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}\Leftrightarrow 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\frac{1}{6}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\theta=6-1\Leftrightarrow \tan^2\theta=5$$

4.5. $A_{[ABC]}=\frac{2\times2}{2}=2$ u. a.; $V_{[ABCF]}=\frac{1}{3}\times2\times4=\frac{8}{3}$ u. v.

4. Equações cartesianas de planos no espaço

Pág. 180

Tarefa 5

1. Bastam três pontos não colineares para definir um plano.
2. Se os três pontos de contacto com o solo forem colineares não definem um plano. Desta forma, não se garante a estabilidade do objeto que suportam.

Pág. 181

39.1. Seja $Q(x, y, z)$, um ponto do plano α.

$\overrightarrow{PQ}=Q-P\Leftrightarrow(x, y, z)-(3, -2, 1)=$

$=(x-3, y+2, z-1)$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}=0\Leftrightarrow(x-3, y+2, z-1)\cdot(2, 0, -1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x-3)+0\times(y+2)-1(z-1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-6+0-z+1=0\Leftrightarrow 2x-z-5=0$

39.2. $2\times1-(-3)-5=0\Leftrightarrow 0=0$ (verdadeira)

Logo, $A\in\alpha$ e $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$.

39.3. $2k-\left(-5-k^2\right)-5=0\Leftrightarrow 2k+\cancel{5}+k^2-\cancel{5}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2+2k=0\Leftrightarrow k(k+2)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=0\vee k+2=0\Leftrightarrow k=0\vee k=-2$

Como $k\in\mathbb{R}^-$, $k=-2$.

39.4. Seja I o ponto de interseção

$I(2, -3, z)$ e $I\in\alpha$

$2\times2-z-5=0\Leftrightarrow -1=z$

$I(2, -3, -1)$

40.1. Seja $Q(x, y, z)$, um ponto do plano ABC.

$\overrightarrow{AE}\perp ABC$ e $A\in ABC$

$\overrightarrow{AE}=E-A=(4, -5, 2)-(3, -3, 2)=(1, -2, 0)$

$\overrightarrow{AQ}=Q-A=(x, y, z)-(3, -3, 2)=(x-3, y+3, z-2)$

$\Leftrightarrow 1(x-3)-2(y+3)+0(z-2)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-3-2y-6=0\Leftrightarrow x-2y-9=0$

40.2. $\overrightarrow{AE}$ é um vetor diretor da reta FB e $P\in FB$.

Ponto genérico de FB:

$\left(1+k, -\frac{13}{2}-2k, 0\right)$

B é o ponto de interseção de FB com ABC.

$1+k-2\left(-\frac{13}{2}-2k\right)-9=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+k+13+4k-9=0\Leftrightarrow 5k=-5\Leftrightarrow k=-1$

$B\left(1-1, -\frac{13}{2}-2(-1), 0\right)=\left(0, -\frac{9}{2}, 0\right)$

Pág. 182

41.1. $\vec{n}=(1, 2, 3)$; $A(1, 2, 3)$

$\alpha: x+2y+3z+d=0$ e $A\in\alpha$

$1+2\times2+3\times3+d=0\Leftrightarrow d=-14$

$\alpha: x+2y+3z-14=0$

41.2. $\vec{n}=(-2, 3, 0)$; $A(0, -1, 2)$

$\alpha: -2x+3y+d=0$ e $A\in\alpha$

$-2\times0+3\times(-1)+d=0\Leftrightarrow d=3$

$\alpha: -2x+3y+3=0$

41.3. $\vec{n}=(3, -1, 2)$, $A(4, -3, 1)$

$\alpha: 3x-y+2z+d=0$ e $A\in\alpha$

$3\times4-(-3)+2\times1+d=0\Leftrightarrow d=-17$

$\alpha: 3x-y+2z-17=0$

41.4. $\vec{n}=(-1, 2, 1)$; $A(0, 0, 0)$

$\alpha: -x+2y+z+d=0$ e $A\in\alpha$

$-0+2\times0+0+d=0\Leftrightarrow d=0$

$\alpha: -x+2y+z=0$

42.1. Por exemplo, $\vec{n}_1=(1, -1, 2)$ e

$\vec{n}_2=-2(1, -1, 2)=(-2, 2, -4)$

42.2. Se $y=0$ e $z=0$, $x-0+2\times0+1=0\Leftrightarrow x=-1$

Se $x=0$ e $z=0$, $0-y+2\times0+1=0\Leftrightarrow y=1$

$P_1(-1, 0, 0)$ e $P_2(0, 1, 0)$, por exemplo.

Pág. 183

43.1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 0, 2) - (-1, 1, 1) = (4, -1, 1)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (-3, 2, -2) - (-1, 1, 1) = (-2, 1, -3)$

$\frac{4}{-2} \neq \frac{-1}{1}$

Logo, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são colineares, pelo que os pontos *A*, *B* e *C* não são colineares.

43.2. Seja $\vec{n} = (a, b, c)$ um vetor normal a *ABC*.

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (4, -1, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2, 1, -3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a - b + c = 0 \\ -2a + b - 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = b - 4a \\ -2a + b - 3b + 12a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ 10a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ 5a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 5a - 4a \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ b = 5a \end{cases}$$

$\vec{n} = (a, 5a, a),\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se $a = 1$, por exemplo, $\vec{n} = (1, 5, 1)$.

$ABC : x + 5y + z + d = 0$ e $A \in ABC$

$-1 + 5 \times 1 + 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -5$

$ABC : x + 5y + z - 5 = 0$

44.1. a) *ABF* é um plano paralelo a *yOz* e passa por $A(1, 0, 0)$. $\quad ABF : x = 1$

b) $E(1, 0, 1); B(1, 1, 0); G(0, 1, 1)$

$\overrightarrow{EB} = B - E = (1, 1, 0) - (1, 0, 1) = (0, 1, -1)$

$\overrightarrow{EG} = G - E = (0, 1, 1) - (1, 0, 1) = (-1, 1, 0)$

Seja $\vec{n} = (a, b, c)$ um vetor normal a *EBG*.

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{EB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{EG} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, 1, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, 1, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\vec{n} = (b, b, b),\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se $b = 1$, por exemplo, $\vec{n} = (1, 1, 1)$.

$EBG : x + y + z + d = 0$ e $E \in EBG$

$1 + 0 + 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$

$EBG : x + y + z - 2 = 0$

c) $\overrightarrow{EG}$ é perpendicular ao plano mediador de $[EG]$ (α).

Seja *M* o ponto médio de $[EG]$.

$$M\left(\frac{1+0}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$\alpha : -x + y + d = 0$ e $M \in \alpha$

$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$

$\alpha : -x + y = 0$

44.2. $OAF : y - z + d = 0$ e $A \in OAF$

$0 - 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$

$OAF : y - z = 0$

$(x, y, z) = (1, 0, -1) + k(2, 1, -3),\ k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = k(1 + 2, k, -1 - 3k),\ k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow k - (-1 - 3k) = 0 \Leftrightarrow k + 1 + 3k = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4k = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$

Ponto de interseção:

$$\left(1 + 2\left(-\frac{1}{4}\right), -\frac{1}{4}, -1 - 3\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$

Pág. 184

Tarefas de consolidação 4

1.1. a) *r* e *s* não são paralelas, porque os seus vetores diretores $\vec{r}(-1, 2, -3)$ e $\vec{s}(1, 0, 1)$ não são colineares.

$(-1, 4, -2) = (1, 0, 4) + k(-1, 2, -3)$

$$\begin{cases} -1 = 1 - k \\ 4 = 2k \\ -2 = 4 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -1 \\ k = 2 \\ -2 = -2 \end{cases}$$

Logo, $A \in r$.

$(-1, 4, -2) = (-1, 4, -2) + k(1, 0, 1)$

$$\begin{cases} -1 = -1 + k \\ 4 = 4 + 0k \\ -2 = -2 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = k \\ 4 = 4 \\ 0 = k \end{cases}$$

Logo, $A \in s$.

Como *r* e *s* não são paralelas $A \in r$ e $A \in s$, as retas são concorrentes no ponto *A*.

b) $\frac{-1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{-1} = \frac{-3}{\frac{3}{2}} = -2$

Os vetores diretores das duas retas ($\vec{r}$ e $\vec{t}$) são colineares. Então as retas *r* e *t* ou são estritamente paralelas ou são coincidentes.

$(-1, 4, 0) \in t$

$(-1, 4, 0) = (1, 0, 4) + k(-1, 2, -3)$

$$\begin{cases} -1 = 1 - k \\ 4 = 2k \\ 0 = 4 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ 2 = k \\ k = \frac{4}{3} \end{cases} \qquad \text{Sistema impossível.}$$

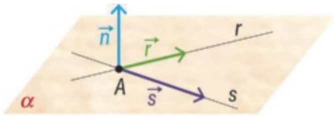
$(-1, 4, 0) \in t$ e $(-1, 4, 0) \notin r$

Logo, as retas não são coincidentes, são estritamente paralelas.

1.2. a) Seja

$\vec{n} = (a, b, c)$

um vetor normal ao plano α.



$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 2, -3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, 0, 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b - 3c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b - 3(-a) = 0 \\ c = -a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -2b \\ c = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = -a \end{cases}$$

$\vec{n}(a, -a, -a),\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se $a = 1$, por exemplo, $\vec{n}(1, -1, -1)$.

$\alpha : x - y - z + d = 0$ e $A(-1, 4, -2) \in \alpha$

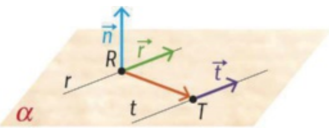
$-1 - 4 - (-2) + d = 0 \Leftrightarrow d = 3$

$\alpha : x - y - z + 3 = 0$

b) Seja:

$R(1, 0, 4) \in r$

$T(-1, 4, 0) \in T$



$\overrightarrow{RT} = T - R =$

$= (-1, 4, 0) - (1, 0, 4) = (-2, 4, -4)$

Seja $\vec{n} = (a, b, c)$ um vetor normal ao plano α.

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{RT} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-2, 4, -4) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, 2, -3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 4b - 4c = 0 \\ -a + 2b - 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b - 2c = 0 \\ 2b - 3c = a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(2b - 3c) + 2b - 2c = 0 \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{-2b} + 3c + \cancel{2b} - 2c = 0 \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = 2b \end{cases}$$

$\vec{n}(2b, b, 0),\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se $b = 1$, por exemplo, $\vec{n}(2, 1, 0)$.

$\alpha : 2x + y + d = 0$ e $R \in \alpha$

$2 \times 1 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$

$\alpha : 2x + y - 2 = 0$

2.1. $(3, 3, 0) = (2, 3, 0) + k(1, 2, -1)$

$$\begin{cases} 3 = 2 + k \\ 3 = 3 + 2k \\ 0 = 0 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = k \\ 0 = 2k \\ k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 0 \\ k = 0 \end{cases}$$

Sistema impossível.

Logo, $A \notin r$.

2.2. $R(2, 3, 0) \in r$

$\overrightarrow{RA} = A - R = (3, 3, 0) - (2, 3, 0) = (1, 0, 0)$

Seja $\vec{n} = (a, b, c)$ um vetor normal ao plano α.

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{RA} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 0, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, 2, -1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a + 2b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 2b \end{cases}$$

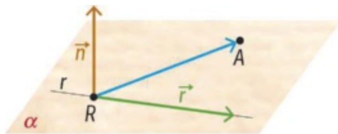
$\vec{n}(0, b, 2b),\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se $b = 1$, por exemplo, $\vec{n}(0, 1, 2)$.

$\alpha : y + 2z + d = 0$ e $A \in \alpha$

$3 + 2 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$

$\alpha : y + 2z - 3 = 0$



3.1. $\overline{BA} \perp AEH$

$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$

$\overrightarrow{AP} = P - A = (c, c - 1, 2c) - (-3, 4, 3) =$

$= (c + 3, c - 5, 2c - 3)$

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \Leftrightarrow (-2, 6, 3) \cdot (c + 3, c - 5, 2c - 3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2(c + 3) + 6(c - 5) + 3(2c - 3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2c - 6 + 6c - 30 + 6c - 9 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10c = 45 \Leftrightarrow c = \dfrac{45}{10} \Leftrightarrow c = \dfrac{9}{2}$

3.2. $B = A + \overrightarrow{AB} = A - \overrightarrow{BA} = (-3, 4, 3) - (-2, 6, 3) =$

$= (-1, -2, 0)$

$\overline{BA} \perp CGF$

$CGF : -2x + 6y + 3z + d = 0$ e $B \in CGF$

$-2 \times (-1) + 6 \times (-2) + 3 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 10$

$CGF : -2x + 6y + 3z + 10 = 0$

3.3. *F* é o ponto de interseção da reta *r* com o plano *CGF*

Ponto genérico da reta *r*:

$(x, y, z) = (k, 0, -2 + k),\ k \in \mathbb{R}$

$-2k + 6 \times 0 + 3(-2 + k) + 10 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2k - 6 + 3k + 10 = 0 \Leftrightarrow k = -4$

$F(-4, 0, -2 - 4) = (-4, 0, -6)$

4. **I.** Ponto genérico de *r*:

$(x, y, z) = (-1 - 3k, k, 3 + 2k),\ k \in \mathbb{R}$

$-1 - 3k + 2k - (3 + 2k) + 3 = 0 \Leftrightarrow -1 = 3k \Leftrightarrow k = -\dfrac{1}{3}$

Ponto de interseção de *r* e α:

$$\left(-1 - 3\left(-\frac{1}{3}\right), -\frac{1}{3}, 3 + 2\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \left(0, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

Logo, *P* não é o ponto de interseção de α e r.

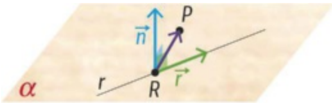
II. $\left(0, -\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right) = (-1, 0, 3) + k(-3, 1, 2)$

$$\begin{cases} 0 = -1 - 3k \\ -\frac{1}{3} = 0 + k \\ \frac{11}{3} = 3 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k = -1 \\ k = -\frac{1}{3} \\ 2k = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{3} \\ k = -\frac{1}{3} \\ k = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Sistema impossível.

$P \notin r$

$R(-1, 0, 3) \in r$



$\overrightarrow{RP} = P - R =$

$= \left(0, -\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right) - (-1, 0, 3) = \left(1, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Seja $\vec{n} = (a, b, c)$ um vetor normal ao plano definido por r e P.

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{RP} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-3, 1, 2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot \left(1, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a + b + 2c = 0 \\ a - \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a - 2c \\ a - \frac{1}{3}(3a - 2c) + \frac{2}{3}c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ a - a + \frac{2}{3}c + \frac{2}{3}c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a \\ c = 0 \end{cases}$$

$\vec{n}(a, 3a, 0)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se $a = 1$, por exemplo, $\vec{n}(1, 3, 0)$.

Seja β o plano definido por r e P.

$\beta : x + 3y + d = 0$ e $P \in \beta$.

$0 + \cancel{3} \times \left(-\frac{1}{\cancel{3}}\right) + d = 0 \Leftrightarrow d = 1$

$\beta : x + 3y + 1 = 0$

Pág. 185

5.1. Seja α o plano que contém a base do cone.

$\overrightarrow{CV} \perp \alpha$

$\alpha : 2x - 3y + 4z + d = 0$ e $A \in \alpha$

$2 \times 2 - 3(-1) + d = 0 \Leftrightarrow d = 1$

$\alpha : 2x - 3y + 4z + 1 = 0$

5.2. $C = V + \overrightarrow{VC} = V - \overrightarrow{CV} = (0, -4, -4) - (2, -3, 4) =$

$= (-2, -1, -8)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (-2, -1, -8) - (2, -1, -2) = (-4, 0, -6)$

$B = C + \overrightarrow{AC} = (-2, -1, -8) + (-4, 0, -6) =$

$= (-6, -1, -14)$

5.3. raio: $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + (-6)^2} = \sqrt{52}$

$A_{base} = \pi r^2 = 52\pi$ u. a.

6.1. $A(x, 0, 0)$ e $A \in AC$

$(x, 0, 0) = (-3, 0, 4) + k(-3, 0, 2)$

$$\begin{cases} x = -3 - 3k \\ 0 = 0 \\ 0 = 4 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 6 \\ \underline{\qquad\qquad} \\ -2 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \underline{\qquad} \\ k = -2 \end{cases}$$

$A(3, 0, 0)$

$B(0, 2 \times 3, 0) = (0, 6, 0)$

$C(0, 0, z)$ e $C \in AC$

$(0, 0, z) = (-3, 0, 4) + k(-3, 0, 2)$

$$\begin{cases} 0 = -3 - 3k \\ 0 = 0 \\ z = 4 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k = -3 \\ \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ \underline{\qquad} \\ z = 2 \end{cases}$$

$C(0, 0, 2)$

$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{3 \times 6}{2} = 9$ u. a.

$V_{[OABC]} = \frac{1}{3} \times A_{[OAB]} \times \overline{OC} = \frac{1}{3} \times 9 \times 2 = 6$ u. v.

6.2. $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 6, 0) - (3, 0, 0) = (-3, 6, 0)$

Seja $\vec{n} = (a, b, c)$ um vetor normal ao plano definido por ABC.

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-3, 6, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-3, 0, 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 6b = 0 \\ -3a + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6b = 3a \\ 2c = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2}a \\ c = \frac{3}{2}a \end{cases}$$

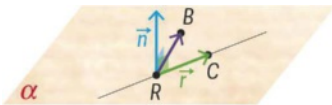
$\vec{n} = \left(a, \frac{1}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se $a = 2$, por exemplo, $\vec{n}(2, 1, 3)$.

$ABC : 2x + y + 3z + d = 0$ e $A \in ABC$

$2 \times 3 + 0 + 3 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -6$

$ABC : 2x + y + 3z - 6 = 0$



7.1. $C = D + \overrightarrow{AB} = (6, 7, 12) + (-3, 6, -2) = (3, 13, 10)$

Cálculos auxiliares:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 7, -2) - (2, 1, 0) = (-3, 6, -2)$

7.2. $\overrightarrow{AD} = D - A = (6, 7, 12) - (2, 1, 0) = (4, 6, 12)$

$ABF : 4x + 6y + 12z + d = 0$ e $A \in ABF$

$4 \times 2 + 6 \times 1 + 12 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -14$

$ABF : 4x + 6y + 12z - 14 = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y + 6z - 7 = 0$

$GF \;//\; AD$

$GF : (x, y, z) = (-11, -1, -11) + k(4, 6, 12), k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (-11 + 4k, -1 + 6k, -11 + 12k), k \in \mathbb{R}$

F é o ponto de interseção de GF com ABF.

$2(-11+4k)+3(-1+6k)+6(-11+12k)-7=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -22+8k-3+18k-66+72k-7=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 98k=98 \Leftrightarrow k=1$

$F(-11+4\times 1, -1+6\times 1, -11+12\times 1)=F(-7, 5, 1)$

Seja M o ponto médio de $[AF]$.

$M\left(\frac{2-7}{2}, \frac{1+5}{2}, \frac{0+1}{2}\right)=\left(-\frac{5}{2}, 3, \frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{AF}=F-A=(-7, 5, 1)-(2, 1, 0)=(-9, 4, 1)$

Seja α o plano mediador de $[AF]$.

$\alpha: -9x+4y+z+d=0$ e $M\in\alpha$

$-9\times\left(-\frac{5}{2}\right)+4\times 3+\frac{1}{2}+d=0 \Leftrightarrow d=-35$

$\alpha: -9x+4y+z-35=0$

7.3. $\overrightarrow{BF}=F-B=(-7, 5, 1)-(-1, 7, -2)=(-6, -2, 3)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BF}=(-3, 6, -2)\cdot(-6, -2, 3)=$

$=(-3)\times(-6)+6\times(-2)+(-2)\times 3=0$

$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-3)^2+6^2+(-2)^2}=\sqrt{49}=7$

$\|\overrightarrow{BF}\|=\sqrt{(-6)^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{49}=7$

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BF}, \|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{BF}\|, \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AE}$

Logo, $[ABFE]$ é um quadrado.

7.4. $\|\overrightarrow{AD}\|=\sqrt{4^2+6^2+12^2}=\sqrt{196}=14$

$V_{[ABCDEF]}=7\times 7\times 14=686$ u. v.

7.5. Seja N o ponto médio de $[FG]$.

$N=F+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=(-7, 5, 1)+\frac{1}{2}(4, 6, 12)=$

$=(-7+2, 5+3, 1+6)=(-5, 8, 7)$

7.6. $H=D+\overrightarrow{BF}=(6, 7, 12)+(-6, -2, 3)=(0, 5, 15)$

$\overrightarrow{CH}=H-C=(0, 5, 15)-(3, 13, 10)=(-3, -8, 5)$

$\|\overrightarrow{CH}\|=\sqrt{(-3)^2+(-8)^2+5^2}=\sqrt{98}$

Equação da superfície esférica:

$(x-0)^2+(y-5)^2+(z-15)^2=\sqrt{98}^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+(y-5)^2+(z-15)^2=98$

Pág. 187

Avaliação formativa 4

1.1. $(4, -2, 6)=2(2, -1, 3)$

O vetor $(4, -2, 6)$ é colinear com o vetor $(2, -1, 3)$.

I – b)

1.2. $(0, y, 0)$

$2\times 0-y+3\times 0+2=0 \Leftrightarrow z=2$

II – b)

1.3. $(x, y, z)=(1, -2, -5)+k(1, 5, 4), k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x, y, z)=(1+k, -2+5k, -5+4k), k\in\mathbb{R}$

$\alpha: 2x-y+3z+2=0$

$2(1+k)-(-2+5k)+3(-5+4k)+2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2+2k+2-5k-15+12k+2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9k=9 \Leftrightarrow k=1$

Ponto de interseção:

$(1+1, -2+5\times 1, -5+4\times 1)=(2, 3, -1)$

III – c)

2.1. **a)** $B=A+\overrightarrow{OC}=(-2, 1, -2)+(-2, -2, 1)=$

$=(-4, -1, -1)$

$E=A+\overrightarrow{OD}=(-2, 1, -2)+(-1, 2, 2)=(-3, 3, 0)$

$F=E+\overrightarrow{OC}=(-3, 3, 0)+(-2, -2, 1)=(-5, 1, 1)$

$G=C+\overrightarrow{OD}=(-2, -2, 1)+(-1, 2, 2)=(-3, 0, 3)$

b) $\|\overrightarrow{OC}\|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{9}=3$

$\|\overrightarrow{OE}\|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+0^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$A_{[OCFE]}=\overline{OC}\times\overline{OE}=3\times 3\sqrt{2}=9\sqrt{2}$ u. a.

2.2. **a)** $\overrightarrow{CD}=D-C=(-1, 2, 2)-(-2, -2, 1)=(1, 4, 1)$

$CD: (x, y, z)=(-2, -2, 1)+k(1, 4, 1), \; k\in\mathbb{R}$

b) $\overrightarrow{DA}\perp COD$

$COD: -2x+y-2z+d=0$ e $O\in COD$

$-2\times 0+0-2\times 0+d=0 \Leftrightarrow d=0$

$COD: -2x+y-2z=0 \Leftrightarrow 2x-y+2z=0$

3.1. $F(x, y, 0)$ e $F\in VF$.

$(x, y, 0)=(0, 0, 3)+k(4, 4, -3)$

$\begin{cases} x=0+4k \\ y=0+4k \\ 0=3-3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4k \\ y=4k \\ 3k=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=4 \\ k=1 \end{cases}$

$F(4, 4, 0)$

$V(0, 0, z)$ e $V\in VF$

$V(0, 0, 3)$

$V_{[ABCDGOEFV]}=V_{[ABCDGOEF]}+V_{[OEFGV]}$

$48=4\times 4\times\overline{FC}+\frac{1}{3}\times 4\times 4\times 3 \Leftrightarrow 48-16=16\overline{FC} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{FC}=2$

$C(4, 4, -2)$

3.2. $B(4, 0, -2)$, $D(0, 4, -2)$ e $F(4, 4, 0)$

$\overrightarrow{BD}=D-B=(0, 4, -2)-(4, 0, -2)=(-4, 4, 0)$

$\overrightarrow{BF}=F-B=(4, 4, 0)-(4, 0, -2)=(0, 4, -2)$

Seja $\vec{n}=(a, b, c)$ um vetor normal ao plano definido por BDF.

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a,\,b,\,c)\cdot(-4,\,4,\,0)=0 \\ (a,\,b,\,c)\cdot(0,\,4,\,2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4a+4b=0 \\ 4b+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ c=-2b \end{cases}$$

$\vec{n}=(b,\,b,\,-2b),\ b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Se $b=1$, por exemplo, $\vec{n}(1,1,-2)$.

$BDF: x+y-2z+d=0$ e $A\in ABC$

$4+0-2\times(-2)+d=0 \Leftrightarrow d=-8$

$BDF: x+y-2z-8=0$

Opção **(D)**

5. Posição relativa de retas e planos

Pág. 188

Tarefa 6

1.1. $\vec{n}_\alpha=(1,\,2,\,-1)$

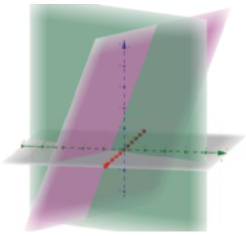
$\vec{n}_\beta=(-2,\,1,\,0)$

$\vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\beta=(1,\,2,\,-1)\cdot(-2,\,1,\,0)=1\times(-2)+2\times1+(-1)\times0=$

$=-2+2+0=0$

1.2. α e β são perpendiculares.

1.3. Perpendiculares.



2.1. $\alpha: x+2y-z+1=0$

$2+2\times1-5+1=0 \Leftrightarrow 0=0$

(Proposição verdadeira)

$P\in\alpha$

$\beta: 2x+4y-2z-3=0$

$2\times2+4\times1-2\times5-3=0 \Leftrightarrow -5=0$

(Proposição falsa)

$P\notin\beta$

2.2. $\vec{n}_\alpha=(1,\,2,\,-1)$; $\vec{n}_\beta=(2,\,4,\,-2)$

$\dfrac{2}{1}=\dfrac{4}{2}=\dfrac{-2}{-1}=2$

$\vec{n}_\beta=2\vec{n}_\alpha$

2.3. Estritamente paralelos.

2.4. Estritamente paralelos.

3.1. Por exemplo: $\vec{n}_\alpha=(1,2,-1)$ e $\vec{n}_\beta=(-2,-4,2)$

$FB: (x,\,y,\,z)=\left(1,\,-\dfrac{13}{2},\,0\right)+k(1,\,-2,\,0),\ k\in\mathbb{R}$

$=\cancel{4}\times\left\|\overrightarrow{AP}\right\|\times\dfrac{\left\|\overrightarrow{AP}\right\|}{\cancel{4}}=\left\|\overrightarrow{AP}\right\|^2$

Os vetores $\overrightarrow{n_\alpha}$ e $\overrightarrow{n_\beta}$ são normais aos planos α e β, respetivamente, porque $\overrightarrow{n_\beta}=-2\overrightarrow{n_\alpha}$

3.2. Não. Os planos são paralelos, mas podem ser estritamente paralelos ou coincidentes.

3.3. Os planos são coincidentes.

4.1. Por exemplo:

$\overrightarrow{n_\alpha}=(1,2,-1)$ e $\overrightarrow{n_\beta}=(2,-1,-1)$

$\overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{n_\beta}=(1,2,-1)\cdot(2,-1,-1)=2-2+1=1\neq0$, pelo que os vetores não são perpendiculares.

$\dfrac{2}{1}\neq\dfrac{-1}{2}$, pelo que os vetores não são colineares.

4.2. Os planos α e β são oblíquos.

4.3. Os planos α e β são oblíquos.

Pág. 189

45.1. A equação do plano é da forma $x-y+z+d=0$, $d\in\mathbb{R}$.

Como $P(4,\,2,\,3)$ é um ponto do plano, vem:

$4-2+3+d=0 \Leftrightarrow d=5$

Uma equação do plano é $x-y+z-5=0$.

45.2. $\vec{n}_\alpha\perp\vec{n}_\beta \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\beta=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1,\,-1,\,1)\cdot(k^2+1,\,2k,\,k-7)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1(k^2+1)-1\times2k+1(k-7)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2+1-2k+k-7=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2-k-6=0 \Leftrightarrow k=-2 \vee k=3$

Os planos α e β são perpendiculares se $k\in\{-2,3\}$.

46. $\vec{n}_\beta=-2\vec{n}_\alpha$

Os planos α e β são paralelos (coincidentes ou estritamente paralelos).

$\vec{n}_\gamma\cdot\vec{n}_\alpha=(2,\,1,\,0)\cdot(-1,\,2,\,4)=-2+2+0=0$

O plano γ é perpendicular ao plano α e ao plano β.

Pág. 190

Tarefa 7

1.1. Por exemplo $\vec{r}(2,\,-2,\,1)$ e $\vec{n}(-2,\,2,\,-1)$.

$\vec{n}=-\vec{r}$

1.2. A reta e o plano são perpendiculares.

1.3. A reta e o plano são perpendiculares.

2.1. Seja $\vec{r}$ um vetor diretor de r e $\vec{n}_\alpha$ um vetor normal a α.

$\vec{r}=(2,\,2,\,0)$

$\vec{n}_\alpha=(-2,\,2,\,-1)$

$\vec{r} \cdot \vec{n}_\alpha = (2, 2, 0) \cdot (-2, 2, -1) =$

$= 2 \times (-2) + 2 \times 2 + 0 \times (-1) = 0$

Logo, $\vec{r} \perp \vec{n}_\alpha$.

2.2. $(1, 0, 3) = (-2, -3, 3) + k(2, 2, 0)$

$$\begin{cases} 1 = -2 + 2k \\ 0 = -3 + 2k \\ 3 = 3 + 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 2k \\ 3 = 2k \\ 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{3}{2} \\ k = \dfrac{3}{2} \\ \_\_\_\_ \end{cases}$$

Logo, $P \in r$.

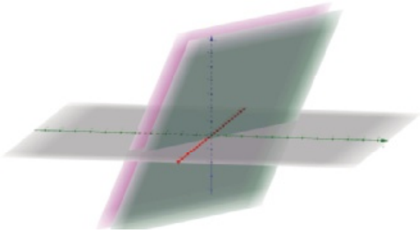
$-2 \times 1 + 2 \times 0 - 3 - 4 = 0 \Leftrightarrow -9 = 0$

Proposição falsa.

Logo, $P \notin \alpha$.

2.3. r é estritamente paralela a α .

2.4. Estritamente paralelos.



3.1. Seja $\vec{r}$ um vetor diretor de r e $\vec{n}_\alpha$ um vetor normal a α .

$\vec{r} = (0, -1, -1)$

$\vec{n}_\alpha = (2, -1, 1)$

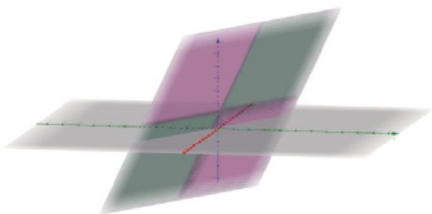
$\vec{r} \cdot \vec{n}_\alpha = (0, -1, -1) \cdot (2, -1, 1) =$

$= 0 \times 2 - 1 \times (-1) - 1 \times 1 = 0$

$\vec{r} \perp \vec{n}_\alpha$

3.2. Não. Com base no facto dos vetores serem perpendiculares, não podemos determinar a posição da reta relativamente ao plano. r pode ser estritamente paralela a α ou r pode estar contida no plano α .

3.3. Coincidentes.



4.1. Seja $\vec{r}$ um vetor diretor de r e $\vec{n}_\alpha$ um vetor normal a α .

$\vec{r} = (1, -2, 2)$

$\vec{n}_\alpha = (2, -1, 2)$

$\vec{r} \cdot \vec{n}_\alpha = (-1, -2, 2) \cdot (2, -1, 2) =$

$= 1 \times 2 - 2 \times (-1) + 2 \times 2 = 8 \neq 0$

$\vec{r}$ e $\vec{n}_\alpha$ não são perpendiculares.

$\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{-1}{-2}$

Logo, $\vec{r}$ e $\vec{n}_\alpha$ não são colineares.

4.2. r é oblíqua a α .

4.3. Oblíquos.

Pág. 191

47.1. $AB \perp ADH$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, -2, -3) - (1, -3, -1) = (2, 1, -2)$

$ADH : 2x + y - 2z + d = 0$ e $A \in ADH$

$2 \times 1 - 3 - 2 \times (-1) + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$

$ADH : 2x + y - 2z - 1 = 0$

47.2. $BC \,//\, ADH$

$BCG : 2x + y - 2z + d = 0$ e $B \in BCG$

$2 \times 3 - 2 - 2 \times (-3) + d = 0 \Leftrightarrow d = -10$

$BCG : 2x + y - 2z - 10 = 0$

48.1. $\vec{r} = (2, 0, 1)$

$\vec{n}_\alpha = (-4, 0, -2)$

$\dfrac{-4}{2} = \dfrac{-2}{1} = -2 \wedge 0 = 0$

$\vec{r}$ e $\vec{n}_\alpha$ são colineares.

Logo, $\vec{r} \perp \alpha$.

48.2. $\vec{r} = (0, 1, 1)$

$\vec{n}_\alpha = (2, -1, 1)$

$\vec{r} \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \times 2 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$

$\vec{r} \perp \vec{n}_\alpha$

$(4, 1, -8) \in r$

$2 \times 4 - 1 - 8 + 1 = 0$ (Proposição verdadeira)

$(4, 1, -8) \in \alpha$

Logo, r está contida em α .

48.3. $\vec{r} = (2, 1, -3)$; $\vec{n}_\alpha = (1, 1, 1)$

$\vec{r} \cdot \vec{n}_\alpha = (2, 1, -3) \cdot (1, 1, 1) = 2 \times 1 + 1 \times 1 - 3 \times 1 = 0$

$\vec{r} \perp \vec{n}_\alpha$

Logo, $r \,//\, \alpha$.

$(3, 2, 1) \in r$

$2 \times (-1) - 1 \times 3 + 1 \times (-1) = -6 \neq 0$ (Proposição falsa)

$(3, 2, 1) \notin \alpha$

Logo, r é estritamente paralela a α .

48.4. $\vec{r} = (2, -1, 1)$; $\vec{n}_\alpha = (-1, 3, -1)$

$\vec{r} \cdot \vec{n}_\alpha = (2, -1, 1) \cdot (-1, 3, -1) = 2 \times (-1) - 1 \times 3 + 1 \times (-1) =$

$= -6 \neq 0$

Logo, $\vec{r}$ e $\vec{n}_\alpha$ não são perpendiculares.

$$\frac{-1}{2} \neq \frac{3}{-1}$$

Logo, $\vec{r}$ e $\vec{n}_\alpha$ não são colineares.

Então r é oblíqua ao plano α.

Pág. 192

49. Seja r_A a reta perpendicular a α e que passa por A.

$r_A : (x, y, z) = (0, 3, 2) + k(1, 2, -2),\ k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (k, 3+2k, 2-2k),\ k \in \mathbb{R}$

Seja A' o ponto de interseção de r_A com α.

$k + 2(3+2k) - 2(2-2k) + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k + 6 + 4k \cancel{-4} + 4k \cancel{+4} = 0 \Leftrightarrow 9k = -6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = -\dfrac{2}{3}$

$A'\left(-\dfrac{2}{3}, 3-\dfrac{4}{3}, 2+\dfrac{4}{3}\right) = \left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$

$\overline{AA'} = \sqrt{\left(-\dfrac{2}{3}-0\right)^2 + \left(\dfrac{5}{3}-3\right)^2 + \left(\dfrac{10}{3}-2\right)^2} =$

$= \sqrt{\dfrac{4}{9}+\dfrac{16}{9}+\dfrac{16}{9}} = \dfrac{6}{3} = 2$

Seja r_B a reta perpendicular a α e que passa por B.

$r_B : (x, y, z) = (-1, 4, 4) + k(1, 2, -2),\ k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (-1+k, 4+2k, 4-2k),\ k \in \mathbb{R}$

Seja B' o ponto de interseção de r_B com α.

$-1 + k + 2(4+2k) - 2(4-2k) + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 + k + 8 + 4k - 8 + 4k + 4 = 0 \Leftrightarrow 9k = -3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = -\dfrac{1}{3}$

$B'\left(-1-\dfrac{1}{3}, 4-\dfrac{2}{3}, 4+\dfrac{2}{3}\right) = \left(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{10}{3}, \dfrac{14}{3}\right)$

$\overline{BB'} = \sqrt{\left(-\dfrac{4}{3}+1\right)^2 + \left(\dfrac{10}{3}-4\right)^2 + \left(\dfrac{14}{3}-4\right)^2} =$

$= \sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9}} = \sqrt{1} = 1$

Seja r_c a reta perpendicular a α e que passa por C.

$r_C : (x, y, z) = \left(1, -\dfrac{1}{2}, 8\right) + k(1, 2, -2),\ k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = \left(1+k, -\dfrac{1}{2}+2k, 8-2k\right),\ k \in \mathbb{R}$

Seja C' o ponto de interseção de r_c com α.

$1 + k + 2\left(-\dfrac{1}{2}+2k\right) - 2(8-2k) + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + k - 1 + 4k - 16 + 4k + 4 = 0 \Leftrightarrow 9k = 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = -\dfrac{4}{3}$

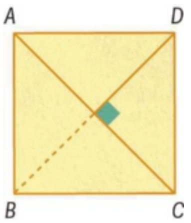
$C'\left(1+\dfrac{4}{3}, -\dfrac{1}{2}+\dfrac{8}{3}, 8-\dfrac{8}{3}\right) = \left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{13}{6}, \dfrac{16}{3}\right)$

$\overline{CC'} = \sqrt{\left(\dfrac{7}{3}-1\right)^2 + \left(\dfrac{13}{6}+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{16}{3}-8\right)^2} =$

$= \sqrt{\dfrac{16}{9}+\dfrac{64}{9}+\dfrac{64}{9}} = \sqrt{16} = 4$

Dos pontos A, B e C, o ponto B é o que está mais próximo do plano.

50. $A_{[ABCD]} = \cancel{2} \times \dfrac{\frac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{2}}{\cancel{2}} \underset{(\overline{AC}=\overline{BD})}{=} \dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{2} = \dfrac{5}{2}$ u. a.



$CG \perp ABC$

$CG : (x, y, z) = (0, 3, 2) + k(3, -6, -2),\ k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (3k, 3-6k, 2-2k),\ k \in \mathbb{R}$

$3 \times 3k - 6(3-6k) - 2(2-2k) + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9k - 18 + 36k - 4 + 4k + 1 = 0 \Leftrightarrow 49k = 21 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{21}{49} \Leftrightarrow k = \dfrac{3}{7}$

$C\left(\dfrac{9}{7}, 3-\dfrac{18}{7}, 2-\dfrac{6}{7}\right) = \left(\dfrac{9}{7}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{8}{7}\right)$

$\overline{CG} = \sqrt{\left(\dfrac{9}{7}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{7}-3\right)^2 + \left(\dfrac{8}{7}-2\right)^2} =$

$= \sqrt{\dfrac{81}{49}+\dfrac{324}{49}+\dfrac{36}{49}} = \sqrt{9} = 3$

$V_{[ABCDEFGH]} = \dfrac{5}{2} \times 3 = \dfrac{15}{2}$ u. v.

Pág. 193

51.1. a) $D(0, y, 0)$ e $D \in \alpha$

$y + 0 - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$

$D(0, 2, 0)$

$B(2, y, 2)$ e $B \in \alpha$

$y + 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$

$B(2, 0, 2)$

E é o ponto médio de $[BD]$.

$E\left(\dfrac{0+2}{2}, \dfrac{2+0}{2}, \dfrac{0+2}{2}\right) = (1, 1, 1)$

b) $A(0, 0, z)$ e $A \in \alpha$

$0 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow z = 2$

$A(0, 0, 2)$

$\overrightarrow{AD} = D - A = (0, 2, 0) - (0, 0, 2) = (0, 2, -2)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 0, 2) - (0, 0, 2) = (2, 0, 0)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = (0, 2, -2) \cdot (2, 0, 0) =$

$= 0 \times 2 + 2 \times 0 - 2 \times 0 = 0$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = 2$

$\|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$[ABC]$ é um retângulo.

$A_{[ABCD]} = \overline{AB} \times \overline{AD} = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

$V_{[ABCDV]} = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 4\sqrt{2} \times \overline{VE} = 8 \Leftrightarrow \overline{VE} = \frac{6}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{VE} = 3\sqrt{2}$

$VE \perp \alpha$

$VE: (x, y, z) = (1, 1, 1) + k(0, 1, 1), k \in \mathbb{R}$

$V(1, 1+k, 1+k)$

$\overrightarrow{EV} = V - E = (1, 1+k, 1+k) - (1, 1, 1) = (0, k, k)$

$\|\overrightarrow{VE}\| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + k^2 + k^2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{2k^2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}|k| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |k| = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = 3 \vee k = -3$

Como V tem cota positiva,

$V(1, 1+k, 1+k) = (1, 4, 4)$

51.2. Seja γ o plano que passa no ponto V e é paralelo ao plano α.

$\gamma: y + z + d = 0$ e $V \in \gamma$

$y + z + d = 0 \Leftrightarrow d = -8$

$\gamma: y + z - 8 = 0$

51.3. a) $\vec{n}_\alpha = (0, 1, 1)$; $\vec{n}_\beta = (3, -1, 1)$

$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = (0, 1, 1) \cdot (3, -1, 1) = 0 \times 3 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$

Logo, $\vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta$ e, consequentemente, $\alpha \perp \beta$.

b) $\overrightarrow{BD} = D - B = (0, 2, 0) - (2, 0, 2) = (-2, 2, -2)$

$BD: (x, y, z) = (0, 2, 0) + k(-1, 1, -1), k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (-k, 2+k, -k), k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3 \times (-k) - (2+k) + (-k) = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3k - 2 - k - k = 3 \Leftrightarrow -5k = 5 \Leftrightarrow k = -1$

Ponto de interseção de BD com β:

$(-(-1), 2-1, -(-1)) = (1, 1, 1) = E$

Pág. 194

Tarefas de consolidação 5

1.1. $EFG \,//\, ABC$

$EFG: 3x - 6y + 2z + d = 0$ e $E \in EFG$

$3 \times 6 - 6 \times (-8) + 2 \times 10 + d = 0 \Leftrightarrow d = -86$

$EFG: 3x - 6y + 2z - 86 = 0$

1.2. $\overrightarrow{EM} = M - E = (1-k, k, 1) - (6, -8, 10) =$

$= (-k-5, k+8, -9)$

Seja $\vec{n}$ um vetor normal a ABC.

$\vec{n} = (3, -6, 2)$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{EM} = 0 \Leftrightarrow (3, -6, 2) \cdot (-k-5, k+8, -9) = 0$

$\Leftrightarrow 3(-k-5) - 6(k+8) + 2(-9) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3k - 15 - 6k - 48 - 18 = 0 \Leftrightarrow -9k = 81 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = -9$

1.3. $FB \perp ABC$

Logo, $\vec{u}$ e $\vec{n}$ são colineares.

$$\frac{m + \frac{1}{2}}{3} = \frac{2m-2}{-6} = \frac{2m}{2}$$

$$\frac{m + \frac{1}{2}}{3} = \frac{2m}{2} \wedge \frac{2m-2}{-6} = \frac{2m}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2m = -\frac{1}{2} \wedge 8m = 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4} \wedge m = \frac{1}{4}$$

$$m = \frac{1}{4}$$

1.4. a) $EA \perp ABC$ e $E \in EA$

$EA: (x, y, z) = (6, -8, 10) + k(3, -6, 2), k \in \mathbb{R}$

b) A é o ponto de interseção da reta EA com o plano ABC.

$EA: (x, y, z) = (6+3k, -8-6k, 10+2k), k \in \mathbb{R}$

$3(6+3k) - 6(-8-6k) + 2(10+2k) + 12 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 18 + 9k + 48 + 36k + 20 + 4k + 12 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 49k = -98 \Leftrightarrow k = -2$

$A(6 + 3 \times (-2), -8 - 6 \times (-2), 10 + 2 \times (-2)) = (0, 4, 6)$

2.1. $(0, 2, 1) \in AC$ e $(0, 2, 1) \in AB$

Então, é o ponto de interseção das retas AC e AB.

2.2. Seja $\vec{n}_1 = (a, b, c)$ um vetor normal ao plano ABC e sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores diretores das retas AC e AB, respetivamente.

$\vec{u}(1, 1, 1)$ e $\vec{v}(1, 1, 0)$

AC e AB são duas retas concorrentes contidas no plano ABC. Então:

$\vec{n}_1 \perp \vec{u}$ e $\vec{n}_1 \perp \vec{v}$

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 1, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, 1, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - a + c = 0 \\ b = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = -a \end{cases}$$

$\vec{n}_1 = (a, -a, 0)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Se, por exemplo, $a = 1$, $\vec{n}_1 = (1, -1, 0)$

$ABC: x - y + d = 0$ e $A(0, 2, 1) \in ABC$

$0 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 2$

$ABC: x - y + 2 = 0$

2.3. B é o ponto de interseção da reta AB com o plano BVC.

$AB: (x, y, z) = (t, 2+t, 1),\ t \in \mathbb{R}$

$t + 2 + t + 1 - 9 = 0 \Leftrightarrow 2t = 6 \Leftrightarrow t = 3$

$B(3, 2+3, 1) = (3, 5, 1)$

C é o ponto de interseção da reta AC com o plano BVC.

$AC: (x, y, z) = (k, 2+k, 1+k),\ k \in \mathbb{R}$

$k + 2 + k + 1 + k - 9 = 0 \Leftrightarrow 3k = 6 \Leftrightarrow k = 2$

$C(2, 2+2, 1+2) = C(2, 4, 3)$

2.4. **a)** $\vec{u} = (1, 1, 1)$ é colinear com $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{CB} = B - C = (3, 5, 1) - (2, 4, 3) = (1, 1, -2)$

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{CB} = (1, 1, 1) \cdot (1, 1, -2) = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times (-2) = 0$

Logo, $\vec{u} \perp \overrightarrow{CB}$, ou seja, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{CB}$.

Então, $[ABC]$ é um triângulo retângulo em C.

b) $\overrightarrow{VC} = C - V = (2, 4, 3) - (0, 6, 3) = (2, -2, 0)$

Seja $\vec{n}_2$ um vetor normal ao plano ABC.

$\vec{n}_2 = (1, -1, 0)$

$\overrightarrow{VC} = 2\vec{n}_2$

Logo, $\overrightarrow{VC}$ e $\vec{n}_2$ são colineares, pelo que, $VC \perp ABC$.

2.5. $\overrightarrow{AC} = C - A = (2, 4, 3) - (0, 2, 1) = (2, 2, 2)$

$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\left\|\overrightarrow{CB}\right\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$

$A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{AC} \times \overline{CB}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} \times \sqrt{6}}{2} = 3\sqrt{2}$ u. a.

$\left\|\overrightarrow{VC}\right\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$V_{[ABCV]} = \dfrac{1}{3} \times 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$ u. v.

3. $P \in [DE]$ e $P \in [PQA]$

$[DE]: y = 0 \wedge z = 6 \wedge 0 \le x < 6$

$P(x, 0, 6)$

$3x - 4 \times 0 + 2 \times 6 - 18 = 0 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$

$P(2, 0, 6)$

$Q \in [EF]$ e $Q \in [PQA]$

$[EF]: x = 0 \wedge z = 6 \wedge 0 \le y < 6$

$Q(6, y, 6)$

$3 \times 6 - 4y + 2 \times 6 - 18 = 0 \Leftrightarrow 12 = 4y \Leftrightarrow y = 3$

$Q(6, 3, 6)$

$\overrightarrow{AP} = P - A = (2, 0, 6) - (6, 0, 0) = (-4, 0, 6)$

$\overrightarrow{AQ} = Q - A = (6, 3, 6) - (6, 0, 0) = (0, 3, 6)$

$$\cos\left(\overrightarrow{AP} \hat{\ } \overrightarrow{AQ}\right) = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}}{\left\|\overrightarrow{AP}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AQ}\right\|} =$$

$$= \frac{(-4, 0, 6) \cdot (0, 3, 6)}{\sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 6^2} \times \sqrt{0^2 + 3^2 + 6^2}} =$$

$$= \frac{-4 \times 0 + 0 \times 3 + 6 \times 6}{\sqrt{52} \times \sqrt{45}} = \frac{36}{6\sqrt{65}} = \frac{6}{\sqrt{65}}$$

$$\left(\overrightarrow{AP} \hat{\ } \overrightarrow{AQ}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{65}}\right) \approx 42°$$

Pág. 195

4. **I.** Se $\vec{r} \cdot \vec{n}$, então $\vec{r} \perp \vec{n}$, pelo que, a reta r é estritamente paralela ou está contida no plano α.

II. Se $\vec{r}$ e $\vec{n}$ são colineares, r é perpendicular a α e a todos os planos paralelos a α.

5.1. $VC \perp \alpha$ e $V \in VC$

$(x, y, z) = \left(\dfrac{5}{3}, 2, 1\right) + k(2, 3, 6),\ k \in \mathbb{R}$

5.2. C é o ponto de interseção de VC com o plano α.

$VC: (x, y, z) = \left(\dfrac{5}{3} + 2k, 2 + 3k, 1 + 6k\right),\ k \in \mathbb{R}$

$2\left(\dfrac{5}{3} + 2k\right) + 3(2 + 3k) + 6(1 + 6k) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{10}{3} + 4k + 6 + 9k + 6 + 36k + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 49k = -\dfrac{49}{3} \Leftrightarrow k = -\dfrac{1}{3}$

$C\left(\dfrac{5}{3} + 2 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right), 2 + 3 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right), 1 + 6 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)\right) = (1, 1, -1)$

5.3. $\overline{VC} = \sqrt{\left(\dfrac{5}{3} - 1\right)^2 + (2 - 1)^2 + (1 + 1)^2} = \sqrt{\dfrac{4}{9} + 1 + 4} =$

$= \sqrt{\dfrac{49}{9}} = \dfrac{7}{3}$

5.4. Centro da superfície esférica: $(3, 4, 5)$

$(3, 4, 5) = \left(\dfrac{5}{3}, 2, 1\right) + k(2, 3, 6)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \dfrac{5}{3} + 2k \\ 4 = 2 + 3k \\ 5 = 1 + 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{3} = +2k \\ 2 = 3k \\ 4 = 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{2}{3} \\ k = \dfrac{2}{3} \\ k = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Logo, o centro da superfície esférica pertence a VC.

5.5. Seja A o centro e B um ponto da circunferência que limita a base do cone.

$A(3, 4, 5);\ C(1, 1, -1)$

$\overline{AC} = \sqrt{(3-1)^2 + (4-1)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} =$

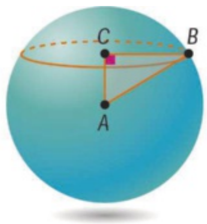
$= \sqrt{49} = 7$

$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \sqrt{50}^2 = 7^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 50 - 49 = \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 1 \underset{\overline{BC}>0}{\Leftrightarrow} \overline{BC} = 1$

$A_{\text{base do cone}} = \pi \times 1^2 = \pi$ u. a.

$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times \pi \times \frac{7}{3} = \frac{7}{9}\pi$ u. v.



6.1. **a)** $E(0, -2, 0)$

Seja α o plano paralelo a *ACB* e que passa por *E*.

$\alpha : 3x + z + d = 0$ e $E \in \alpha$

$3 \times 0 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$

$\alpha : 3x + z = 0$

b) Se o plano é perpendicular a *EC,* também é perpendicular a Ox. Logo, é um plano de equação $x = k$.

Como *A* tem abcissa 1, o plano que é perpendicular aa reta *EC* e que passa por *A* é definido pela equação $x = 1$.

c) $(x, y, z) = (0, -2, 0) + k(3, 0, 1), k \in \mathbb{R}$

6.2. $E(0, -2, 0)$; $B(2, 0, 0)$

Seja *M* o ponto médio de $[BE]$.

$M\left(\frac{0+2}{2}, \frac{-2+0}{2}, \frac{0-0}{2}\right) = (1, -1, 0)$

$\overline{EM}^2 = \sqrt{(1-0)^2 + (-1+2)^2 + (0-0)^2}^2 = 2$

Equação da superfície esférica:

$(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 2$

P pertence a superfície esférica. Então,

$(1 + \sin\alpha - 1)^2 + (\tan\alpha - 1 + 1)^2 + \cos^2\alpha = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha + \tan^2\alpha + \cos^2\alpha = 2 \Leftrightarrow 1 + \tan^2\alpha = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan^2\alpha = 1 \underset{\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)}{\Leftrightarrow} \tan\alpha = 1$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$

$P\left(1 - \sin\frac{\pi}{4}, 0, \cos\frac{\pi}{4}\right) = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$= \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

6.3. $A(1, -1, z_A)$ e $A \in ACB$

$3 \times 1 + z_A = 6 \Leftrightarrow z_A = 3$

$A(1, -1, 3)$

$\overrightarrow{CA} = A - C = (1, -1, 3) - (2, -2, 0) = (-1, 1, 3)$

$D(1, -1, z_D)$

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = -2{,}5 \Leftrightarrow (-1, 1, 3) \cdot (-1, 1, z_D) = -2{,}5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + 1 + 3z_D = -2{,}5 \Leftrightarrow 3z_D = -4{,}5 \Leftrightarrow z_D = -1{,}5$

$A_{[OECB]} = 2^2 = 4$ u. a.

$V_{[OECBA]} = \frac{1}{3} \times 4 \times 3 = 4$ u. v.

$V_{[OABCDE]} = 4 + 2 = 6$ u. v.

Pág. 197

Avaliação formativa 5

1.1. Seja $\vec{r}$ um vetor diretor da reta *r* e $\vec{n}_\alpha$ um vetor normal a α.

$\vec{r}(c, 3, -9)$; $\vec{n}_\alpha(c, 3, -9)$

$r /\!/ \alpha \Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{n}_\alpha$

$\vec{r} \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \Leftrightarrow (2, -1, 3) \cdot (c, 3, -9) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2c - 1 \times 3 + 3 \times (-9) = 0 \Leftrightarrow 2c = 30 \Leftrightarrow c = 15$

Se $c = 15$

$\alpha : 15x - y + 3z - 2 = 0$

$(1, 0, 4) \in r$

$15 \times 1 - 0 \times 3 + 3 \times 4 - 2 = 0 \Leftrightarrow 25 = 0$

(Proposição falsa)

Então, *r* é estritamente paralela a α, se $c = 15$.

I-a)

1.2. $r \perp \alpha$ se $\vec{r}$ e $\vec{n}_\alpha$ forem colineares.

$\frac{c}{2} = \frac{3}{-1} = \frac{-9}{3} \Leftrightarrow \frac{c}{2} = -3 \Leftrightarrow c = -6$

II-b)

1.3. $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (c, 3, -9) \cdot (1, 1, 3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c + 3 \times 1 - 9 \times 3 = 0 \Leftrightarrow c = 24$

$\alpha /\!/ \beta$ se os vetores $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ forem colineares.

$\frac{c}{1} = \frac{3}{1} = \frac{-9}{3} \Leftrightarrow c = 3 = -3$ (Proposição falsa)

III-c)

2. Seja $\vec{r}$ um vetor diretor da reta definida por $x = -1 \wedge z = 1$.

$\vec{r}(0, 1, 0)$

$r \perp \alpha$

Então, $\vec{r}$ e $\vec{n}_\alpha$ são colineares.

$\vec{n}_\alpha = (0, b, 0), b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Opção **(D)**

3.1. $C(1, 2, 0)$ e $B(2, 1, 0)$

3.2. Seja *F* o ponto de coordenadas $(3, 3, 1)$.

$\overrightarrow{OF} = (3, 3, 1)$ é perpendicular a *BCE* e consequentemente, é perpendicular a qualquer plano paralelo a *BCE.*
Seja α o plano perpendicular a *BCE* e que passa por *A*.

$\alpha: 3x + 3y + z + d = 0$ e $A \in \alpha$

$3 \times 1 + 3 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$

$\alpha: 3x + 3y + z - 3 = 0$

3.3. $A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$ u.a.

$BCE: 3x + 3y + z + d = 0$ e $C \in BCE$

$3 \times 1 + 3 \times 2 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -9$

$BCE: 3x + 3y + z - 9 = 0$

$E(1, 1, z)$, $E \in BCE$

$3 \times 1 + 3 \times 1 + z - 9 = 0 \Leftrightarrow z = 3$

$E(1, 1, 3)$

$V_{[ABCDE]} = \frac{1}{3} \times A_{[ABCD]} \times 3 = 2$ u. v.

4. $V(3, y, z)$ e $V \in r$

$(3, y, z) = (1, 0, -1) + k(2, 1, 3)$

$$\begin{cases} 3 = 1 + 2k \\ y = k \\ z = -1 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2k \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 + 3 \times 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

$V(3, 1, 2)$

Seja *s* a reta perpendicular a α e contém o ponto *V*.

$s: (x, y, z) = (3, 1, 2) + k(2, 1, -2),\ k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (3 + 2k, 1 + k, 2 - 2k),\ k \in \mathbb{R}$

Seja *P* o ponto do plano α mais próximo de *V*.
P é o ponto de interseção de *s* com o plano α.

$2(3 + 2k) + 1 + k - 2(2 - 2k) - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6 + 4k + 1 + k - 4 + 4k - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9k = 2 \Leftrightarrow k = \frac{2}{9}$

$$P\left(3 - 2 \times \frac{2}{9}, 1 - \frac{2}{9}, 2 + 2 \times \frac{2}{9}\right) = \left(\frac{23}{9}, \frac{7}{9}, \frac{22}{9}\right)$$

$$\overline{VP} = \sqrt{\left(3 - \frac{23}{9}\right)^2 + \left(1 - \frac{7}{9}\right)^2 + \left(2 - \frac{22}{9}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{4}{81} + \frac{16}{81}} = \sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$\overline{VP}$ representa a altura do cone.

Tarefas complementares

Pág. 198

1. $r: m_r = \tan 45° = 1$

$r: y = x + b \land A(-4, 0) \in r$

$0 = -4 + b \Leftrightarrow 4 = b$

Equação reduzida de $r: y = x + 4$

$m_r = 1$

Então, um vetor diretor de *r* é, por exemplo, $(1, 1)$

Equação vetorial de *r*:

$(x, y) = (-4, 0) + k(1, 1),\ k \in \mathbb{R}$

s: $B(5, 0)$ e $C(0, 3)$

$m_s = \frac{3 - 0}{0 - 5} = -\frac{3}{5}$

$s: y = -\frac{3}{5}x + b \land b = 3$

Equação reduzida de $s: y = -\frac{3}{5}x + 3$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (0, 3) - (5, 0) = (-5, 3)$

Equação vetorial de $(x, y) = (5, 0) + k(-5, 3),\ k \in \mathbb{R}$

t: é uma reta horizontal que passa pelo ponto $E(0, 2)$.

Equação reduzida de $t: y = 2$

Equação vetorial da reta *t*:

$(x, y) = (0, 2) + k(1, 0),\ k \in \mathbb{R}$

2.1. $CB \mathbin{//} OA$.

Então, $O\hat{C}B = 70°$.

2.2. $C\hat{B}A = 180° - 70° = 110°$

3.1. $m = 2$

Como $m > 0$ e $2 = \tan\alpha$,

$\alpha = \tan^{-1}(2) \approx 63{,}4°$

3.2. $x - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow -2y = -x - 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$

$m = \frac{1}{2}$

Como $m > 0$ e $\frac{1}{2} = \tan\alpha$,

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26{,}6°$

3.3. $m = 0$

$\alpha = \tan^{-1}(0) = 0°$

3.4. $m = -\frac{\sqrt{12}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

Como $m < 0$ e $-\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\alpha$,

$\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 180° = 150°$

4.1. $m = \tan \alpha = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

$y = -\sqrt{3}x + b$ e $A\left(\sqrt{3}, -1\right)$

$1 = -\sqrt{3} \times \sqrt{3} + b \Leftrightarrow 1 + 3 = b \Leftrightarrow 4 = b$

Equação reduzida: $y = -\sqrt{3}x + 4$

4.2. $m = \tan \alpha = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ e $A\left(\sqrt{12}, -1\right)$

$-1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{12} + b \Leftrightarrow -1 - 2 = b \Leftrightarrow -3 = b$

Equação reduzida da reta: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 3$

5.1. $A\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, $B\left(1, -\frac{1}{2}\right)$, $C\left(1, \frac{1}{2}\right)$ e $D\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

5.2. **a)** $m_{AC} = \dfrac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}$

Como $m > 0$ e $\frac{1}{2} = \tan\alpha$,

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26{,}6°$.

b) $m_{AC} = \dfrac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{-1 - 1} = -\frac{1}{2}$

Como $m < 0$ e $-\frac{1}{2} = \tan\beta$,

$\beta = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + 180° \approx 153{,}4°$

5.3. $A\hat{O}B = C\hat{O}D = \beta - \alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi - \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx$

$\approx 2{,}2$ rad

Pág. 199

6.1. $A(-1, 2)$ e $B(3, -1)$

$m_{AB} = \dfrac{-1 - 2}{3 - (-1)} = -\frac{3}{4}$

Como $m < 0$ e $-\frac{3}{4} = \tan(180° - \alpha)$,

$180° - \alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) + 180° \Leftrightarrow \alpha = -\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) \approx$

$\approx 37°$

6.2. $m_{AB} = -\frac{3}{4}$

Como $AB: y = -\frac{3}{4}x + b$ e $A \in AB$,

$2 = -\frac{3}{4}(-1) + b \Leftrightarrow 2 - \frac{3}{4} = b \Leftrightarrow \frac{5}{4} = b$

$AB: y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$

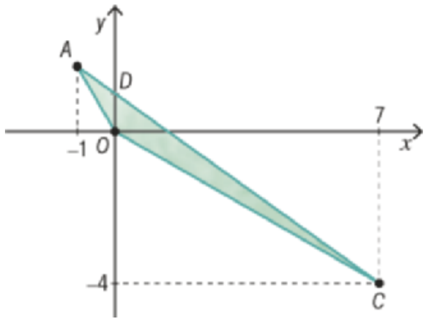
$C(7, y_C)$

$y_C = -\frac{3}{4} \times 7 + \frac{5}{4} = -\frac{16}{4} = -4$

$C(7, -4)$

Seja D o ponto e interseção da reta AB com Oy.

$D\left(0, \frac{5}{4}\right)$



$A_{[AOD]} = \dfrac{\frac{5}{4} \times 1}{2} = \frac{5}{8}$ u.a.

$A_{[OCD]} = \dfrac{\frac{5}{4} \times 7}{2} = \frac{35}{8}$ u.a.

$A_{[AOC]} = \frac{5}{8} + \frac{35}{8} = \frac{40}{8} = 5$ u.a.

7.1. $A\hat{O}B = \frac{\pi}{2} - \alpha$

7.2. $\overline{OA} = \overline{OB}$. Então, $B\hat{A}O = O\hat{B}A$.

$B\hat{A}O + O\hat{B}A + A\hat{O}B = \pi \Leftrightarrow 2B\hat{A}O + \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2B\hat{A}O = \frac{\pi}{2} + \alpha \Leftrightarrow B\hat{A}O = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$

7.3. Seja θ a inclinação da reta *AB*.

θ é um ângulo formado pela reta *AB* e pelos eixos coordenados e, num triângulo, a amplitude de qualquer ângulo externo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes. Designando por E o ponto de interseção da reta AB com o eixo Ox, tem-se, relativamente ao triângulo $[OEB]$:

$\theta = \pi - B\hat{E}O = \pi - \left(\pi - \frac{\pi}{2} - O\hat{B}A\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} = \frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$

8.1. $\alpha_{OB} = \frac{360°}{10} = 36°$

8.2. $\alpha_{OC} = \frac{360°}{5} = 72°$

8.3. $\alpha_{OI} = \alpha_{OD} = 3 \times 36° = 108°$

8.4. $C\hat{A}O = \frac{180° - 72°}{2} = 54°$

$\alpha_{AC} = 180° - 54° = 126°$

8.5. $E\hat{C}A = 2 \times 54° = 108°$

$\alpha_{CE} = 180° - (E\hat{C}A + C\hat{A}O) = 180° - (108° + 54°) =$

$= 180° - 162° = 18°$

8.6. $A\hat{O}C = 72°$

$O\hat{C}B = \frac{180° - 36°}{2} = \frac{144°}{2} = 72°$

$\alpha_{CB} = \pi - (\pi - A\hat{O}C - O\hat{C}B) = 72° + 72° = 144°$

9. $a = \tan\frac{3\pi}{4} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

$r : y = -x + 1$

Seja $s : (x, y) = (\pi, \pi) + k(\sqrt{2}, \sqrt{2}),\ k \in \mathbb{R}$

$m_s = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

$s : y = x + b$ e $(\pi, \pi) \in s$

$\pi = \pi + b \Leftrightarrow 0 = b$

$s : y = x$

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x + 1 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 1 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ é o ponto de interseção das retas *r* e *s*.

Pág. 200

10. Seja θ a inclinação da reta *s*.

$\theta = 180° - 60°$

$m_s = \tan(180° - 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$

$s : y = -\sqrt{3}x$

$r = \overline{OC} = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

Equação da circunferência de centro *C* e raio $\sqrt{10}$:

$(x - (-3))^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{10}^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 10$

Condição: $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 \leq 10 \wedge y \geq -\sqrt{3}x$

11. Sejam α e β as inclinações das retas *AB* e *CD*, respetivamente.

$A(-3, 0)$ e $B(0, 2)$

Como $m_{AB} > 0$ e $\frac{2}{3} = \tan\alpha$,

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 33{,}69°$

$C(-4, 3)$ e $D(4, 0)$

$m_{CD} = \frac{0 - 3}{4 - (-4)} = -\frac{3}{8}$

Como $m_{CD} < 0$ e $-\frac{3}{8} = \tan\beta$,

$\beta = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{8}\right) + 180° \approx 159{,}44°$

$C\hat{D}A = 180° - \beta \approx 180° - 159{,}44° = 20{,}56°$

Seja θ o ângulo obtuso formado pelas duas retas.

$\theta \approx 180° - (33{,}69° + 20{,}56°) = 125{,}75° \approx 126°$

12.1. $m = \tan\frac{5\pi}{6} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ e $b = 1$

Equação da reta: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$

12.2. $m_{AB} = \frac{1 - 4}{0 - (-\sqrt{3})} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$

Como $m_{AB} < 0$ e $-\sqrt{3} = \tan\alpha_{AB}$,

$\alpha_{AB} = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$

Opção **(C)**

12.3. $m_{BC} = \frac{4 - 1}{4 - 0} = \frac{3}{4}$

$\tan\alpha_{AB} = m_{Bc} = \frac{3}{4}$

$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25}$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$

$0 \leq \alpha < \pi \wedge \tan\alpha > 0$

Logo, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{\sin\alpha}{\frac{4}{5}} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}$

$3\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 2\sin(5\pi - \alpha) = 3(-\sin\alpha) - 2\sin\alpha =$

$= -3\sin\alpha - 2\sin\alpha = -5\sin\alpha = -\cancel{5} \times \frac{3}{\cancel{5}} = -3$

13. $\cos\alpha = \sin\frac{\pi}{5} \Leftrightarrow \cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) \Leftrightarrow \cos\alpha =$

$= \cos\frac{3\pi}{10}$

Como α é agudo, $\alpha = \frac{3\pi}{10}$.

$m_{OP} = \tan(\pi - \alpha) = \tan\left(\pi - \frac{3\pi}{10}\right) = \tan\left(\frac{7\pi}{10}\right)$

$m_{OP} = \tan\left(\frac{7\pi}{10}\right)$ e $(0, 0) \in OP$

$OP : y = \tan\left(\frac{7\pi}{10}\right)x$

Pág. 201

14.1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{v}\,\hat{,}\,\vec{u}\right) = 3\times 4\times\cos\frac{\pi}{4} =$

$= 12\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$

14.2 $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{v}\,\hat{,}\,\vec{u}\right) = \sqrt{6}\times\sqrt{2}\times\cos\frac{\pi}{3} =$

$= \sqrt{12}\times\frac{1}{2} = \cancel{2}\sqrt{3}\times\frac{1}{\cancel{2}} = \sqrt{3}$

14.3. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{v}\,\hat{,}\,\vec{u}\right) = \sqrt{27}\times 3^{-1}\times\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) =$

$= 3\sqrt{3}\times\frac{1}{3}\times\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) =$

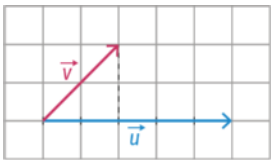
$= \sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

15.1. a) Agudo.
b) Obtuso.
c) Agudo.

15.2. $\|\vec{v}\|^2 = 2^2+2^2 \Leftrightarrow \|\vec{v}\|^2 = 8 \Leftrightarrow \|\vec{v}\|^2 = \sqrt{8} \Leftrightarrow$

$\underset{(\|\vec{v}\|>0)}{\Leftrightarrow} \|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}$

$\cos\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}\right) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



15.3. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{v}\,\hat{,}\,\vec{u}\right) =$

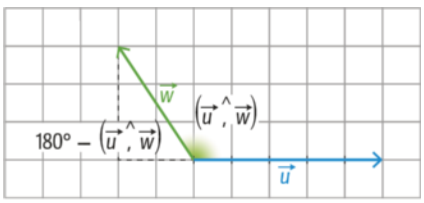
$= 5\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 10$

$\vec{u}\cdot\vec{w} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{w}\|\times\cos\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{w}\right) =$

$= 5\times\|\vec{w}\|\times\left(-\cos\left(180°-\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{w}\right)\right)$

$= 5\times\|\vec{w}\|\times\left(-\frac{2}{\|\vec{w}\|}\right) =$

$= 5\times(-2) = -10 = -\vec{u}\cdot\vec{v}$



16.1. $\overline{AB}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 \underset{(\overline{MA}=\overline{MB})}{\Leftrightarrow} 4^2 = 2\overline{MA}^2$

$\Leftrightarrow \frac{16}{2} = \overline{MA}^2 \underset{(\overline{MA}>0)}{\Leftrightarrow} \overline{MA} = \sqrt{8} \Leftrightarrow \overline{MA} = 2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{MA}\cdot(-\overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} =$

$= \|\overrightarrow{MA}\|\times\|\overrightarrow{MC}\|\cos\left(\overrightarrow{MA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{MC}\right) =$

$= 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\cos 180° = 8(-1) = -8$

16.2. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD} = \|\overrightarrow{BA}\|\times\|\overrightarrow{BD}\|\times\cos\left(\overrightarrow{BA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BD}\right) =$

$= \|\overrightarrow{BA}\|\times 2\|\overrightarrow{BM}\|\times\frac{\|\overrightarrow{BM}\|}{\|\overrightarrow{BA}\|} = 2\|\overrightarrow{BM}\|^2 =$

$= 2\times\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 16$

16.3. $2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{BC}\cdot(-\overrightarrow{BM}) = 2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BM}$

$= 2\|\overrightarrow{BC}\|\times\|\overrightarrow{BM}\|\cos\left(\overrightarrow{BC}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BM}\right)$

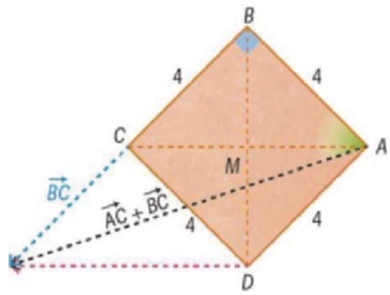
$= 2\times\|\overrightarrow{BC}\|\times\|\overrightarrow{BM}\|\times\frac{\|\overrightarrow{BM}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|} =$

$= 2\times\|\overrightarrow{BM}\|^2 = 2\times(2\sqrt{2})^2 = 16$

16.4. $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}) =$

$= \|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\|\times\cos\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)\right) =$

$= 4\times\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\|\times\frac{4}{\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\|} = 4\times 4 = 16$



17.1. a) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AE}$, por exemplo, porque $\cos\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AE}\right) = \cos 90° = 0$

b) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, por exemplo.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\cos\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AC}\right)$

$= \|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = a^2$

c) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CA}$, por exemplo.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(-\overrightarrow{AC}\right) = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -a^2$

d) $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AG}$, por exemplo.

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AG} = \|\overrightarrow{AC}\|\times\|\overrightarrow{AG}\|\cos\left(\overrightarrow{AC}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AG}\right) =$

$$= \|\overrightarrow{AC}\| \times \cancel{\|\overrightarrow{AG}\|} \times \frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\cancel{\|\overrightarrow{AG}\|}} = \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \left(\sqrt{2a^2}\right)^2 = 2a^2$$

Cálculos auxiliares:

$$\overline{AC}^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 2a^2 \underset{\overline{AC}>0}{\Leftrightarrow} \overline{AC} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$$

17.2. $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{GH} = -100 \Leftrightarrow -\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GH} = -100 \Leftrightarrow$

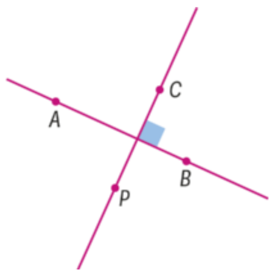
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GH} = 100 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{GE}\| \times \|\overrightarrow{GH}\| \cos(\overrightarrow{GE} \hat{,} \overrightarrow{GH}) = 100$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{GE}\| \times \|\overrightarrow{GH}\| \times \frac{\|\overrightarrow{GH}\|}{\|\overrightarrow{GE}\|} = 100 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{GH}\|^2 = 100$$

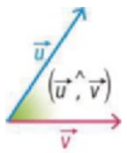
$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{GH}\| = \sqrt{100} = 10$$

$A_{total} = 6 \times 10^2 = 600$ u. a.

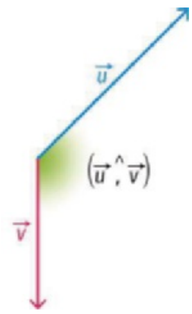
18. $\overrightarrow{CP} \perp \overrightarrow{AB}$. Logo, $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Opção **(C)**



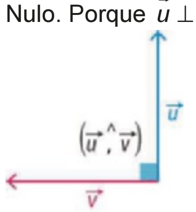
19.1. Positivo. Porque $0° < \left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) < 90°$.



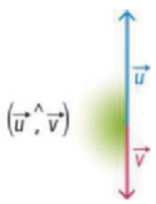
19.2. Negativo. Porque $90° < \left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) < 180°$.



19.3. Nulo. Porque $\vec{u} \perp \vec{v}$.



19.4. Negativo. Porque $\left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) = 180°$.



Pág. 202

20. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos\left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) =$

$$= 3 \times 5 \cos 120° = 15 \times \cos(180° - 60°)$$

$$= 15(-\cos 60°) = 15 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-15}{2}$$

20.1. $(2\vec{u} \cdot \vec{v}) = 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 2\left(\frac{-15}{2}\right) = -15$

20.2. $(-4\vec{u}) \cdot (3\vec{v}) = -12(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -12 \times \left(-\frac{15}{2}\right) = 90$

20.3. $(\vec{v} + 4\vec{u}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + 4\vec{u} \cdot \vec{u} = -\frac{15}{2} + 4\|\vec{u}\|^2 =$

$$= -\frac{15}{2} + 4 \times 3^2 = -\frac{15}{2} + 36 = \frac{57}{2}$$

20.4. $(6\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (3\vec{v}) = 18\vec{u} \cdot \vec{v} - 6\vec{v} \cdot \vec{v} =$

$$= 18 \times \left(-\frac{15}{2}\right) - 6\|\vec{v}\|^2 = -135 - 6 \times 5^2 = -285$$

21.1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) = 7 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2 \times 3 \times \cos\left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) = 7 \Leftrightarrow \cos\left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) = \frac{7}{6} > 1$$

É impossível, porque $-1 \le \cos(\vec{u}, \vec{v}) \le 1$.

21.2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{u} \underset{\vec{u} \perp \vec{v}}{=} 0 - \|\vec{u}\|^2 = 0 - 2^2 = -4$

21.3. **a)** $\left(2\vec{u} - \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} + \vec{v}\right) = 2\vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{v} =$

$$= 2\|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - \|\vec{v}\|^2 = 2 \times 2^2 + 5 - 3^2 = 4$$

b) $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) =$

$$= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 2^2 - 2 \times 5 + 3^2 = 3$$

22. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) =$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} =$$

$$= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 + 0 + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} =$$

$$= -\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 \underset{\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\|}{=} 0$$

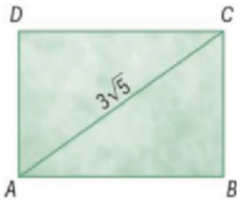
23. Seja α o ângulo $B\hat{O}D$.

$$\cancel{2} \times \frac{\alpha r^2}{\cancel{2}} = \pi \Leftrightarrow \alpha \times 2^2 = \pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OD}\| \cos\left(\overrightarrow{OA} \hat{,} \overrightarrow{OD}\right) =$$

$$= 2 \times 2 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -4\cos\frac{\pi}{4} = -4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$$

24.



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=4\overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}+4\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow$

$\underset{\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}\text{ e }\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{DC}}{\Leftrightarrow}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+0=4\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2+4\times0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=4\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2$

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(3\sqrt{5}\right)^2=4\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9\times5=5\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\Leftrightarrow\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2=9$

$\underset{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|>0}{\Leftrightarrow}\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=3$

$\overline{AB}^2=4\times3^2\Leftrightarrow\overline{AB}^2=36\underset{\overline{AB}>0}{\Leftrightarrow}\overline{AB}=6$ u. c.

$\overline{AD}=\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=3$ u. c.

25. **I.** O produto escalar de dois vetores ($\vec{u}\cdot\vec{v}$) não é um vetor ($\vec{w}$) é um número real.
II. Um vetor não é igual ao quociente de um número real por um vetor.
III. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(-\overrightarrow{AC}\right)=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

26.1. $\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{NC}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=$

$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=$

$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=$

$\underset{\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{AC}}{=}\frac{1}{4}\left(\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2+0+0+\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)=$

$=\frac{1}{4}\left(a^2+a^2\right)=$

$=\frac{2a^2}{4}=\frac{a^2}{2}$

Outro processo:

$\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{NC}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=$

$=\frac{1}{4}\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2=\frac{1}{4}\times2a^2=\frac{a^2}{2}$

Cálculos auxiliares:

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2\Leftrightarrow\overline{BC}^2=a^2+a^2=2a^2$

26.2. $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{AB}=$

$=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=$

$=a^2+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=$

$\underset{\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AB}}{=}a^2+\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+0\right)=a^2-\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=$

$=a^2-\frac{1}{2}a^2=\frac{a^2}{2}$

Pág. 203

27. $A_{[ABCD]}-2A_{[ABR]}=A_{[ARCS]}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6^2-\cancel{2}\frac{\overline{AB}\times\overline{BR}}{\cancel{2}}=20\Leftrightarrow36-20=6\overline{BR}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overline{BR}=\frac{16}{6}\Leftrightarrow\overline{BR}=\frac{8}{3}$

$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{AS}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BR}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DS}\right)=$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{BR}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BR}\cdot\overrightarrow{DS}=$

$\underset{\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BR}\perp\overrightarrow{DS}}{=}0+\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{DS}\right\|\cos\left(\overrightarrow{AB}\hat{,}\overrightarrow{DS}\right)$

$+\left\|\overrightarrow{BR}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\cos\left(\overrightarrow{BR}\hat{,}\overrightarrow{AD}\right)+0=$

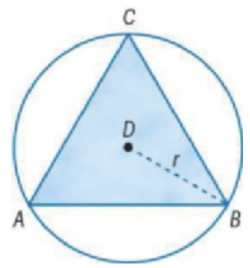
$\underset{\overline{DS}=\overline{BR}}{=}6\times\frac{8}{3}\cos0^\circ+\frac{8}{3}\times6\cos0^\circ=16\times1+16\times1=32$

28.1. $\left(\overrightarrow{DA}\hat{,}\overrightarrow{DB}\right)=\frac{360^\circ}{3}=120^\circ$

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\left\|\overrightarrow{DA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{DB}\right\|\cos\left(\overrightarrow{DA}\hat{,}\overrightarrow{DB}\right)=r\times r\cos120^\circ=$

$=r^2\cos\left(180^\circ-60^\circ\right)=r^2\left(-\cos60^\circ\right)=r^2\left(-\frac{1}{2}\right)=$

$=-\frac{r^2}{2}$



28.2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-6\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=-6\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\cos\left(\overrightarrow{BA}\hat{,}\overrightarrow{BC}\right)+\left\|\overrightarrow{CB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{CA}\right\|\cos\left(\overrightarrow{CB}\hat{,}\overrightarrow{CA}\right)+$

$+\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cos\left(\overrightarrow{AC}\hat{,}\overrightarrow{AB}\right)=6\Leftrightarrow$

$\underset{\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}}{\Leftrightarrow}3\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2\cos60^\circ=6\Leftrightarrow3\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2\times\frac{1}{2}=6\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=4\underset{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|>0}{\Leftrightarrow}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=2\Leftrightarrow\overline{AB}=2$

29. $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=\left(\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MP}\right)\cdot\left(\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MQ}\right)=$

$=\overrightarrow{RM}\cdot\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{RM}\cdot\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=$

$\underset{\overrightarrow{MP}=-\overrightarrow{MQ}}{=}\left\|\overrightarrow{RM}\right\|^2+\cancel{\overrightarrow{RM}\cdot\overrightarrow{MQ}}-\cancel{\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{RM}}-\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{MQ}=$

$=a^2-\left\|\overrightarrow{MQ}\right\|^2=a^2-4^2=a^2-16$

30. $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{DN}=\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DM}\right)\cdot\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}\right)=$

$=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AN}=$

$\underset{\overrightarrow{DM}\perp\overrightarrow{AN},\ \overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}}{=}0-\overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DA}+0=$

$=-\frac{1}{3}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\frac{1}{3}\left\|\overrightarrow{DA}\right\|^2\underset{\|\overrightarrow{DA}\|=\|\overrightarrow{AB}\|}{=}-\frac{1}{3}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\frac{1}{3}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=0$

$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{DN}=0$

Então, $\overrightarrow{CM}\perp\overrightarrow{DN}$.

31.1. $\left(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}=$

$=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CH}\cdot\left(\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{HA}\right)+\overrightarrow{CB}\cdot\left(\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{HA}\right)=$

$=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{HA}=$

$=\left\|\overrightarrow{CH}\right\|^2+0+\left\|\overrightarrow{CB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{CH}\right\|+0=$

$=5^2+7\times5=25+35=60$

31.2. $\overline{AB}^2=\overline{AH}^2+\overline{BH}^2\Leftrightarrow3^2=\overline{AH}^2+2^2\Leftrightarrow\overline{AH}^2=5\Leftrightarrow$

$\underset{\overline{AH}>0}{\Leftrightarrow}\overline{AH}=\sqrt{5}$

$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=$

$=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{AH}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cos\left(\overrightarrow{AH}\hat{,}\overrightarrow{AB}\right)=$

$=3^2+\sqrt{5}\times\cancel{3}\times\frac{\sqrt{5}}{\cancel{3}}=9+5=14$

32.1. a) $\vec{u}\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}-\vec{v}\|\cos\left(\vec{u}\hat{,}\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}=8\times5\cos60°\Leftrightarrow\|\vec{u}\|^2-\vec{u}\cdot\vec{v}=40\times\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow8^2-20=\vec{u}\cdot\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=44$

b) $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=5^2\Leftrightarrow\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=25\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}=25\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2=25\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow8^2-2\times44+\|\vec{v}\|^2=25\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\|\vec{v}\|^2=25-64+88\Leftrightarrow\|\vec{v}\|^2=49\underset{\|\vec{v}\|>0}{\Leftrightarrow}\|\vec{v}\|=\sqrt{49}=7$

32.2. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\left(2\vec{u}-\vec{v}\right)\cdot\vec{v}=$

$=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}\right)-5\times\left(2\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{v}\right)=$

$=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}-10\vec{u}\cdot\vec{v}+5\vec{v}\cdot\vec{v}=$

$=\|\vec{u}\|^2-8\vec{u}\cdot\vec{v}+6\|\vec{v}\|^2=8^2-8\times44+6\times7^2=6$

Pág. 204

33.1. $\vec{a}=(3,\ 1)$, $\vec{b}=(2,\ 4)$, $\vec{c}=(-2,\ -1)$, $\vec{d}=(0,\ 2)$

33.2. a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=(3,\ 1)\cdot(2,\ 4)=3\times2+1\times4=6+4=10$

b) $\vec{a}\cdot\vec{c}=(3,\ 1)\cdot(-2,\ -1)=3(-2)+1(-1)=-6-1=-7$

c) $\vec{a}\cdot\vec{d}=(3,\ 1)\cdot(0,\ 2)=3\times0+1\times2=0+2=2$

d) $\vec{b}\cdot\vec{c}=(2,\ 4)\cdot(-2,\ -1)=2(-2)+4(-1)=-4-4=$

$=-8$

e) $\vec{b}\cdot\vec{d}=(2,\ 4)\cdot(0,\ 2)=2\times0+4\times2=0+8=8$

f) $\vec{c}\cdot\vec{d}=(-2,\ -1)\cdot(0,\ 2)=-2\times0+(-1)\times2=0-2=$

$=-2$

g) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=10-7=3$

h) $-\left(\vec{d}\cdot2\vec{b}\right)=-2\vec{b}\cdot\vec{d}=-2\times8=-16$

i) $\left(\|\vec{d}\|\vec{c}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\left(2\vec{c}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=$

$=2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\|\vec{c}\|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=$

$=2\times(-8)-2\times\left(\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}\right)^2-10+(-7)=$

$=-16-2\times5-10-7=-43$

34.1. $A(2,\ -1,\ 0)$, $B(0,\ -1,\ 1)$, $C(-1,\ 1,\ 0)$,

$D(0,\ 2,\ -1)$

34.2. a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=$

$=-\left(\sqrt{(-2)^2+0^2+1^2}\right)^2=-\left(\sqrt{4+1}\right)^2=-\left(\sqrt{5}\right)^2=-5$

Cálculo auxiliar:

$\overrightarrow{AB}=B-A=(0,-1,\ 1)-(2,\ -1,\ 0)=$

$=(0-2,\ -1+1,\ 1-0)=(-2,\ 0,\ 1)$

b) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(2,\ 0,\ -1)\cdot(1,\ 1,\ -1)=$

$=2\times1+0\times1+(-1)\times(-1)=2+0+1=3$

Cálculo auxiliar:

$\overrightarrow{CD}=D-C=(0,\ 2,\ -1)-(-1,\ 1,\ 0)=$

$=(0+1,\ 2-1,\ -1-0)=(1,\ 1,\ -1)$

c) $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2(-2,\ 0,\ 1)\cdot(-1,\ 2,\ -1)=$

$=2\left(-2\times(-1)+0\times2+1\times(-1)\right)=2(2+0-1)=$

$=2\times1=2$

Cálculo auxiliar:

$\overrightarrow{BC}=C-B=(-1,\ 1,\ 0)-(0,\ -1,\ 1)=$

$=(-1-0,\ 1+1,0-1)=(-1,\ 2,\ -1)$

d) $\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{0}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

34.3. $P \in r$. Então, $P(1+2k, -1-k, 1+3k)$, $k \in \mathbb{R}$

$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} . \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2k-1, -k, 1+3k) \cdot (-2, 0, 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2(2k-1) + 0 + 1 + 3k = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4k + 2 + 1 + 3k = 0 \Leftrightarrow 3 = k$

$P(1+2\times 3, -1-3, 1+3\times 3) = (7, -4, 10)$

Cálculo auxiliar:

$\overrightarrow{AP} = P - A =$

$= (1+2k, -1-k, 1+3k) - (2, -1, 0) =$

$= (1+2k-2, -1-k+1, 1+3k-0) =$

$= (2k-1, -k, 1+3k)$

35.1. $C = D + \overrightarrow{AB} = (0, 4) + (8, 1) = (0+8, 4+1) = (8, 5)$

Cálculo auxiliar:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (6, 1) - (-2, 0) =$

$= (6+1, 1-0) = (8, 1)$

35.2. $y = x + 1$

$(x, x+1) = (2, 10) + k(-1, 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2-k \\ x+1 = 10+2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2-x \\ x+1 = 10+2(2-x) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ x+1 = 10+4-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 3x = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ x = \frac{13}{3} \end{cases}$

$y = \frac{13}{2} + 1 = \frac{16}{3}$

$E\left(\frac{13}{3}, \frac{16}{3}\right)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (8, 5) - (-2, 0) = (8+2, 5-0) = (10, 5)$

$\overrightarrow{AE} = E - A = \left(\frac{13}{3}, \frac{16}{3}\right) - (-2, 0) =$

$= \left(\frac{13}{3} + 2, \frac{16}{3} - 0\right) = \left(\frac{19}{3}, \frac{16}{3}\right)$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = (10, 5) \cdot \left(\frac{19}{3}, \frac{16}{3}\right) =$

$= 10 \times \frac{19}{3} + 5 \times \frac{16}{3} = \frac{190+80}{3} = \frac{270}{3} = 90$

36.1. $\cos\left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) = \frac{\vec{u} . \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{(2, -3).(1, 4)}{\sqrt{2^2 + (-3)^2} \times \sqrt{1^2 + 4^2}} =$

$= \frac{2\times 1 + (-3) \times 4}{\sqrt{13} \times \sqrt{17}} = \frac{-10}{\sqrt{221}}$

$\left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-10}{\sqrt{221}}\right) \approx 132{,}3^{\circ}$

36.2. $\cos\left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) = \frac{\vec{u} . \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{(-2, 3).(-3, 1)}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2} \times \sqrt{(-3)^2 + 1^2}} =$

$= \frac{-2 \times (-3) + 3 \times 1}{\sqrt{13} \times \sqrt{10}} = \frac{9}{\sqrt{130}}$

$\left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{9}{\sqrt{130}}\right) \approx 37{,}9^{\circ}$

36.3. $\cos\left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) = \frac{\vec{u} . \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{(\sqrt{6}, \sqrt{2}).(-1, \sqrt{3})}{\sqrt{\sqrt{6}^2 + \sqrt{2}^2} \times \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2}} =$

$= \frac{\sqrt{6} \times (-1) + \sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{8} \times 2} = \frac{0}{4\sqrt{2}} = 0$

$\left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) = \cos^{-1}(0) = 90^{\circ}$

36.4. $\cos\left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) = \frac{\vec{u} . \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} =$

$= \frac{\left(\frac{1}{2}, -1\right).\left(1, -\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2} \times \sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2}} =$

$= \frac{\frac{1}{2} \times 1 + (-1) \times \left(-\frac{1}{4}\right)}{\frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{17}}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{85}}{8}} = \frac{6}{\sqrt{85}}$

$\left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{85}}\right) \approx 49{,}4^{\circ}$

36.5. $\cos\left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) = \frac{\vec{u} . \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} =$

$= \frac{(1, -1, 0).(-2, 2, 1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} \times \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2}} =$

$= \frac{1 \times (-2) + (-1) \times 2 + 0 \times 1}{\sqrt{2} \times 3} = \frac{-4}{3\sqrt{2}}$

$\left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-4}{3\sqrt{2}}\right) \approx 160{,}5^{\circ}$

36.6. $\cos\left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) = \frac{\vec{u} . \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} =$

$= \frac{(2, -3, 1).(-1, 0, 3)}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} \times \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 3^2}} =$

$= \frac{2 \times (-1) + (-3) \times 0 + 1 \times 3}{\sqrt{14} \times \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{140}}$

$\left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{140}}\right) \approx 85{,}2^{\circ}$

Pág. 205

37.1. $\cos\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}\right) = \dfrac{\vec{u}\,.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \dfrac{-6\sqrt{3}}{3\times 4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}\right) = \cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$

37.2. $\cos\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}\right) = \dfrac{\vec{u}\,.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \dfrac{6}{3\times 4} = \dfrac{1}{2}$

$\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

38.1. a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 1,\ 3) - (-1,\ 2,\ 0) = (1,\ -1,\ 3)$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (2,\ 1,\ 2) - (0,\ 1,\ 3) = (2,\ 0,\ -1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = (1,\ -1,\ 3)\cdot(2,\ 0,\ -1) =$

$= 1\times 2 + (-1)\times 0 + 3\times(-1) = -1$

b) $\overrightarrow{CA} = A - C = (-1,\ 2,\ 0) - (2,\ 1,\ 2) = (-3,\ 1,\ -2)$

$\left(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\right).\overrightarrow{CA} =$

$= \left(2(1,\ -1,\ 3) - (2,\ 0,\ -1)\right)\cdot(-3,\ 1,\ -2) =$

$= \left((2,\ -2,\ 6) - (2,\ 0,\ -1)\right)\cdot(-3,\ 1,\ -2) =$

$= (0,\ -2,\ 7)\cdot(-3,\ 1,\ -2) =$

$= 0\times(-3) + (-2)\times 1 + 7\times(-2) = -16$

38.2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -1 \Leftrightarrow -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -1 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 1 > 0$

$\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BC}\right)$ é um ângulo agudo.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (1,\ -1,\ 3)\cdot(3,\ -1,\ 2) =$

$= 1\times 3 + (-1)\times(-1) + 3\times 2 = 3 + 1 + 6 = 10 > 0$

$\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AC}\right)$ é um ângulo agudo.

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = (-3,\ 1,\ -2)\cdot(-2,\ 0,\ 1) =$

$= -3\times(-2) + 1\times 0 + (-2)\times 1 = 4 > 0$

$\left(\overrightarrow{CA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{CB}\right)$ é um ângulo agudo.

Logo, $[ABC]$ é um triângulo acutângulo.

Cálculo auxiliar:

$\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA} = -(-3,\ 1,\ -2) = (3,\ -1,\ 2)$

$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = -(2,\ 0,\ -1) = (-2,\ 0,\ 1)$

38.3. $P \in Q_z \Rightarrow P(0,\ 0,\ z)$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP} = 0 \Leftrightarrow (-3,\ 1,\ -2)\cdot(-2,\ -1,\ z-2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3(-2) + 1\times(-1) + (-2)\times(z-2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2(z-2) = -5 \Leftrightarrow z - 2 = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow z = 2 + \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow z = \dfrac{9}{2}$

$P\left(0,\ 0,\ \dfrac{9}{2}\right)$

Cálculo auxiliar:

$\overrightarrow{CP} = P - C = (0,\ 0,\ z) - (2,\ 1,\ 2) = (-2,\ -1,\ z-2)$

39. $\cos\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AD}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AD}\right\|} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\,.\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right)}{6\times 3\sqrt{5}} =$

$= \dfrac{\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{BD}}{18\sqrt{5}} \underset{\left(\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BD}\right)}{=} \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + 0}{18\sqrt{5}} = \dfrac{6^2}{18\sqrt{5}} =$

$= \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AD}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right) \approx 26{,}565^{\circ}$

$B\hat{A}C = 2\times 26{,}565 \approx 53^{\circ}$

40.1. a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow (1,\ k+1,\ k)\cdot(-2,\ 1,\ 0) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1\times(-2) + (k+1)\times 1 + k\times 0 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 + k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow (k,\ 2k-2,\ -2)\cdot(k,\ k-1,\ 3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k\times k + (2k-2)\times(k-1) + (-2)\times 3 = 0 \Leftrightarrow$

$. \Leftrightarrow k^2 + 2k^2 - 2k - 2k + 2 - 6 = 0 \Leftrightarrow .$

$\Leftrightarrow 3k^2 - 4k - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\times 3\times(-4)}}{2\times 3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{4 \pm 8}{6} \Leftrightarrow k = \dfrac{12}{6} \vee k = -\dfrac{4}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = 2 \vee k = -\dfrac{2}{3}$

40.2. a) $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0 \Leftrightarrow (k,\ 2,\ 1)\cdot(3,\ -k,\ 3) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k\times 3 + 2\times(-k) + 1\times 3 > 0 \Leftrightarrow k + 3 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k > -3$

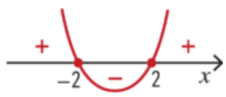
b) $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0 \Leftrightarrow (k,\ -1,\ 0)\cdot(k,\ 4,\ 2) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k\times k + (-1)\times 4 + 0\times 2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow k < -2 \vee k > 2$

Cálculo auxiliar:

$k^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 4 \Leftrightarrow k = \pm 2$



41.1. $\vec{r} = (-2,\ 6,\ -4) = 2(-1,\ 3,\ -2)$

é colinear com $(-1,\ 3,\ -2)$.

Logo, é um vetor diretor da reta *r*. A reta *s* é paralela ao eixo *Oz*.

Logo, $\vec{s}$ é um vetor diretor de *s*.

41.2. a) $\cos\left(\hat{\vec{r}, \vec{s}}\right) = \dfrac{\vec{r}\,.\,\vec{s}}{\|\vec{r}\| \times \|\vec{s}\|} = \dfrac{(-2,\,6,\,-4)\cdot(0,\,0,\,1)}{\sqrt{(-2)^2 + 6^2 + (-4)^2} \times 1} =$

$= \dfrac{-4}{\sqrt{56}}$

$\left(\hat{\vec{r}, \vec{s}}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{-4}{\sqrt{56}}\right) \approx 122{,}3^\circ$

b) $\left(\hat{\vec{r}, \vec{s}}\right) = 180^\circ - 122{,}3^\circ = 57{,}7^\circ$

Pág. 206

42. $6y + 2kx = 12 \Leftrightarrow 6y = -2kx + 12 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{3}kx + 2$

$\vec{r} = (3, -k)$ e $\vec{s} = (1, 4)$

$\vec{r}\,.\,\vec{s} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3, -k)\,.\,(1, 4) = 0 \Leftrightarrow 3 \times 1 + (-k) \times 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 - 4k = 0 \Leftrightarrow 3 = 4k \Leftrightarrow k = \dfrac{3}{4}$

43. $m_r \neq m_s$

Logo, as retas *r* e *s* não são estritamente paralelas nem coincidentes.

$\vec{r} = \left(1, \sqrt{3}\right)$; $\vec{s} = \left(1, -\sqrt{3}\right)$

$\vec{r}\,.\,\vec{s} = \left(1, \sqrt{3}\right).\left(1, -\sqrt{3}\right) = 1 \times 1 + \sqrt{3}\left(-\sqrt{3}\right) = 1 - 3 =$

$= -2 \neq 0$

Logo, as retas *r* e *s* não são perpendiculares.
Então, são concorrentes não perpendiculares.
Opção **(B)**

44.1. $4x - 5y - 2 = 0 \Leftrightarrow -5y = -4x + 2 \Leftrightarrow y = \dfrac{4}{5}x - \dfrac{2}{5}$

$m_r = \dfrac{4}{5}$; $m_s = -\dfrac{5}{4}$; $s:\ y = -\dfrac{5}{4}x + b$ e $B \in s$

$-5 = -\dfrac{5}{4} \times 2 + b \Leftrightarrow -5 + \dfrac{5}{2} = b \Leftrightarrow -\dfrac{5}{2} = b$

$s:\ y = -\dfrac{5}{4}x - \dfrac{5}{2}$

44.2. $C(0,\,y)$; $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -5) - (-3, 4) = (5, -9)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, y) - (-3, 4) = (3, y - 4)$

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (5, -9)\,.\,(3, y - 4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5 \times 3 - 9(y - 4) = 0 \Leftrightarrow 15 - 9y + 36 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -9y = -51 \Leftrightarrow y = \dfrac{51}{9} \Leftrightarrow y = \dfrac{17}{3}$

$C\left(0, \dfrac{17}{3}\right)$

45.1. $B \in t$

$x = 1 \Rightarrow y = 3 \times 1 = 3$

$B(1,\,3)$

$r^2 = \overline{AB}^2 = \sqrt{(4-1)^2 + (2-3)^2}^{\,2} = \sqrt{10}^{\,2}$

Equação da circunferência: $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 10$

45.2. Se a reta contém o diâmetro da circunferência, passa pelo seu centro, o ponto *A*.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,\,3) - (4,\,2) = (-3,\,1)$

$m_{AB} = -\dfrac{1}{3}$

$AB: y = -\dfrac{1}{3}x + b$ e $A \in AB$

$2 = -\dfrac{1}{3} \times 4 + b \Leftrightarrow 2 + \dfrac{4}{3} = b \Leftrightarrow \dfrac{10}{3} = b$

$AB: y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{10}{3}$

46. $d_r = |7 - 3| = 4$

$d_s = |3 - (-2)| = 5$

Seja *p* a reta perpendicular a *t* e que passa por *P*.

$m_t = 1$ e $m_p = -1$;

$p: y = -x + b$ e $P \in p$

$3 = -3 + b \Leftrightarrow 6 = b$

$p: y = -x + 6$

Como as duas retas, *t* e *p*, têm ordenada na origem igual a 6, o ponto de interseção das duas retas é o ponto $Q(0,\,6)$.

$d_t = \overline{PQ} = \sqrt{(0-3)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}2$

$d_r < d_t < d_s$

47.1. a) *C* é o ponto de *r* mais próximo de *B*. Então é o ponto de interseção da reta *r* com a reta *s*, perpendicular a *r* e que passa por *B*.

$m_r = \dfrac{1}{2}$ e $m_s = -2$

$s:\ y = -2x + b$ e $B \in s$

$4 = -2 \times 2 + b \Leftrightarrow 4 + 4 = b \Leftrightarrow 8 = b$

$s:\ y = -2x + 8$

$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x - 2 \\ y = -2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 8 = \dfrac{1}{2}x - 2 \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 16 = x - 4 \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x = -20 \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -8 + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$

$C(4,\,0)$

b) $\overrightarrow{BC} = C - B = (4,\,0) - (2,\,4) = (2,\,-4)$

$B' = C + \overrightarrow{BC} = (4,\,0) + (2,\,-4) = (6,\,-4)$

47.2. $A(x,\,2)$ e $A \in r$

$2=\frac{1}{2}x-2 \Leftrightarrow 4=x-4 \Leftrightarrow 8=x$

$A(8,\,2)$

$\overline{BC}=\sqrt{2^2+(-4)^2}=\sqrt{20}$

$\overline{B'B}=2\overline{BC}=2\sqrt{20}=4\sqrt{5}$

$\overline{AC}=\sqrt{(8-4)^2+(2-0)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$A_{[ABB']}=\frac{\overline{B'B}\times\overline{AC}}{2}=\frac{4\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}}{2}=20$ u. a.

Pág. 207

48.1. $P(x,\,x-1)$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(5,-3)-(-2,-4)=(7,1)$

$\overrightarrow{OP}=P-O=(x,\,x-1)$;

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OP}=0 \Leftrightarrow (7,\,1).(x,\,x-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7x+1(x-1)=0 \Leftrightarrow 8x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{8}$

$P\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8}-1\right)=\left(\frac{1}{8},-\frac{7}{8}\right)$

48.2. $P(x,\,-x)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(0,-3)-(-2,-4)=(2,1)$

$\overrightarrow{OP}=(x,\,-x)$

$\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{AC}=2 \Leftrightarrow (x,\,-x).(2,\,1)=2 \Leftrightarrow 2x-x=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2$

$P(2,\,-2)$

49.1. $(-3+1)^2+(-2+6)^2=20 \Leftrightarrow (-2)^2+4^2=20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4+6=20$ (Verdadeiro)

Logo, T pertence à circunferência.

49.2. Seja C o centro de circunferência $C(-1,-6)$.

$\overrightarrow{CT}=T-C=(-3,-2)-(-1,-6)=(-2,4)$

$m_{CT}=\frac{4}{-2}=-2$

A reta t, tangente à circunferência em T é perpendicular a CT. $m_t=\frac{1}{2}$; $\vec{t}=(2,1)$

$t:\ (x,\,y)=(-3,\,-2)+k(2,\,1),\, k\in\mathbb{R}$

49.3. $A(1,\,y_A)$

$B(1,\,y_B)$

$(1+1)^2+(y+6)^2=20 \Leftrightarrow (y+6)^2=20-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y+6)^2=16 \Leftrightarrow y+6=\pm 16 \Leftrightarrow y=-10 \vee y=-2$

$A(1,\,-10)$

$B(1,-2)$

$\overrightarrow{CA}=A-C=(1,\,-10)-(-1,\,-6)=(2,\,-4)$

$\overrightarrow{CB}=B-C=(1,\,-2)-(-1,\,-6)=(2,\,4)$

$\cos\left(\overrightarrow{CA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CA}\|\times\|\overrightarrow{CB}\|}=$

$=\frac{(2,-4).(2,4)}{\sqrt{2^2+(-4)^2}\times\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{2\times 2+(-4)\times 4}{\sqrt{20}\times\sqrt{20}}=\frac{-12}{20}=$

$=-\frac{3}{5}$

$\left(\overrightarrow{CA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{CB}\right)=\cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)\approx 2{,}21$ rad

50.1. $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}\right)=1\times 2\cos\frac{\pi}{3}=2\times\frac{1}{2}=1$

50.2. $\vec{u}.(2\vec{u}+\vec{v})=2\vec{u}.\vec{u}+\vec{u}.\vec{v}=2\|\vec{u}\|^2+1=2\times 1^2+1=3$

50.3. $\|2\vec{u}+\vec{v}\|^2=(2\vec{u}+\vec{v}).(2\vec{u}+\vec{v})=$

$=4\vec{u}.\vec{u}+2\vec{u}.\vec{v}+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{v}=4\|\vec{u}\|^2+4\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2=$

$=4\times 1^2+4\times 1+2^2=12$

$\|2\vec{u}+\vec{v}\|^2=12 \underset{(\|2\vec{u}+\vec{v}\|>0)}{\Leftrightarrow} \|2\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \|2\vec{u}+\vec{v}\|=2\sqrt{3}$

50.4. $\cos\left(\vec{u}\,\hat{,}\,2\vec{u}+\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}.(2\vec{u}+\vec{v})}{\|\vec{u}\|\times\|2\vec{u}+\vec{v}\|}=\frac{3}{1\times 2\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\times 3}=$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\left(\vec{u}\,\hat{,}\,2\vec{u}+\vec{v}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$

51. $A(0,\,0,\,2)$, $B(2,\,0,\,1)$, $C(2,\,3,\,0)$ e $D(0,\,4,\,1)$

51.1. a) $y=3$

b) $r^2=\overline{OD}^2=\sqrt{(0-0)^2+(4-0)^2+(1-0)^2}=$

$=\sqrt{17}^2=17$

Equação da superfície esférica:

$(x-0)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=17 \Leftrightarrow$

$x^2+(y-4)^2+(z-1)^2=17$

51.2. a) $(x-2)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=$

$=(x-0)^2+(y-4)^2+(z-1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}-4x+4+\cancel{y^2}+\cancel{z^2}-\cancel{2z}+\cancel{1}=$

$=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-8y+16+\cancel{z^2}-\cancel{2z}+\cancel{1^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x+8y+4-16=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x+8y-12=0 \Leftrightarrow x-2y+3=0$

b) $\overrightarrow{AC}=(2,\,3,\,0)-(0,\,0,\,2)=(2,\,3,\,-2)$

$AC:\ (x,\,y,\,z)=(0,\,0,\,2)+k(2,\,3,\,-2),\, k\in\mathbb{R}$

c) $AC:\ (x,\ y,\ z)=(2k,\ 3k,\ 2-2k),\ k\in\mathbb{R}$

$2k-2(3k)+3=0 \Leftrightarrow 2k-6k=-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4k=-3 \Leftrightarrow k=\dfrac{3}{4}$

$P\left(2\times\dfrac{3}{4},\ 3\times\dfrac{3}{4},\ 2-2\times\dfrac{3}{4}\right)=\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{9}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$

d) $\overrightarrow{PB}=B-P=(2,\ 0,\ 1)-\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{9}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{9}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{PD}=D-P=(0,\ 4,\ 1)-\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{9}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{7}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{9}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{7}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)=$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)+\left(-\dfrac{9}{4}\right)\times\dfrac{7}{4}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=-\dfrac{71}{16}<0$

Pág. 208

52. $\vec{u}=(-1,\ k^2)$ e $\vec{v}=(2-k,\ 1)$

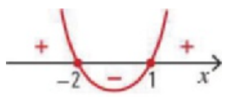
52.1. $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0 \Leftrightarrow (-1,\ k^2)\cdot(2-k,\ 1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1\times(2-k)+k^2\times 1=0 \Leftrightarrow -2+k+k^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times 1\times(-2)}}{2\times 1} \Leftrightarrow k=\dfrac{-1\pm 3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=-2 \vee k=1$

52.2. $\vec{u}.\vec{v}<0 \Leftrightarrow k^2+k-2<0 \Leftrightarrow k\in\,]-2,\ 1[$



53. $A(x,\ 0),\ x<0$; B é um ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares $B(x,\ x)$.

$(x,\ x)=(0,-3)+k(2,-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2k \\ x=-3-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3-k=2k \\ \_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3k=3 \\ \_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k=-1 \\ x=-3+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_ \\ x=-2 \end{cases}$

$B(-2,-2)$

$\overrightarrow{BA}=A-B=(x,\ 0)-(-2,\ -2)=(x+2,\ 2),\ x<0$

$\vec{u}.\overrightarrow{BA}=(1,0).(x+2,2)=x+2+0=x+2$

$x<0 \Leftrightarrow x+2<2$

Opção **(B)**

54. $C(x,\ y)$

$\overrightarrow{OC}=C-O=(x,\ y)$

$\overrightarrow{OA}=A-O=(4,\ 0)$

$\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}=(x,\ y).(4,\ 0)=4x+0=4x$

Logo, $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}$ não depende da ordenada de C.

55. **1.º Processo**

$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}=32 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CQ}\right)\cdot\overrightarrow{PR}=32 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{CQ}.\overrightarrow{PR}=32 \Leftrightarrow$

$\underset{(\overrightarrow{PC}\perp\overrightarrow{PR})}{\Leftrightarrow} 0+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PR}.\overrightarrow{PR}=32 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{PR}\right\|^2=64 \underset{(\|\overrightarrow{PR}\|>0)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{PR}\right\|=8$

$P_{[OABC]}=4\times\overline{PR}=4\times 8=32$ u. c.

Cálculo auxiliar: $\overline{PC}=\dfrac{3}{2}\times\overline{CQ} \Leftrightarrow \overline{CQ}=\dfrac{2}{3}\overline{PC} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{CQ}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3}{4}\overline{OC}\right) \Leftrightarrow \overline{CQ}=\dfrac{1}{2}\overline{OC}=\dfrac{1}{2}\overline{PR}$

2.º Processo

Seja a o comprimento do lado do quadrado $[OABC]$.

$A(a,\ 0)$, $C(0,\ a)$, $a>0$.

$\overline{PC}=\dfrac{3}{4}\overline{OC}$. Então, $\overline{OP}=\dfrac{1}{4}\overline{OC}=\dfrac{1}{4}a$.

$\overline{CQ}=\dfrac{1}{2}\overline{PR}$. Então, $\overline{CQ}=\dfrac{1}{2}a$.

$\overrightarrow{PQ}=Q-P=\left(\dfrac{1}{2}a,a\right)-\left(0,\dfrac{1}{4}a\right)=\left(\dfrac{1}{2}a,\dfrac{3}{4}a\right)$

$\overrightarrow{PR}=R-P=\left(a,\dfrac{1}{4}a\right)-\left(0,\dfrac{1}{4}a\right)=(a,0)$

$\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{PR}=32 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}a,\dfrac{3}{4}a\right).(a,0)=32 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}a\times a+\dfrac{3}{4}a\times 0=32 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}a^2=32 \Leftrightarrow a^2=64 \Leftrightarrow$

$\underset{(a>0)}{\Leftrightarrow} a=8$

$P_{[OABC]}=4a=4\times 8=32$ u. c.

56.1. $\vec{u}.\vec{v}=(a,b).(-b,a)=-ab+ab=0$

Logo, $\vec{u}\perp\vec{v}$.

$\vec{u}.\vec{w}=(a,b).(b,-a)=ab-ab=0$

Logo, $\vec{u}\perp\vec{w}$.

$\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2}$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{(-b)^2+a^2}=\sqrt{a^2+b^2}=\|\vec{u}\|$

$\|\vec{w}\|=\sqrt{b^2+(-a)^2}=\sqrt{a^2+b^2}=\|\vec{u}\|$

Logo, $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=\|\vec{w}\|$.

56.2. $C=A+2\overrightarrow{AM}=(1,\ -5)+2(2,\ 4)=(1,\ -5)+(4,\ 8)=$

$=(5,\ 3)$

Cálculo auxiliar:

$\overrightarrow{AM}=M-A=(3,\ -1)-(1,\ -5)=(2,\ 4)$

$\overrightarrow{MB}$ e $\overrightarrow{MD}$ são perpendiculares a $\overrightarrow{AM}$ e $\left\|\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|\overrightarrow{AM}\right\|$.

Então utilizando a propriedade demonstrada na alínea anterior, temos, por exemplo, que $\overrightarrow{MB}=(-4,\,2)$ e $\overrightarrow{MD}=(4,\,-2)$.

$B=M+\overrightarrow{MB}=(3,\,-1)+(-4,\,2)=(-1,\,1)$

$D=M+\overrightarrow{MD}=(3,\,-1)+(4,\,-2)=(7,\,-3)$

Os outros vértices do quadrado são os pontos de coordenadas $(-1,1)$, $(5,3)$ e $(7,-3)$.

57. Seja a a abcissa de B, $a>-a$.

$f(a)=a^2$; $B(a,a^2)$

$f(-a)=(-a)^2=a^2$; $A(-a,a^2)$

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow(-a,a^2).(a,a^2)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -a^2+a^4=0\Leftrightarrow a^2(-1+a^2)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2=0\vee a^2-1=0\Leftrightarrow a=0\vee a=\pm1$

Como A e B têm abcissas diferentes e $a>-a$.

$A(-1,\,1)$

Pág. 209

58.1.

1.º Processo:

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}=16\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GD}\right)=16\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GD}=16\Leftrightarrow$

$\underset{\left(\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BG},\ \overrightarrow{GD}=-\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BG}\perp\overrightarrow{GD}\right)}{\Leftrightarrow}0-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}\right).\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}\right)+0=16$

$\Leftrightarrow-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CG}+$

$+\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CG}=16\Leftrightarrow$

$\underset{\left(\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{CG},\ \overrightarrow{CG}\perp\overrightarrow{BC}\right)}{\Leftrightarrow}-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2+0+0+\left\|\overrightarrow{CG}\right\|^2=16\Leftrightarrow$

$\underset{\left(\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{CG}\right\|\right)}{\Leftrightarrow}\cancel{-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}+\cancel{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}+\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=16\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=16\underset{\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|>0\right)}{\Leftrightarrow}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{16}=4$

$V_{\text{sólido}}=V_{\text{cubo}}+2V_{\text{pirâmide}}\Leftrightarrow 96=4^3+2V_{\text{pirâmide}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 96-64=2V_{\text{pirâmide}}\Leftrightarrow V_{\text{pirâmide}}=16\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1}{3}\times4^2\times h=16\Leftrightarrow h=3$ (altura da pirâmide)

$V_1(2,\,7,\,2)$ e $V_2(2,\,-3,\,2)$

2.º Processo:

Seja a o comprimento da aresta do cubo $[OABCDEFG]$.

$A(a,\,0,\,0)$, $G(0,\,a,\,a)$, $B(a,\,a,\,0)$, $D(0,\,0,\,a)$.

$\overrightarrow{AG}=G-A=(0,\,a,\,a)-(a,\,0,\,0)=(-a,\,a,\,a)$

$\overrightarrow{BD}=D-B=(0,\,0,\,a)-(a,\,a,\,0)=(-a,\,-a,\,a)$

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}=16\Leftrightarrow(-a,a,a).(-a,-a,a)=16\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -a\times(-a)+a\times(-a)+a\times a=16\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2-a^2+a^2=16\Leftrightarrow a^2=16\underset{(a>0)}{\Leftrightarrow}a=4$

$V_{\text{sólido}}=V_{\text{cubo}}+2V_{\text{pirâmide}}\Leftrightarrow 96=4^3+2V_{\text{pirâmide}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 96-64=2V_{\text{pirâmide}}\Leftrightarrow V_{\text{pirâmide}}=16\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1}{3}\times4^2\times h=16\Leftrightarrow h=3$

$V_1(2,7,2)$ e $V_2(2,-3,2)$

58.2. $P(z+1,\,y,\,z)$

$\overrightarrow{BD}=D-B=(0,0,4)-(4,4,0)=(-4,-4,4)$

BD: $(x,\,y,\,z)=(0,\,0,\,4)+k(-4,\,-4,\,4)$, $k\in\mathbb{R}$

$P\in BD$

$$\begin{cases}z+1=0-4k\\ y=0-4k\\ z=4+4k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4+4k+1=-4k\\ \_\_\_\_\_\\ \_\_\_\_\_\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}8k=-5\\ \_\_\_\_\_\\ \_\_\_\_\_\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-\frac{5}{8}\\ y=-4\times\left(-\frac{5}{8}\right)\\ z=4+4\left(-\frac{5}{8}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\_\_\_\_\_\\ y=\frac{5}{2}\\ z=\frac{3}{2}\end{cases}$$

$P\left(\frac{3}{2}+1,\,\frac{5}{2},\,\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},\,\frac{5}{2},\,\frac{3}{2}\right)$

$\overrightarrow{PV_1}=V_1-P=(2,\,7,\,2)-\left(\frac{5}{2},\,\frac{5}{2},\,\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},\,\frac{9}{2},\,\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{PV_2}=V_2-P=(2,\,-3,\,2)-\left(\frac{5}{2},\,\frac{5}{2},\,\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},\,-\frac{11}{2},\,\frac{1}{2}\right)$

$$\cos\left(\overrightarrow{PV_1}\,\hat{,}\,\overrightarrow{PV_2}\right)=\frac{\overrightarrow{PV_1}.\overrightarrow{PV_2}}{\left\|\overrightarrow{PV_1}\right\|\times\left\|\overrightarrow{PV_2}\right\|}=$$

$$=\frac{\left(-\frac{1}{2},\frac{9}{2},\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{1}{2},-\frac{11}{2},\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\times\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{11}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{9}{2}\times\left(-\frac{11}{2}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{83}{4}}\times\sqrt{\frac{123}{4}}}=\frac{-\frac{97}{4}}{\frac{\sqrt{10209}}{4}}=$$

$$=\frac{-97}{\sqrt{10209}}$$

$\left(\overrightarrow{PV_1}\,\hat{,}\,\overrightarrow{PV_2}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{-97}{\sqrt{10209}}\right)\approx164^{\circ}$

59.1. $m_s=\tan135^{\circ}=\tan(180^{\circ}-45^{\circ})=-\tan45^{\circ}=-1$

$s:\ y=-x+b$ e $B\in s$

$-3=-(-1)+b\Leftrightarrow-4=b$

$s:\ y=-x-4\Leftrightarrow x+y+4=0$

59.2. $A\in r$ e $A(1,\,y_A)$

$1-7y_A+20=0\Leftrightarrow21=7y_A\Leftrightarrow y_A=3$

59.3. $x-7y+20=0 \Leftrightarrow -7y=-x-20 \Leftrightarrow y=\frac{1}{7}x+\frac{20}{7}$

$m_r=\frac{1}{7}$

$AC \perp r$

$m_{AC}=-7$

$AC:\ y=-7x+b$ e $A(1,3)\in AC$

$3=-7\times 1+b \Leftrightarrow 10=b$

$AC:\ y=-7x+10$

$BC \perp s$ e $m_s=-1$

$m_{BC}=1$

$BC:\ y=x+b$ e $B(-1,-3)\in BC$

$-3=-1+b \Leftrightarrow -2=b$

$BC:\ y=x-2$

$C\in AC$ e $C\in BC$

$$\begin{cases} y=-7x+10 \\ y=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=-7x+10 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x=12 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{3}{2}-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

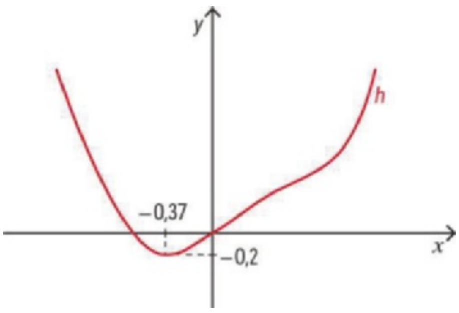
$C\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$

60. $A(x, f(x))=(x, \sin x)$

$B(x, g(x))=(x, \cos x)$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=(x, \sin x).(x, \cos x)=x^2+\sin x\cos x$

Seja $h(x)=x^2+\sin x\cos x$.



O valor mínimo de $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ é $-0{,}2$.

Pág. 210

61.1. $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{FG}$, por exemplo.

61.2. $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BG}$, por exemplo.

61.3. $\overrightarrow{DI}$ e $\overrightarrow{GB}$, por exemplo.

61.4. $\overrightarrow{BG}$, por exemplo.

62.1. Por exemplo, $\vec{n}_1=(3,-2,1)$ e

$\vec{n}_2=2(3,-2,1)=(6,-4,2)$

62.2. Interseção com Ox : $(x, 0, 0)$

$3x-2\times 0+0-6=0 \Leftrightarrow 3x=6 \Leftrightarrow x=2$

$(2, 0, 0)$

Interseção com Oy: $(0, y, 0)$

$3\times 0-2y+0-6=0 \Leftrightarrow -6=2y \Leftrightarrow y=-3$

$(0, -3, 0)$

Interseção com Oz: $(0, 0, z)$

$3\times 0-2\times 0+z-6=0 \Leftrightarrow z=6$

$(0, 0, 6)$

$(2, 0, 0)$, $(0, -3, 0)$ e $(0, 0, 6)$

63.1. $\vec{n}=(2,-1,0)$ e $A(2,1,-3)$

$\alpha:\ 2x-y+d=0$ e $A\in\alpha$

$2\times 2-1+d=0 \Leftrightarrow d=-3$

$\alpha:\ 2x-y-3=0$

63.2. $\vec{n}=(1,2,\pi)$ e $A(0,0,0)$

$\alpha:\ x+2y+\pi z+d=0$ e $A\in\alpha$

$0+2\times 0+\pi\times 0+d=0 \Leftrightarrow d=0$

$\alpha: x+2y+\pi z=0$

63.3. $\vec{n}=(-2,0,0)$ e $A(-1,3,1)$

$\alpha:\ -2x+d=0$ e $A\in\alpha$

$-2\times(-1)+d=0 \Leftrightarrow d=-2$

$\alpha:\ -2x-2=0 \Leftrightarrow x+1=0$

63.4. $\vec{n}=(-2,3,4)$ e $A\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{4}\right)$

$\alpha:\ -2x+3y+4z+d=0$ e $A\in\alpha$

$-2\times\frac{1}{2}+3\times 0+4\times\frac{3}{4}+d=0 \Leftrightarrow d=-2$

$\alpha:\ -2x+3y+4z-2=0$

64.1. $\vec{n}=(1,-1,0)$, por exemplo.

Se $y=0$, por exemplo, $x-0+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

$A(-1, 0, 5)$, por exemplo.

64.2. $\vec{n}=(2,1,-1)$, por exemplo.

Se $x=0$ e $y=0$, por exemplo,

$0+2\times 0-z+3=0 \Leftrightarrow 3=z$

$A(0,0,3)$, por exemplo.

64.3. $\vec{n}=(-1,2,3)$, por exemplo. $A(1,-1,0)$

64.4. $\vec{n}=(1,0,0)$, por exemplo.

$A(1,2,3)$, por exemplo.

65.1. $\overrightarrow{AB}=B-A=(0,4,-1)-(-2,0,1)=(2,4,-2)$

$\overrightarrow{BC}=C-B=(2,3,-1)-(0,4,-1)=(2,-1,0)$

$\frac{2}{2}\neq\frac{4}{-1}$, logo os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ não são colineares, pelo que, *A*, *B* e *C* não são colineares, ou seja, definem um plano.

65.2. Seja $\vec{n}=(a,\,b,\,c)$, um vetor normal a ABC.

$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{BC}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a,\,b,\,c).(2,\,4,\,-2)=0\\ (a,\,b,\,c).(2,\,-1,\,0)=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2a+4b-2c=0\\ 2a-b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+2b-c=0\\ b=2a\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a+2(2a)-c=0\\ \_\_\_\_\_\_\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=5a\\ b=2a\end{cases}$

$\vec{n}=(a,\,2a,\,5a),\ a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Por exemplo, se $a=1$: $\vec{n}=(1,\,2,\,5)$.

$ABC:\ x+2y+5z+d=0$ e $A\in ABC$

$-2+2\times0+5\times1+d=0 \Leftrightarrow d=-3$

$ABC:\ x+2y+5z-3=0$

66. $A(x,\,0,\,0)$ e $A\in ACD$

$2x+2\times0+0-4=0 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$

$A(2,\,0,\,0)$ e $\overline{OA}=2$

$C(0,\,y,\,0)$ e $C\in ACD$

$2\times0+2y+0-4=0 \Leftrightarrow 2y=4 \Leftrightarrow y=2$

$C(0,\,2,\,0)$ e $\overline{OC}=2$

$D(0,\,0,\,z)$ e $D\in ACD$

$2\times0+2\times0+z-4=0 \Leftrightarrow z=4$

$D(0,\,0,\,4)$ e $\overline{OD}=4$

$V_{[GABCDEFG]}=\overline{OA}\times\overline{OC}\times\overline{OD}=2\times2\times4=16$ u. v.

Pág. 211

67. $r:\ (x,\,y,\,z)=(1,\,2,\,2)+k(1,\,-1,\,0),\ k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x,\,y,\,z)=(1+k,\,2-k,\,2),\ k\in\mathbb{R}$

$\alpha:\ -x+2y-z=4$;

$-(1+k)+2(2-k)-2=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1-k+4-2k-2=4 \Leftrightarrow -3k=3 \Leftrightarrow k=-1$

Ponto de interseção:

$(x,\,y,\,z)=(1-1,\,2-(-1),\,2)=(0,\,3,\,2)$

68.1. $r\,//\,s$

Seja α o plano definido pelas retas *r* e *s*, e sejam *R* e *S* pontos das retas *r* e *s*, respetivamente.

$R(1,\,-3,\,1)$ e $S(0,\,1,\,-4)$

$\overrightarrow{RS}=S-R=(0,\,1,\,-4)-(1,\,-3,\,1)=(-1,\,4,\,-5)$

$\vec{r}=(2,\,0,\,-1)$

Seja $\vec{n}=(a,\,b,\,c)$ um vetor normal a α.

$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{RS}=0\\ \vec{n}.\vec{r}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a,b,c).(-1,4,-5)=0\\ (a,b,c).(2,0,-1)=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-a+4b-5c=0\\ 2a-c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-a+4b-5\times2a=0\\ 2a=c\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4b=11a\\ c=2a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\dfrac{11}{4}a\\ c=2a\end{cases}$

$\vec{n}=\left(a,\,\dfrac{11}{4}a,\,2a\right),\ a\in\mathbb{R}$

Se, por exemplo, $a=4$, $\vec{n}=(4,\,11,\,8)$.

$\alpha:\ 4x+11y+8z+d=0$ e $S\in\alpha$

$4\times0+11\times1+8\times(-4)+d=0 \Leftrightarrow d=21$

$\alpha:\ 4x+11y+8z+21=0$

68.2. Sejam $\vec{r}=(-2,\,3,\,-1)$ e $\vec{s}=(0,\,2,\,-1)$ vetores diretores das retas *r* e *s*, respetivamente. $\vec{r}$ e $\vec{s}$ não são colineares e $(0,\,3,\,0)\in r$ e $(0,\,3,\,0)\in s$.

Então, as retas *r* e *s* são concorrentes. Seja α o plano definido pelas retas *r* e *s*.

Seja $\vec{n}=(a,b,c)$ um vetor normal ao plano α.

$\begin{cases}\vec{n}.\vec{r}=0\\ \vec{n}.\vec{s}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a,b,c).(-2,3,-1)=0\\ (a,b,c).(0,2,-1)=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-2a+3b-c=0\\ 2b-c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2a+3b-2b=0\\ c=2b\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}b=2a\\ c=2b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{1}{2}b\\ \_\_\_\_\_\_\end{cases}$

$\vec{n}=\left(\dfrac{1}{2}b,\,b,\,2b\right),\ b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Se, por exemplo, $b=2$, $\vec{n}=(1,\,2,\,4)$.

$\alpha:\ x+2y+4z+d=0$ e $(0,\,3,\,0)\in\alpha$;

$0+2\times3+4\times0+d=0 \Leftrightarrow d=-6$

$\alpha:x+2y+4z-6=0$

69.1. $x^2-4x=-3 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times3}}{2\times1} \Leftrightarrow x=\dfrac{4\pm2}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=3 \vee x=1$

$B(1,\,2z,\,z)$

B pertence ao plano de equação $2x-y+1=z$.

$2\times1-2z+1=z \Leftrightarrow 3=3z \Leftrightarrow z=1$

$B(1,\,2,\,1)\in BC$

$2x-y+1=z \Leftrightarrow 2x-y-z+1=0$

BC é perpendicular ao plano de equação $2x-y-z+1=0$.

Então, $(2,\,-1,\,-1)$ é um vetor diretor da reta *BC*.

$BC:\ (x,\,y,\,z)=(1,\,2,\,1)+k(2,\,-1,\,-1),\ k\in\mathbb{R}$

69.2. Como a base do prisma é um hexágono regular, pode ser dividida em 6 triângulos equiláteros de lado 2. Seja h a altura de um desses triângulos

$$2^2 = 1^2 + h^2 \Leftrightarrow h^2 = 3 \underset{(h>0)}{\Leftrightarrow} h = \sqrt{3}$$

$$A_{\text{base}} = 6 \times \frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 6\sqrt{3} \text{ u. a.}$$

$$V_{\text{prisma hexagonal}} = 6\sqrt{3} \times 2 = 12\sqrt{3} \text{ u. v.}$$

70.1. $D(x,\ 3x,\ z)$

$$(x,\ 3x,\ z) = (-3,\ 5,\ 8) + k(-2,\ 1,\ 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - 2k \\ 3x = 5 + k \\ z = 8 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ 3(-3-2k) = 5 + k \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ -9 - 6k = 5 + k \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ -7k = 14 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - 2(-2) \\ k = -2 \\ z = 8 + 3(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \_\_\_ \\ z = 2 \end{cases}$$

$D(1,\ 3,\ 2)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (4,\ 3,\ -1) - (4,\ 0,\ 2) = (0,\ 3,\ -3)$

$\overrightarrow{AD} = D - A = (1,\ 3,\ 2) - (4,\ 0,\ 2) = (-3,\ 3,\ 0)$

Seja $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$ um vetor normal ao plano ACD.

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$ e $\vec{n} \perp \overrightarrow{AD}$

$$\begin{cases} \vec{n} . \overrightarrow{AC} = 0 \\ \vec{n} . \overrightarrow{AD} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a,\ b,\ c).(0,\ 3,\ -3) = 0 \\ (a,\ b,\ c).(-3,\ 3,\ 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3b - 3c = 0 \\ -3a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = b \\ a = b \end{cases}$$

$\vec{n} = (b,\ b,\ b),\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se, por exemplo, $b = 1$, $\vec{n} = (1,\ 1,\ 1)$.

$ACD:\ x + y + z + d = 0$ e $A \in ACD$

$4 + 0 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -6$

$ACD:\ x + y + z - 6 = 0$

70.2. Seja M o ponto médio de $[CD]$.

$$M\left(\frac{4+1}{2},\ \frac{3+3}{2},\ \frac{-1+2}{2}\right) = \left(\frac{5}{2},\ 3,\ \frac{1}{2}\right)$$

$\overrightarrow{CD} = D - C = (1,\ 3,\ 2) - (4,\ 3,\ -1) = (-3,\ 0,\ 3)$

Seja α o plano mediador de $[CD]$.

$\alpha:\ -3x + 3z + d = 0$ e $M \in \alpha$

$$-3 \times \frac{5}{2} + 3 \times \frac{1}{2} + d = 0 \Leftrightarrow d = 6$$

$\alpha:\ -3x + 3z + 6 = 0 \Leftrightarrow x - z - 2 = 0$

70.3. raio $= \overline{AB} = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$

Superfície esférica:

$$(x-4)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2 = \sqrt{18}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 18$$

71.1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,\ 4,\ 3) - (1,\ -2,\ 5) = (-3,\ 6,\ -2)$

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{49} = 7$$

1.º Processo:

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\|^2 = 7^2 + 7^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\|^2 = 98 \underset{(\|\overrightarrow{AC}\|>0)}{\Leftrightarrow} \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{98}$$

$$\|\overrightarrow{AG}\|^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{CG}\|^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AG}\|^2 = 98 + 7^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AG}\|^2 = 147 \underset{(\|\overrightarrow{AG}\|>0)}{\Leftrightarrow} \|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{147}$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AC}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AG}\right) = \frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AG}\|} = \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{147}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\left(\overrightarrow{AC}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AG}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \approx 35^{\circ}$$

2.º Processo:

$\overline{CG} = \overline{CB} = \overline{AB} = 7$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 7^2 + 7^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 98 \Leftrightarrow \underset{(\overline{AC}>0)}{\Leftrightarrow} \overline{AC} = \sqrt{98}$$

$$\tan C\hat{A}G = \frac{7}{\sqrt{98}}$$

$$C\hat{A}G = \tan^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{98}}\right) \approx 35^{\circ}$$

71.2. $\overrightarrow{BC} = C - B = (k-3,\ 2k+1,\ 3k) - (-2,\ 4,\ 3) =$

$= (k-1,\ 2k-3,\ 3k-3)$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-3,\ 6,\ -2) \cdot (k-1,\ 2k-3,\ 3k-3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3(k-1) + 6(2k-3) - 2(3k-3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3k + 3 + 12k - 18 - 6k + 6 = 0 \Leftrightarrow 3k = 9 \Leftrightarrow k = 3$

$C(3-3,\ 2 \times 3 + 1,\ 3 \times 3) = (0,\ 7,\ 9)$

71.3. $\overrightarrow{BC} = (3-1,\ 2 \times 3 + 1,\ 3 \times 3) = (2,\ 3,\ 6)$

$\overrightarrow{BC} \perp DCG$

$DCG:\ 2x + 3y + 6z + d = 0$ e $C \in DCG$

$2 \times 0 + 3 \times 7 + 6 \times 9 + d = 0 \Leftrightarrow d = -75$

$DCG:\ 2x + 3y + 6z - 75 = 0$

Pág. 212

72. α e β são paralelos. Então os seus vetores normais têm de ser colineares. (Equações 1 e 3)
Na equação 1, o ponto de interseção com o eixo Oz é: $(0,0,z)$

$-0+0-z-5=0 \Leftrightarrow z=-5$

$(0,0,-5)$

Ou seja, o plano interseta o eixo Oz num ponto de cota negativa.
Então, Equação $1 \to \beta$ e Equação $3 \to \alpha$.
O plano π não interseta Oz.
Logo, Equação $2 \to \pi$ e Equação $4 \to \theta$.
Equação $1 \to \beta$
Equação $2 \to \pi$
Equação $3 \to \alpha$
Equação $4 \to \theta$

73.1. Seja δ o plano que passa em A e é paralelo a α.

$\delta: 3x+y-2z+d=0$ e $A \in \delta$

$3\times1+1-2\times(-1)+d=0 \Leftrightarrow d=-6$

$\delta: 3x+y-2z-6=0$

73.2. a) $k^2\times1+k\times1-1+1=0 \Leftrightarrow k^2+k=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k(k+1)=0 \Leftrightarrow k=0 \vee k+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=0 \vee k=-1$

b) $k^2\times1+k\times0-2+1=0 \Leftrightarrow k^2-1=0 \Leftrightarrow k^2=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=1 \vee k=-1$

c) Se β_k passa em A e em B então,

$(k=0 \vee k=-1) \wedge (k=1 \vee k=-1) \Leftrightarrow k=-1$

$\beta_{-1}: x-y+z+1=0$

$\vec{n}_{\beta_{-1}}=(1,-1,1)$

$\vec{n}_\alpha=(3,1,-2)$

$\vec{n}_\alpha.\vec{n}_{\beta_{-1}}=(1,-1,1).(3,1,-2)=$

$=1\times3-1\times1-1\times2=0$

Então, $\vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_{\beta_{-1}}$, pelo que $\alpha \perp \beta_{-1}$.

74.1. a) $r: (x,y,z)=(1,-3,1)+k(1,-3,1), k\in\mathbb{R}$

b) Ponto genérico de r:

$(x,y,z)=(1+k,-3-3k,1+k), k\in\mathbb{R}$

Intersetando r com α

$1+k-3(-3-3k)+1+k=5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+k+9+9k+1+k=5 \Leftrightarrow 11k=-6 \Leftrightarrow k=-\frac{6}{11}$

Ponto de α mais próximo de A:

$$\left(1-\frac{6}{11},-3+\frac{18}{11},1-\frac{6}{11}\right)=\left(\frac{5}{11},-\frac{15}{11},\frac{5}{11}\right)$$

74.2. a) $\vec{n}_\alpha=(1,-3,1)$

$\frac{m-1}{1}=\frac{m}{-3}=\frac{3m}{1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m-1=\frac{m}{-3} \wedge \frac{m}{-3}=3m \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3m+3=m \wedge m=-9m \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4m=3 \wedge 10m=0 \Leftrightarrow m=\frac{3}{4} \wedge m=0$

Não existe valor de m para o qual a reta s é perpendicular a α.

b) $\vec{n}_\alpha\cdot\vec{s}=0 \Leftrightarrow (1,-3,1).(m-1,m,3m)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m-1-\cancel{3m}+\cancel{3m}=0 \Leftrightarrow m=1$

75. $\vec{r}=(1,0,1)$; $\vec{n}=(0,1,0)$ é um vetor normal a xOz.

$\vec{r}\cdot\vec{n}=(1,0,1)\cdot(0,1,0)=1\times0+0\times1+1\times0=0$

$\vec{r}\perp\vec{n}$

Logo, r é paralela a xOz.

$(0,0,1)\in r$ e $(0,0,1)\in xOz$

Logo, r está contida em xOz.
Em alternativa, podia-se ter verificado que dois pontos da reta pertencem ao eixo xOz.

76. $\vec{n}_\alpha=(-2,1,-1)$; $\vec{r}=(4,2,-1)$

$\frac{4}{-2}\neq\frac{2}{1}$

$\vec{n}_\alpha$ e $\vec{r}$ não são colineares.

Logo, r não é perpendicular a α.

Pág. 213

77.1. $2\times(-3)-k\times4-1-1=0$

$\Leftrightarrow -4k=8 \Leftrightarrow k=-2$

$2x+2y-z-1=0$

77.2. $\vec{r}=(2,1,-3)$ e $\vec{n}=(2,-k,-1)$

$\vec{r}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow (2,1,-3)\cdot(2,-k,-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\times2-k-3\times(-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -k=-7 \Leftrightarrow k=7$

78.1. a) *CDF // ADE*

$CDF: x+y+z+d=0$ e $D\in CDF$

$0-3+0+d=0 \Leftrightarrow d=3$

CDF: $x+y+z+3=0$

b) $(x,y,z)=(0,-3,0)+k(1,1,1),\ k\in\mathbb{R}$

78.2. Ponto genérico da reta que passa por D e é perpendicular a ABE.

$(x,y,z)=(k,-3+k,k), k\in\mathbb{R}$

Seja P o ponto de interseção da reta com o plano ABE.

$k-3+k+k-3=0 \Leftrightarrow 3k=6 \Leftrightarrow k=2$

$P(2,-3+2,2)=(2,-1,2)$

$\overline{DP}=\sqrt{(2-0)^2+(-1+3)^2+(2-0)^2}=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$

79.1. OPQ: $-x+y+d=0$ e $Q \in OPQ$

$-3+3+d=0 \Leftrightarrow d=0$

OPQ: $-x+y=0$

79.2. Seja $\overrightarrow{n_1}$ um vetor normal a OPQ e $\overrightarrow{n_2}$ um vetor normal ao plano definido por $-3x+y+z=0$

$\overrightarrow{n_1}=(-1,1,0)$ e $\overrightarrow{n_2}=(-3,1,1)$

$\frac{-1}{-3} \neq \frac{1}{1}$

$\overrightarrow{n_1}$ e $\overrightarrow{n_2}$ não são colineares.

Logo, os planos não são paralelos.

$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}=(-1,1,0)\cdot(-3,1,1)=-1\times(-3)+1\times1+0\times1=4 \neq 0$

Logo, os planos não são perpendiculares.
Então, são oblíquos.

79.3. P é a interseção da reta PV com o plano OPQ.

PV: $(x, y, z)=(6, -2, 3)+k(-1, 1, 0)$, $k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x, y, z)=(6-k, -2+k, 3)$, $k \in \mathbb{R}$

$-(6-k)+(-2+k)=0 \Leftrightarrow -6+k-2+k=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2k=8 \Leftrightarrow k=4$

$P(6-4, -2+4, 3)=(2, 2, 3)$

79.4. $(x, y, z)=(3, 3, 0)+k(-1, 1, 0)$, $k \in \mathbb{R}$

Pág. 214

80.1. $(x, y, z)=(-2, 9, -4)+k(4, -8, 1)$, $k \in \mathbb{R}$

80.2. a) Seja $\vec{r}$ um vetor diretor de r e $\vec{n}$ um vetor normal ao plano.

$r \parallel \alpha$. Então $\vec{r} \perp \vec{n}$

$\vec{r}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow (3m, m, m-5)\cdot(4, -8, 1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3m\times4-8m+m-5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12m-8m+m=5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5m=5 \Leftrightarrow m=1$

b) $\vec{r} \perp \vec{n} \wedge (n, -1, m) \in r \wedge (n, -1, m) \in \alpha$

$\vec{r}\cdot\vec{n}=0 \wedge 4n-8\times(-1)+m+3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m=1 \wedge 4n+8+1+3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m=1 \wedge 4n=-12 \Leftrightarrow m=1 \wedge n=-3$

81.1. $EFG \parallel ABC$

EFG: $x-2y-2z+d=0$ e $F \in EFG$

$2-2\times7-2\times4+d=0 \Leftrightarrow d=20$

EFG: $x-2y-2z+20=0$

81.2. FB: $(x, y, z)=(2, 7, 4)+k(1, -2, -2)$, $k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x, y, z)=(2+k, 7-2k, 4-2k)$, $k \in \mathbb{R}$

Seja P um ponto de FB. $P(2+k, 7-2k, 4-2k)$

$\overrightarrow{FP}=P-F=$

$=(2+k, 7-2k, 4-2k)-(2, 7, 4)=(k, -2k, -2k)$

$\|\overrightarrow{FP}\|=9 \Leftrightarrow \sqrt{k^2+(-2k)^2+(-2k)^2}=9 \Leftrightarrow \sqrt{9k^2}=9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3|k|=9 \Leftrightarrow |k|=3 \Leftrightarrow k=-3 \vee k=3$

Se $k=-3$

$P(2-3, 7-2\times(-3), 4-2\times(-3))=(-1, 13, 10)$

Se $k=3$

$P(2+3, 7-2\times3, 4-2\times3)=(5, 1, -2)$

$(-1, 13, 10)$ e $(5, 1, -2)$

81.3. $(1, -2, -2) \perp \overrightarrow{n_\alpha} \Leftrightarrow (1, -2, -2)\cdot(m, 2m, -3)=0$

$\Leftrightarrow m-4m+6=0 \Leftrightarrow 6=3m \Leftrightarrow m=2$

82.1. $A(x, 0, 0)$ e $A \in ABC$

$2x+0+2\times0-4=0 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$

$A(2, 0, 0)$

$B(0, y, 0)$ e $B \in ABC$

$2\times0+y+2\times0-4=0 \Leftrightarrow y=4$

$B(0, 4, 0)$

$C(0, 0, z)$

$2\times0+0+2z-4=0 \Leftrightarrow 2z=4 \Leftrightarrow z=2$

$C(0, 0, 2)$

$A_{[OAB]}=\frac{\overline{OA}\times\overline{OB}}{2}=\frac{2\times4}{2}=4$ u. a.

$V_{[OABC]}=\frac{1}{3}\times A_{[OAB]}\times\overline{OC}=\frac{1}{3}\times4\times2=\frac{8}{3}$ u. v.

82.2. $(x, y, z)=(0, 0, 0)+k(2, 1, 2)$, $k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x, y, z)=k(2, 1, 2)$, $k \in \mathbb{R}$

82.3. $\alpha: kx+ky+y+kz-1=0$

$\Leftrightarrow kx+(k+1)y+kz-1=0$

$\overrightarrow{n_\alpha}=(k, k+1, k)$

a) $\frac{k}{2}=\frac{k+1}{1}=\frac{k}{2} \Leftrightarrow k=2k+2 \Leftrightarrow k=-2$

b) $(2, 1, 2)\cdot\overrightarrow{n_\alpha}=0$

$\Leftrightarrow (2, 1, 2)\cdot(k, k+1, k)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2k+k+1+2k=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5k=-1 \Leftrightarrow k=-\frac{1}{5}$

c) $B(0,4,0)$

$k\times 0+k\times 4+4+k\times 0-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4k=-3 \Leftrightarrow k=-\dfrac{3}{4}$

Pág. 215

83.1. $\overrightarrow{AB}=B-A=(0,\,6,\,0)-(3,\,0,\,0)=(-3,\,6,\,0)$

Seja $\overrightarrow{n_\alpha}$ um vetor normal a plano α e $\vec{r}$ um vetor diretor da reta *r*.

$\overrightarrow{n_\alpha}=(a,b,c) \qquad \vec{r}=(0,1,-2)$

$\begin{cases} \overrightarrow{n_\alpha}\cdot\vec{r}=0 \\ \overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a,b,c)\cdot(0,1,-2)=0 \\ (a,b,c)\cdot(-3,6,0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b-2c=0 \\ -3a+6b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\dfrac{1}{2}b \\ a=2b \end{cases}$

$\overrightarrow{n_\alpha}=\left(2b,\,b,\,\dfrac{1}{2}b\right),\ b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Se, por exemplo, $b=2$, $\overrightarrow{n_\alpha}=(4,\,2,\,1)$.

$\alpha: 4x+2y+z+d=0$ e $A\in\alpha$

$4\times 3+2\times 0+0+d=0 \Leftrightarrow d=-12$

$\alpha: 4x+2y+z-12=0$

83.2. a) $C(1,\,2,\,z_C)$ e $C\in\alpha$

$4\times 1+2\times 2+z-12=0 \Leftrightarrow z_C=4$

$C(1,\,2,\,4)$

b) $B(0,\,6,\,0)$

$A_{[OAB]}=\dfrac{3\times 6}{2}=9$ u. a.

$V_{[OABC]}=\dfrac{1}{3}\times 9\times 4=12$ u. v.

83.3. a) $\beta: y-2z+d=0$ e $O\in\beta$

$0-2\times 0+d=0 \Leftrightarrow d=0$

$\beta: y-2z=0$

b) Vetor diretor de Ox : $(1,0,0)$, por exemplo.

$(1,\,0,\,0)\cdot(0,\,1,\,-2)=1\times 0+0\times 1+0\times(-2)=0$

Logo, o eixo Ox é paralelo ao plano β .

$O\in Ox$ e $O\in\beta$

Então, o eixo Ox está contido em β .

84.1. a) $\overline{OC}\times\overline{OA}\times\overline{OD}=18$

$3\times 3\times\overline{OD}=18 \Leftrightarrow \overline{OD}=2$

$E(0,-3,2)$ e $C(3,0,0)$

Sejam *M* e α o ponto médio e o plano mediador de $[EC]$, respetivamente.

$M\left(\dfrac{0+3}{2},\dfrac{-3+0}{2},\dfrac{2+0}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2},1\right)$

$\overrightarrow{EC}=C-E=(3,0,0)-(0,-3,2)=(3,3,-2)$

$EC\perp\alpha$

$\alpha: 3x+3y-2z+d=0$ e $M\in\alpha$

$3\times\dfrac{3}{2}+3\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)-2\times 1+d=0 \Leftrightarrow d=2$

$\alpha: 3x+3y-2z+2=0$

b) $\overrightarrow{ED}=D-E=(0,\,0,\,2)-(0,\,-3,\,2)=(0,\,3,\,0)$

Seja $\vec{n}=(a,\,b,\,c)$ um vetor normal ao plano *EDC*.

$\vec{n}\perp\overrightarrow{ED}$ e $\vec{n}\perp\overrightarrow{EC}$

$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{ED}=0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a,\,b,\,c)\cdot(0,\,3,\,0)=0 \\ (a,\,b,\,c)\cdot(3,\,3,\,-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3b=0 \\ 3a+3b-2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=\dfrac{3}{2}a \end{cases}$

$\vec{n}=\left(a,\,0,\,\dfrac{3}{2}a\right),\ a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Se, por exemplo, $a=2$, $\vec{n}=(2,\,0,\,3)$

$EDC: 2x+3z+d=0$ e $D\in EDC$

$2\times 0+3\times 2+d=0 \Leftrightarrow d=-6$

$EDC: 2x+3z-6=0$

84.2. a) $\overrightarrow{DB}=B-D=(3,\,-3,\,0)-(0,\,0,\,2)=(3,\,-3,\,-2)$

$\alpha: 3x-3y-2z+d=0$ e $F(3,-3,2)\in\alpha$

$3\times 3-3\times(-3)-2\times 2+d=0 \Leftrightarrow d=-14$

$\alpha: 3x-3y-2z-14=0$

b) $\overrightarrow{AC}=C-A=(3,\,0,\,0)-(0,\,-3,\,0)=(3,\,3,\,0)$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=(3,\,3,\,0)\cdot(3,\,-3,\,-2)=$

$=3\times 3+3\times(-3)+0\times(-2)=0$

Logo, $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{DB}$, pelo que, a reta *AC* é paralela a α .

$3\times 0-3\times(-3)-2\times 0-14=0$

$\Leftrightarrow -5=0$ (Proposição falsa)

Logo, $A\notin\alpha$ e $A\in AC$.

Então, *AC* é estritamente paralela a α .

85. $(x,\,y,\,z)=(1,\,0,\,0)+k(0,\,1,\,1),\ k\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x,\,y,\,z)=(1,\,k,\,k),\ k\in\mathbb{R}$

$\overrightarrow{OA}=(1,\,k_A,\,k_A)$

$\overrightarrow{OC}=(1,\,k_C,\,k_C)$

$\left\|\overrightarrow{OA}\right\|=\left\|\overrightarrow{OC}\right\| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{1^2+k_A^{\,2}+k_A^{\,2}}=\sqrt{1+k_C^{\,2}+k_C^{\,2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+2k_A^{\,2}}=\sqrt{1+2k_C^{\,2}}$

Como os radicandos, bem como os dois membros da equação são não negativos, elevando os dois ao quadrado, obtém-se,

$1+2k_A{}^2=1+2k_C{}^2 \Leftrightarrow k_A{}^2=k_C{}^2 \Leftrightarrow k_A=\pm k_C$

Como os pontos A e C não podem ser coincidentes, $k_A \neq k_C$.

Então, $k_A=-k_C$.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0 \Leftrightarrow (1,-k_C,-k_C)\cdot(1,k_C,k_C)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-k_C{}^2-k_C{}^2=0 \Leftrightarrow 1=2k_C{}^2 \Leftrightarrow k_C{}^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow k_C=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$A\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$C\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$B=C+\overrightarrow{OA}=\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=(2,0,0)$

$A\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $B(2,0,0)$ e $C\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Pág. 216

86.1. a) $P(x,0,0)$ e $P\in PQV$

$6x+0-12=0 \Leftrightarrow x=2$

$P(2,0,0)$

$[NOPQ]$ é um quadrado.

$N(0,2,0)$

$r:(x,y,z)=(0,2,0)+k(6,0,1),\ k\in\mathbb{R}$

b) $V(1,1,z)$ e $V\in PQV$

$6\times1+z-12=0 \Leftrightarrow z=6$

$V(1,1,6)$

$\overrightarrow{VN}=N-V=(0,2,0)-(1,1,6)=(-1,1,-6)$

$s:(x,y,z)=(2,0,0)+k(-1,1,-6),\ k\in\mathbb{R}$

86.2. $\overrightarrow{VP}=P-V=(2,0,0)-(1,1,6)=(1,-1,-6)$

$\overrightarrow{VN}=(-1,1,-6)$

$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{VP}\cdot\overrightarrow{VN}}{\|\overrightarrow{VP}\|\times\|\overrightarrow{VN}\|}=$

$=\frac{(1,-1,-6)\cdot(-1,1,-6)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-6)^2}\times\sqrt{(-1)^2+1^2+(-6)^2}}=$

$=\frac{1\times(-1)-1\times1-6\times(-6)}{\sqrt{38}\times\sqrt{38}}=\frac{34}{38}=\frac{17}{19}$

86.3. $\overrightarrow{ON}=(0,2,0)$ e $\overrightarrow{OV}=(1,1,6)$

Seja $\vec{n}=(a,b,c)$ um vetor normal a OVN.

$\vec{n}\perp\overrightarrow{ON}$ e $\vec{n}\perp\overrightarrow{OV}$

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{ON}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{OV}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a,b,c)\cdot(0,2,0)=0\\ (a,b,c)\cdot(1,1,6)=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2b=0\\ a+b+6c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=0\\ a=-6c\end{cases}$

$\vec{n}=(-6c,0,c),\ c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Se, por exemplo, $c=1$, $\vec{n}=(-6,0,1)$

$OVN: -6x+z+d=0$ e $O\in OVN$

$-6\times0+0+d=0 \Leftrightarrow d=0$

$OVN: -6x+z=0$

87.1. Seja $\vec{n}=(a,b,c)$ um vetor normal a ABC.

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ e $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a,b,c)\cdot(2,-2,1)=0\\ (a,b,c)\cdot(3,0,3)=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2a-2b+c=0\\ 3a+3c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a-2b-a=0\\ c=-a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\frac{1}{2}a\\ c=-a\end{cases}$

$\vec{n}=\left(a,\frac{1}{2}a,-a\right),\ a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Se, por exemplo, $a=2$, $\vec{n}=(2,1,-2)$.

$ABC: 2x+y-2z+d=0$ e . $A\in ABC$.

$2\times1+0-2\times1+d=0 \Leftrightarrow d=0$

$ABC: 2x+y-2z=0$

87.2. $E=A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=(1,0,1)+\frac{1}{2}(3,0,3)$

$=\left(1+\frac{3}{2},0+0,1+\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},0,\frac{5}{2}\right)$

87.3. $EV\perp ABC$ e $E\in EV$

$EV:(x,y,z)=\left(\frac{5}{2},0,\frac{5}{2}\right)+k(2,1,-2),\ k\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x,y,z)=\left(\frac{5}{2}+2k,k,\frac{5}{2}-2k\right),\ k\in\mathbb{R}$

$\overrightarrow{EV}=V-E=\left(\frac{5}{2}+2k,k,\frac{5}{2}-2k\right)-\left(\frac{5}{2},0,\frac{5}{2}\right)=$

$=(2k,k,-2k)$

$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{9}=3$

$V_{[ABCDV]}=9 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\times3^2\times\|\overrightarrow{EV}\|=9 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{EV}\|=3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(2k)^2+k^2+(-2k)^2}=3 \Leftrightarrow \sqrt{9k^2}=3 \Leftrightarrow 3|k|=3$

$\Leftrightarrow |k|=1 \Leftrightarrow k=-1 \vee k=1$

Como V tem ordenada negativa, $k=-1$.

$V\left(\frac{5}{2}+2\times(-1),-1,\frac{5}{2}-2\times(-1)\right)=\left(\frac{1}{2},-1,\frac{9}{2}\right)$

88.1. $F(4,4,4)$ e $H(4,2,4)$

$\alpha\perp\overrightarrow{OF}$ e $H\in\alpha$

$\alpha: 4x+4y+4z+d=0$ e $H\in\alpha$

$4\times4+4\times2+4\times4+d=0 \Leftrightarrow d=-40$

$\alpha: 4x+4y+4z-40=0 \Leftrightarrow x+y+z-10=0$

Pág. 217

88.2. $[EB]$ e $[CD]$ são diagonais faciais paralelas a *HI*.

$[AC]$ e $[EG]$ são diagonais faciais paralelas a *HJ*.

$[AD]$ e $[BG]$ são diagonais faciais paralelas a *IJ*.

Sendo estas diagonais paralelas a retas contidas no plano α , são paralelas ao plano α .
Então, há 6 diagonais das faces do cubo que estão contidas em retas paralelas ao plano α .

88.3. *OF*: $(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(4, 4, 4), k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (4k, 4k, 4k), k \in \mathbb{R}$

$4k + 4k + 4k - 10 = 0 \Leftrightarrow 12k = 10 \Leftrightarrow k = \dfrac{5}{6}$

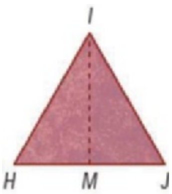
$P\left(4 \times \dfrac{5}{6}, 4 \times \dfrac{5}{6}, 4 \times \dfrac{5}{6}\right) = \left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{10}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$

88.4. Resolução da Ana:

$A_{[FHJ]} = \dfrac{\overline{HF} \times \overline{FJ}}{2} = \dfrac{2 \times 2}{2} = 2$ u.a.

$V_{[FHIJ]} = \dfrac{1}{3} \times A_{[FHJ]} \times \overline{FI} = \dfrac{1}{3} \times 2 \times 2 = \dfrac{4}{3}$ u.v.

Resolução do João:



$H(4, 2, 4)$ e $J(2, 4, 4)$

$\overline{HJ} = \sqrt{(4-2)^2 + (2-4)^2 + (4-4)^2} =$

$= \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Seja *M* o ponto médio de $[HJ]$.

$\overline{HI}^2 = \overline{HM}^2 + \overline{IM}^2 \Leftrightarrow \sqrt{8}^2 = \sqrt{2}^2 + \overline{IM}^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{IM}^2 = 8 - 2 \underset{}{\overset{(\overline{IM} > 0)}{\Leftrightarrow}} \overline{IM} = \sqrt{6}$

$A_{[HIJ]} = \dfrac{\overline{HJ} \times \overline{IM}}{2} = \dfrac{2\sqrt{2} \times \sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{3}$ u. a.

$F(4, 4, 4)$ e $P\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{10}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$

$\overline{PF} = \sqrt{\left(4 - \dfrac{10}{3}\right)^2 + \left(4 - \dfrac{10}{3}\right)^2 + \left(4 - \dfrac{10}{3}\right)^2}$

$= \sqrt{\dfrac{4}{9} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{4}{9}} = \sqrt{\dfrac{12}{9}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$V_{[FHIJ]} = \dfrac{1}{3} \times A_{[HIJ]} \times \overline{PF} = \dfrac{1}{3} \times 2\sqrt{3} \times \dfrac{2\sqrt{3}}{3} =$

$= \dfrac{4 \times 3}{3 \times 3} = \dfrac{4}{3}$ u. v.

89.1. $\overrightarrow{AO} = O - A = (0, 0, 0) - (2, 3, -1) = (-2, -3, 1)$

$P(x, 0, 0)$

$\overrightarrow{AP} = P - A = (x, 0, 0) - (2, 3, -1) = (x-2, -3, 1)$

$\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{AP} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \Leftrightarrow (-2, -3, 1) \cdot (x-2, -3, 1) = 0$

$\Leftrightarrow -2(x-2) + 9 + 1 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 5 \Leftrightarrow x = 7$

$P(7, 0, 0)$

89.2. $EF \perp ABC$ e $E \in EF$

$EF: (x, y, z) = (1, 2, 4) + k(2, -1, 2), k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (1 + 2k, 2 - k, 4 + 2k), k \in \mathbb{R}$

F é o ponto de interseção da reta *EF* com o plano *ABC*.

$2(1+2k) - (2-k) + 2(4+2k) + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 + 4k - 2 + k + 8 + 4k + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9k = -9 \Leftrightarrow k = -1$

$F(1 + 2 \times (-1), 2 - (-1), 4 + 2 \times (-1)) = (-1, 3, 2)$

90. *D* é o ponto de interseção da reta *HD* com o plano *ABC*.

$HD \perp ABC$ e $H \in HD$

HD: $(x, y, z) = (4, -5, 5) + k(2, -1, 3), k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (4 + 2k, -5 - k, 5 + 3k), k \in \mathbb{R}$

$2(4+2k) - (-5-k) + 3(5+3k) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8 + 4k + 5 + k + 15 + 9k = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 14k = -28 \Leftrightarrow k = -2$

$D(4 + 2 \times (-2), -5 - (-2), 5 + 3 \times (-2)) = (0, -3, -1)$

91.1. a) $(x, y, z) = (3, 6, 9) + k(1, 2, 2), k \in \mathbb{R}$

b) *E* é o ponto de interseção de *r* com o plano *ABC*.

$r: (x, y, z) = (3 + k, 6 + 2k, 9 + 2k), k \in \mathbb{R}$

$3 + k + 2 \times (6 + 2k) + 2 \times (9 + 2k) - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 + k + 12 + 4k + 18 + 4k - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9k = -27 \Leftrightarrow k = -3$

$E(3 - 3, 6 + 2 \times (-3), 9 + 2 \times (-3)) = (0, 0, 3)$

91.2. $B(0, y, 0)$ e $B \in ABC$

$0 + 2 \times y + 2 \times 0 - 6 = 0 \Leftrightarrow 2y = 6 \Leftrightarrow y = 3$

Logo, a ordenada de *B* é 3.

91.3. $\overrightarrow{BV} = V - B = (3, 6, 9) - (0, 3, 0) = (3, 3, 9)$

$\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BE} = 2 \times (E - B) = 2 \times ((0, 0, 3) - (0, 3, 0)) =$

$= 2 \times (0, -3, 3) = (0, -6, 6)$

$\overrightarrow{BV} \cdot \overrightarrow{BD} = (3, 3, 9) \cdot (0, -6, 6) =$

$= 3 \times 0 + 3 \times (-6) + 9 \times 6 = -18 + 54 = 36$

Pág. 218

92.1. Para que a reta seja paralela ao plano *ABC*, o seu vetor diretor tem de ser perpendicular ao vetor normal ao plano. Como *ABC // EFG*, um vetor normal ao plano *ABC* é $(7, 1, -4)$.

$(7, 1, -4) \cdot (1, 1, 2) = 7 \times 1 + 1 \times 1 - 4 \times 2 = 0$

$(7, 1, -4) \cdot (-1, 1, -2) = 7 \times (-1) + 1 \times 1 - 4 \times (-2) \neq 0$

Então, tendo em conta os vetores, poderá ser a opção **(A)** ou a opção **(B)**.

$ABC: 7x + y - 4z + d = 0 \wedge C \in ABC$

$7 \times 4 - 4 - 4 \times (-1) + d = 0 \Leftrightarrow d = -28$

$ABC: 7x + y - 4z - 28 = 0$

$A(x, 0, 0)$ e $A \in ABC$

$7x + 0 - 4 \times 0 - 28 = 0 \Leftrightarrow 7x = 28 \Leftrightarrow x = 4$

$A(4, 0, 0)$

$(4, 0, 0) = (3, 1, 2) + k(1, 1, 2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 3 + k \\ 0 = 1 + k \\ 0 = 2 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -1 \\ k = -1 \end{cases}$ Sistema impossível.

Logo, por exclusão de partes, o ponto A pertence à reta definida na opção **(B)**.

92.2. a) E é o ponto de interseção da reta AE com o plano EFG.

$AE \perp EFG$

AE: $(x, y, z) = (4, 0, 0) + k(7, 1, -4),\ k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (4 + 7k, k, -4k)$

$7(4 + 7k) + k - 4 \times (-4k) + 38 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 28 + 49k + k + 16k + 38 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 66k = -66 \Leftrightarrow k = -1$

$E(4 + 7 \times (-1), -1, -4 \times (-1)) = (-3, -1, 4)$

b) O ponto do plano EFG que está mais próximo de C é o ponto G.

$G = C + \overrightarrow{AE} = (4, -4, -1) + (-7, -1, 4) =$

$= (-3, -5, 3)$

Cálculo auxiliar:

$\overrightarrow{AE} = E - A = (-3, -1, 4) - (4, 0, 0) =$

$= (-7, -1, 4)$

93.1. Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$ vetores diretores das retas r e s, respetivamente.

$\vec{r} = (-1, 2, 1)$ e $\vec{s} = (1, 2, 0)$

$\frac{1}{-1} \neq \frac{2}{2}$

Logo, r e s não são paralelas.

$(0, 0, -1)$ é um ponto do semieixo negativo Oz e pertence à reta r.

$(0, 0, -1) = (1, 2, -1) + k(1, 2, 0)$

$\begin{cases} 0 = 1 + k \\ 0 = 2 + 2k \\ -1 = -1 + 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = -1 \\ -1 = -1 \end{cases}$

Logo, o ponto $(0, 0, -1) \in s$.

Então, as retas r e s são concorrentes num ponto do semieixo negativo Oz.

93.2. Seja α o plano definido pelas retas r e s e seja $\vec{n} = (a, b, c)$ um seu vetor normal.

$\vec{n} \perp \vec{r}$ e $\vec{n} \perp \vec{s}$

$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 2, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, 2, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b + c = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + 2b + c = 0 \\ a = -2b \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -4b \\ a = -2b \end{cases}$

$\vec{n} = (-2b, b, -4b),\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se, por exemplo, $b = 1$, $\vec{n} = (-2, 1, -4)$.

$\alpha: -2x + y - 4z + d = 0$ e $(0, 0, -1) \in \alpha$

$-2 \times 0 + 0 - 4 \times (-1) + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$

$\alpha: -2x + y - 4z - 4 = 0$

93.3. $I(0, 0, -1)$ e $A(-3, 6, 2)$

Seja M o ponto médio de $[IA]$ e seja β o seu plano mediador.

$M\left(\frac{0-3}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{-1+2}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, 3, \frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{IA} \perp \alpha$

$\overrightarrow{IA} = A - I = (-3, 6, 2) - (0, 0, -1) = (-3, 6, 3)$

$\alpha: -3x + 6y + 3z + d = 0$ e $M \in \alpha$

$-3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 6 \times 3 + 3 \times \frac{1}{2} + d = 0 \Leftrightarrow d = -24$

$\alpha: -3x + 6y + 3z - 24 = 0$

$s: (x, y, z) = (1, 2, -1) + k(1, 2, 0),\ k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (1 + k, 2 + 2k, -1),\ k \in \mathbb{R}$

$-3 \times (1 + k) + 6 \times (2 + 2k) + 3 \times (-1) - 24 = 0$

$\Leftrightarrow -3 - 3k + 12 + 12k - 3 - 24 = 0$

$\Leftrightarrow 9k = 18 \Leftrightarrow k = 2$

$B(1 + 2, 2 + 2 \times 2, -1) = (3, 6, -1)$

Pág. 219

94.1. a) E é o ponto de interseção da reta EV com o plano ABC.

$EV \perp ABC$

$EV: (x, y, z) = (7, 8, -4) + k(2, 1, -2),\ k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (7 + 2k, 8 + k, -4 - 2k),\ k \in \mathbb{R}$

$2 \times (7 + 2k) + 8 + k - 2 \times (-4 - 2k) + 6 = 0$

$\Leftrightarrow 14 + 4k + 8 + k + 8 + 4k + 6 = 0$

$\Leftrightarrow 9k = -36 \Leftrightarrow k = -4$

$E(7 + 2 \times (-4), 8 - 4, -4 - 2 \times (-4)) = (-1, 4, 4)$

b) $A(0, 0, z)$ e $A \in ABC$

$2 \times 0 + 0 - 2z + 6 = 0 \Leftrightarrow z = 3$

$A(0, 0, 3)$

$\overline{AE} = \sqrt{(-1-0)^2 + (4-0)^2 + (4-3)^2}$

$= \sqrt{1 + 16 + 1} = \sqrt{18}$

$\overline{AC} = 2\overline{AE} = 2\sqrt{18}$

$A_{[ABCD]} = \dfrac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{2} = \dfrac{2\sqrt{18} \times 2\sqrt{18}}{2}$

$= 2 \times 18 = 36$ u. a.

Nota: Repare que a área de um quadrado é dada pelo quadrado do comprimento do seu lado, mas também por metade do produto do comprimento das suas diagonais.

$\overline{EV} = \sqrt{(-1-7)^2 + (4-8)^2 + (4+4)^2}$

$= \sqrt{64+16+64} = \sqrt{144} = 12$

$V_{[ABCDV]} = \dfrac{1}{3} \times A_{[ABCD]} \times \overline{EV} = \dfrac{1}{3} \times 36 \times 12$

$= 144$ u. v.

94.2. $\text{raio}^2 = \overline{OV}^2 = \sqrt{(7-0)^2 + (8-0)^2 + (-4-0)^2}^{\,2}$

$= 49 + 64 + 16 = 129$

Equação da superfície esférica:

$(x-7)^2 + (y-8)^2 + (z+4)^2 = 129$

95.1. $A_{[OABC]} = 25 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 25 \overset{(\overline{OA}>0)}{\Leftrightarrow} \overline{OA} = 5$

$A(5, 0, 0)$ e $B(5, 5, 0)$

$V_{[OABCD]} = 50 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \times 25 \times \overline{OD} = 50 \Leftrightarrow \overline{OD} = 6$

$D(0, 0, 6)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (5, 5, 0) - (5, 0, 0) = (0, 5, 0)$

$\overrightarrow{AD} = D - A = (0, 0, 6) - (5, 0, 0) = (-5, 0, 6)$

Seja $\vec{n} = (a, b, c)$ um vetor normal ao plano ABD.

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ e $\vec{n} \perp \overrightarrow{AD}$

$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, 5, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-5, 0, 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5b = 0 \\ -5a + 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \dfrac{6}{5}c \end{cases}$

$\vec{n} = \left(\dfrac{6}{5}c, 0, c\right), c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

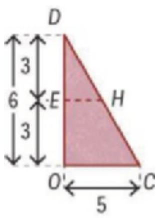
Se, por exemplo, $c = 5$, $\vec{n} = (6, 0, 5)$.

Seja β o plano paralelo a ABD e que passa por $C(0, 5, 0)$.

$\beta: 6x + 5z + d = 0$ e $C \in \beta$

$6 \times 0 + 5 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$

$\beta: 6x + 5z = 0$



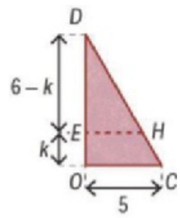
95.2. $\dfrac{\overline{EH}}{5} = \dfrac{3}{6} \Leftrightarrow \overline{EH} = \dfrac{15}{6} = \dfrac{5}{2}$

$A_{[EFGH]} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}$ u.a.

$V_{[DEFGH]} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{25}{4} \times 3 = \dfrac{25}{4}$ u. v.

$V_{[OABCEFGH]} = V_{[OABCD]} - V_{[DEFGH]} = 50 - \dfrac{25}{4} = \dfrac{175}{4}$ u. v.

95.3. $\dfrac{\overline{EH}}{5} = \dfrac{6-k}{6} \Leftrightarrow \overline{EH} = \dfrac{30-5k}{6} \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow \overline{EH} = 5 - \dfrac{5}{6}k$

$A_{[EFGH]} = \left(5 - \dfrac{5}{6}k\right)^2$

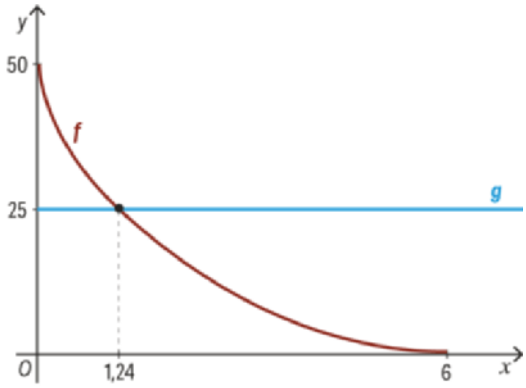
$V_{[DEFGH]} = \dfrac{1}{3} \times \left(5 - \dfrac{5}{6}k\right)^2 \times (6-k)$

$V_{[OABCEFGH]} = \dfrac{1}{2} V_{[OABCD]}$

$\Leftrightarrow V_{[OEFGH]} = \dfrac{1}{2} \times 50 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \times \left(5 - \dfrac{5}{6}k\right)^2 \times (6-k) = 25$

Sejam *f* e *g* as funções definidas, respetivamente, por:

$f(x) = \dfrac{1}{3}\left(5 - \dfrac{5}{6}x\right)^2 \times (6-x)$ e $g(x) = 25$



O volume do tronco da pirâmide $[OABCEFG]$ é metade do volume da pirâmide para $k \approx 1{,}24$.

Máximo On

Pág. 220

Tarefa 1

1. A partir das coordenadas dos pontos 1 e 2, x1 e y1 para o ponto 1 e x2 e y2 para o ponto 2, se as abcissas forem iguais, a função devolve "None" uma vez que o declive da reta não fica definido, caso contrário, devolve o valor do declive calculado como (y2-y1)/(x2-x1).

2.1. A função calcular_inclinacao_em graus não calcula corretamente a inclinação a partir do declive quando o declive é negativo.

2.2. Se o declive for positivo ou zero, calcula a inclinação como é apresentado e se for negativo, soma 180 graus ao apresentado.

2.3. Por exemplo:

```
import math
def calcular_declive(ponto1, ponto2):
    x1, y1 = ponto1
    x2, y2 = ponto2
    if x2 - x1 == 0:
        return None  # Declive indefinido (reta vertical)
    m = (y2 - y1) / (x2 - x1)
    return m
def calcular_inclinacao_em_graus(declive):
    angulo_radianos = math.atan(declive)
    if declive >= 0:
      angulo_graus = math.degrees(angulo_radianos)
    else:
      angulo_graus = 180 + math.degrees(angulo_radianos)
    return angulo_graus

print("Digite as coordenadas do primeiro ponto (x1, y1):")
x1 = float(input("x1: "))
y1 = float(input("y1: "))
ponto1 = (x1, y1)
print("Digite as coordenadas do segundo ponto (x2, y2):")
x2 = float(input("x2: "))
y2 = float(input("y2: "))
ponto2 = (x2, y2)
declive = calcular_declive(ponto1, ponto2)
if declive is None:
    print("O declive da reta é indefinido (reta vertical).")
    print(f"A inclinação (ângulo) da reta em relação ao eixo x é: 90 graus")
else:
    # Cálculo da inclinação em graus
    inclinacao = calcular_inclinacao_em_graus(declive)
    print(f"O declive da reta que passa pelos pontos {ponto1} e {ponto2} é: {declive}")
    print(f"A inclinação (ângulo) da reta em relação ao eixo x é: {inclinacao:.2f} graus")
```

2.4.

a)

```
Digite as coordenadas do primeiro ponto (x1, y1):
x1: 1
y1: 0
Digite as coordenadas do segundo ponto (x2, y2):
x2: -1
y2: 1
O declive da reta que passa pelos pontos (1.0, 0.0) e (-1.0, 1.0) é: -0.5
A inclinação (ângulo) da reta é: 153.43 graus
```

153,43 graus

b)

```
Digite as coordenadas do primeiro ponto (x1, y1):
x1: 1
y1: 0
Digite as coordenadas do segundo ponto (x2, y2):
x2: 1
y2: 1
O declive da reta é indefinido (reta vertical). A inclinação da reta é 90 graus.
```

90 graus

c)

```
Digite as coordenadas do primeiro ponto (x1, y1):
x1: 0
y1: 2
Digite as coordenadas do segundo ponto (x2, y2):
x2: 5
y2: 2
O declive da reta que passa pelos pontos (0.0, 2.0) e (5.0, 2.0) é: 0.0
A inclinação (ângulo) da reta é: 0.00 graus
```

0 graus

d)

```
Digite as coordenadas do primeiro ponto (x1, y1):
x1: 1
y1: 0
Digite as coordenadas do segundo ponto (x2, y2):
x2: 2
y2: 3
O declive da reta que passa pelos pontos (1.0, 0.0) e (2.0, 3.0) é: 3.0
A inclinação (ângulo) da reta é: 71.57 graus
```

71,57 graus

Pág. 221

3.1. Por exemplo, Parte 3 – Parte 1 – Parte 2.

Alternativa: Parte 1 – Parte 3 – Parte 2

3.2. **a)**

```
Digite as coordenadas do primeiro ponto da primeira reta (x1, y1):
x1: 0
y1: 0
Digite as coordenadas do segundo ponto da primeira reta (x2, y2):
x2: 1
y2: 1
Digite as coordenadas do primeiro ponto da segunda reta (x3, y3):
x3: 1
y3: 0
Digite as coordenadas do segundo ponto da segunda reta (x4, y4):
x4: 0
y4: -1
Amplitude do ângulo entre as retas: 0.00 graus
```

0 graus

b)

```
Digite as coordenadas do primeiro ponto da primeira reta (x1, y1):
x1: 1
y1: 2
Digite as coordenadas do segundo ponto da primeira reta (x2, y2):
x2: 3
y2: 4
Digite as coordenadas do primeiro ponto da segunda reta (x3, y3):
x3: -1
y3: -1
Digite as coordenadas do segundo ponto da segunda reta (x4, y4):
x4: -2
y4: -6
Amplitude do ângulo entre as retas: 33.69 graus
```

33,69 graus

3.3. **a)** Bastava incluir a introdução da cota nos quatro pontos usados, bem como nas restantes funções que dependem das coordenadas dos pontos.

b) Bastava tirar o módulo do produto escalar, ou seja, o comando "abs".

Pág. 222

Tarefa 2

1. Por exemplo:

```
#Definir vetores
a1, b1, c1 = -1, 2, 4     # Exemplo de vetor (a1,b1,c1)
a2, b2, c2 = -2, 0, 0.5   # Exemplo de vetor (a2,b2,c2)
#Testar a perpendicularidade
if a1*a2 + b1*b2 + c1*c2 == 0:
  print("Os vetores são perpendiculares.")
else:
  print("Os vetores são perpendiculares.")

Os vetores são perpendiculares.
```

Os vetores são perpendiculares.

2. Como não se verifica a primeira condição da estrutura de condição, mas a segunda sim, porque a1=0 e a2=0, o programa calcula b2*c1 e compara com o valor de c2*b1. Como b2*c1=0 e c2*b1=12 e é falso que 0=12, é atribuído o valor lógico False a colineares. No final do programa, como colineares = False, conclui que os vetores dados não são colineares.

Pág. 223

3. Por exemplo:

```python
#Definir vetores
a1, b1, c1, d1 = 1, 1, 1, 0   # Exemplo do plano (a1)x+(b1)y+(c1)z+d1=0
a2, b2, c2, d2 = -1, 1, 0, 0  # Exemplo do plano (a2)x+(b2)y+(c2)z+d2=0
#Perpendiculares?
if a1*a2 + b1*b2 + c1*c2 == 0:
  print("Os planos são perpendiculares.")
else:
  #Colineares?
  if (a1 == 0 and a2 != 0) or (b1 == 0 and b2 != 0) or (c1 == 0 and c2 != 0):
      colineares = False
  elif (a1 == 0 and a2 == 0):
    if (b2*c1 == c2*b1):
      colineares = True
    else:
      colineares = False
  elif (b1 == 0 and b2 == 0):
    if (a2*c1 == c2*a1):
        colineares = True
    else:
      colineares = False
  elif (c1 == 0 and c2 == 0):
    if (a2*b1 == b2*a1):
      colineares = True
    else:
      colineares = False
  else:
    if (a2 / a1 == b2 / b1 == c2 / c1):
      colineares = True
    else:
      colineares = False
  # Conclusão
  if colineares == True:
    if a2*b1 == a1*b2 and b2*c1 == b1*c2 and c2*d1 == c1*d2:
      print("Os planos são coincidentes.")
    else:
      print("Os planos são estritamente paralelos.")
  else:
    print("Os planos são oblíquos.")
```

Os planos são perpendiculares.

```python
#Definir vetores
a1, b1, c1, d1 = 1, 1, 1, 0   # Exemplo do plano (a1)x+(b1)y+(c1)z+d1=0
a2, b2, c2, d2 = -1, -1, 0, 0  # Exemplo do plano (a2)x+(b2)y+(c2)z+d2=0
#Perpendiculares?
if a1*a2 + b1*b2 + c1*c2 == 0:
  print("Os planos são perpendiculares.")
else:
  #Colineares?
  if (a1 == 0 and a2 != 0) or (b1 == 0 and b2 != 0) or (c1 == 0 and c2 != 0):
      colineares = False
  elif (a1 == 0 and a2 == 0):
    if (b2*c1 == c2*b1):
      colineares = True
    else:
      colineares = False
  elif (b1 == 0 and b2 == 0):
    if (a2*c1 == c2*a1):
        colineares = True
    else:
      colineares = False
  elif (c1 == 0 and c2 == 0):
    if (a2*b1 == b2*a1):
      colineares = True
    else:
      colineares = False
  else:
    if (a2 / a1 == b2 / b1 == c2 / c1):
      colineares = True
    else:
      colineares = False
  # Conclusão
  if colineares == True:
    if a2*b1 == a1*b2 and b2*c1 == b1*c2 and c2*d1 == c1*d2:
      print("Os planos são coincidentes.")
    else:
      print("Os planos são estritamente paralelos.")
  else:
    print("Os planos são oblíquos.")
```

Os planos são oblíquos.

4. **a)** A*x0 + B*y0 + C*z0 + D
b) perpendicular.
c) oblíqua.

Avaliação global 1

Pág. 224

1. M é o ponto médio de $[AB]$.

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{OA}$$

Seja α a inclinação da reta OM.

$$\tan\alpha = \frac{\overline{AM}}{\overline{OA}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{OA}}{\overline{OA}} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26{,}6^{\circ}$$

Opção **(C)**

2. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$ são positivos e $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BD}$ são negativos.

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD} = -\left\|\overrightarrow{CA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{CD}\right\|\times\frac{\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{CA}\right\|}{\left\|\overrightarrow{CD}\right\|} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2 = -\frac{1}{2}\times 4^2 = -8$$

$$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DB} = -\left\|\overrightarrow{DC}\right\|\times\left\|\overrightarrow{DB}\right\|\times\frac{\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{DB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{DC}\right\|} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{DB}\right\|^2 = -\frac{1}{2}\times 6^2 = -18$$

Opção **(D)**

3. $$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$$

$= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = a^2$; Opção **(A)**

4. $\left\|\vec{u}\right\| = 1$ e $\left\|\vec{v}\right\| = \frac{1}{2}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\cos\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}\right) = 1\times\frac{1}{2}\cos\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}\right)$$

$$-1 \le \cos\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}\right) \le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\cos\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}\right) \le \frac{1}{2}$$

Opção **(B)**

5. $\overrightarrow{OC} = (-2, 1)$; $m_{OC} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

$r \perp OC$. Então, $m_r = 2$.

$r: y = 2x + b$ e $C \in r$

$1 = 2\times(-2) + b \Leftrightarrow 5 = b$

$r: y = 2x + 5$

Seja P o ponto da reta r com abcissa igual ao dobro da ordenada.

$P(2y, y)$ e $P \in r$

$$y = 2\times 2y + 5 \Leftrightarrow -3y = 5 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{3}$$

$P\left(-\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}\right)$; Opção **(C)**

6. $A(5, 4, 0)$ e $B(0, 4, 3)$

$\overrightarrow{OA} = (5, 4, 0)$ e $\overrightarrow{OB} = (0, 4, 3)$

Seja $\vec{n} = (a, b, c)$ um vetor normal ao plano OAB.

$\vec{n} \perp \overrightarrow{OA}$ e $\vec{n} \perp \overrightarrow{OB}$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (5, 4, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, 4, 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a + 4b = 0 \\ 4b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{5}b \\ c = -\frac{4}{3}b \end{cases}$$

$$\vec{n} = \left(-\frac{4}{5}b,\ b,\ -\frac{4}{3}b\right),\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Se, por exemplo, $b = -15$, $\vec{n} = (12, -15, 20)$.

$OAB: 12x - 15y + 20z + d = 0$ e $O \in OAB$

$12 \times 0 - 15 \times 0 + 20 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$

$OAB: 12x - 15y + 20z = 0$

Opção **(A)**

Pág. 225

7. Seja $\vec{r}$ um vetor diretor da reta r e $\vec{n}$ um vetor normal ao plano α.

$\vec{r} = (2, -1, m)$ e $\vec{n} = (3m, 3, 3)$

$r \,//\, \alpha \Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{n}$

$\vec{r} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (2, -1, m) \cdot (3m, 3, 3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6m - 3 + 3m = 0 \Leftrightarrow 9m = 3 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$

Opção **(D)**

8.1. $k^2 - 2k + 1 = 1 \Leftrightarrow k^2 - 2k = 0 \Leftrightarrow k(k-2) = 0$

$\Leftrightarrow k = 0 \vee k = 2$

I-b)

8.2. Seja P o ponto de interseção da reta r com o plano α.

$P(2, 0, z)$

$P \in \alpha \Leftrightarrow 2 - 2 \times 0 + z = 1 \Leftrightarrow z = -1$

$P(2, 0, -1)$

$$P \in r \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = m + k \\ 0 = -1 + k \\ -1 = m + kn \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = m + 1 \\ k = 1 \\ -1 = m + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ \text{———} \\ n = -2 \end{cases}$$

II-c)

8.3. $s \,//\, r$

Os vetores diretores de s ($\vec{s}$) e de r ($\vec{r}$) são colineares.

$\vec{r} = (1, 1, n)$ e $\vec{s} = (n, n, m)$

$\frac{n}{1} = \frac{n}{1} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow m = n^2$

III-a)

9.1. $BF \perp EFG$

$EFG: x + y - z + d = 0$ e $H \in EFG$

$-5 - 3 - 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = 12$

$EFG: x + y - z + 12 = 0 \Leftrightarrow -2x - 2y + 2z - 24 = 0$

Opção **(A)**

9.2. $DH \,//\, BF$

$DH: (x, y, z) = (-5, -3, 4) + k(1, 1, -1),\ k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (-5 + k, -3 + k, 4 - k),\ k \in \mathbb{R}$

$D \in xOz \Leftrightarrow D(x, 0, z)$ e $D \in DH$

$$\begin{cases} x = -5 + k \\ 0 = -3 + k \\ z = 4 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 + 3 \\ k = 3 \\ z = 4 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \text{———} \\ z = 1 \end{cases}$$

$D(-2, 0, 1)$

$\overrightarrow{OD} = (-2, 0, 1)$

$\overrightarrow{OH} = (-5, -3, 4)$

$$\cos\left(\overrightarrow{OD}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OH}\right) = \frac{\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OH}}{\left\|\overrightarrow{OD}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OH}\right\|} =$$

$$= \frac{(-2,0,1) \cdot (-5,-3,4)}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} \times \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2 + 4^2}} =$$

$$= \frac{-2 \times (-5) + 0 \times (-3) + 1 \times 4}{\sqrt{5} \times \sqrt{50}} = \frac{14}{5\sqrt{10}}$$

$$\left(\overrightarrow{OD}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OH}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{14}{5\sqrt{10}}\right) \approx 27{,}69^{\circ}$$

Opção **(D)**

Avaliação global 2

Pág. 226

1. $m_r = \frac{1}{3}$

Como $m_r > 0$ e $\frac{1}{3} = \tan\theta$,

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0{,}322$ rad

$m_t = \frac{-4}{1} = -4$

Como $m_t < 0$ e $-4 = \tan\alpha$,

$\alpha = \tan^{-1}(-4) + \pi \approx 1{,}816$ rad

$\beta = \alpha - \theta = 1{,}816 - 0{,}322 \approx 1{,}5$ rad

2. $A(4, 1)$ e $B(2, -2)$

$\vec{u} = (-3, 4)$

2.1. $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -2) - (4, 1) = (-2, -3)$

$\|\vec{u}\| \times \left(\overrightarrow{AB} + 2\vec{u}\right) \cdot \vec{u} = 5 \times \left(\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} + 2\|\vec{u}\|^2\right) =$

$= 5 \times \left((-2,-3) \cdot (-3,4) + 2 \times 5^2\right) =$

$= 5 \times \left(-2 \times (-3) - 3 \times 4 + 50\right) =$

$= 5 \times (6 - 12 + 50) = 5 \times 44 = 220$

2.2. $\cos\left(AB\hat{,}\, r\right) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \|\vec{u}\|} = \dfrac{\left|(-2,-3) \cdot (-3,4)\right|}{\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} \times 5}$

$= \dfrac{6}{5\sqrt{13}}$

$\left(AB\hat{,}\, r\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{6}{5\sqrt{13}}\right) \approx 71^{\circ}$

3.1. $A(1, -2)$

r: $r: x - 8y - 17 = 0$

$1 - 8 \times (-2) - 17 = 0$

$\Leftrightarrow 1 + 16 - 17 = 0$ Proposição verdadeira.

Logo, $A \in r$.

$B(-1, 1)$

s: $(x, y) = (3, 8) + k(4, 7)$, $k \in \mathbb{R}$

$(-1, 1) = (3, 8) + k(4, 7) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 3 + 4k \\ 1 = 8 + 7k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 = 4k \\ -7 = 7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = -1 \end{cases}$

Logo, $B \in s$.

3.2. **a)** $r: x - 8y - 17 = 0 \Leftrightarrow -8y = -x + 17$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{1}{8}x - \dfrac{17}{8}$

$m_r = \dfrac{1}{8}$

$a \perp r$. Então, $m_a = -8$

$a: y = -8x + b_1$ e $A \in a$

$-2 = -8 \times 1 + b_1 \Leftrightarrow 6 = b_1$

$a: y = -8x + 6$

$m_s = \dfrac{7}{4}$

$b \perp s$. Então, $m_b = -\dfrac{4}{7}$

$b: y = -\dfrac{4}{7}x + b_2$ e $B \in b$

$1 = -\dfrac{4}{7} \times (-1) + b_2 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{4}{7} = b_2 \Leftrightarrow b_2 = \dfrac{3}{7}$

$b: y = -\dfrac{4}{7}x + \dfrac{3}{7}$

Interseção das retas a e b:

$\begin{cases} y = -\dfrac{4}{7}x + \dfrac{3}{7} \\ y = -8x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 6 = -\dfrac{4}{7}x + \dfrac{3}{7} \\ \text{——————} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -56x + 42 = -4x + 3 \\ \text{——————} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -52x = -39 \\ \text{——————} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ y = -8 \times \dfrac{3}{4} + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ y = 0 \end{cases}$

$C\left(\dfrac{3}{4}, 0\right)$

b) $\overline{AC} = \sqrt{\left(\dfrac{3}{4} - 1\right)^2 + (0 + 2)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{16} + 4} = \dfrac{\sqrt{65}}{4}$

$\overline{BC} = \sqrt{\left(\dfrac{3}{4} + 1\right)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{\dfrac{49}{16} + 1} = \dfrac{\sqrt{65}}{4}$

Os pontos A e B encontram-se à mesma distância de C. Então, pertencem à mesma circunferência de centro em C e as retas r e s são perpendiculares aos raios $[AC]$ e $[BC]$, ou seja, são tangentes à circunferência nos pontos A e B.

4.1. $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{IA} = -\left\|\overrightarrow{IE}\right\| \times \left\|\overrightarrow{IA}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{IE}\hat{,}\, \overrightarrow{IA}\right)$

$= -\cancel{\left\|\overrightarrow{IE}\right\|} \times \left\|\overrightarrow{IA}\right\| \times \dfrac{\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{IA}\right\|}{\cancel{\left\|\overrightarrow{IE}\right\|}} = -\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{IA}\right\|^2 = -\dfrac{1}{2}$

$-\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AI} = -\left\|\overrightarrow{AE}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AI}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AE}\hat{,}\, \overrightarrow{AI}\right) =$

$= -\cancel{\left\|\overrightarrow{AE}\right\|} \times \left\|\overrightarrow{AI}\right\| \times \dfrac{\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AI}\right\|}{\cancel{\left\|\overrightarrow{AE}\right\|}} = -\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AI}\right\|^2 = -\dfrac{1}{2} = \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{IA}$

4.2. Seja O o centro do eneágono.

$I\hat{O}A = \dfrac{2\pi}{9}$

$B\hat{A}O = \dfrac{\pi - \frac{2\pi}{9}}{2} = \dfrac{7\pi}{18}$

$A\hat{O}H = 2 \times \dfrac{2\pi}{9} = \dfrac{4\pi}{9}$

$O\hat{A}H = \dfrac{\pi - \frac{4\pi}{9}}{2} = \dfrac{5\pi}{18}$

$\left(\overrightarrow{AB}\hat{,}\, \overrightarrow{AH}\right) = B\hat{A}O + O\hat{A}H = \dfrac{7\pi}{18} + \dfrac{5\pi}{18} = \dfrac{12\pi}{18} = \dfrac{2\pi}{3}$

$\dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}}{\left\|\overrightarrow{AH}\right\|} = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \cancel{\left\|\overrightarrow{AH}\right\|} \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\hat{,}\, \overrightarrow{AH}\right)}{\cancel{\left\|\overrightarrow{AH}\right\|}} =$

$= 1 \times \cos\dfrac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

Pág. 227

5. $C(0, y),\ y > 0$

$\overrightarrow{BA} = A - B = (2, 0) - (1, -2) = (1, 2)$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (0, y) - (1, -2) = (-1, y+2)$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos\left(\overrightarrow{BA} \hat{,} \overrightarrow{BC}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1, 2) \cdot (-1, y+2) =$

$= \sqrt{1^2 + 2^2} \times \sqrt{(-1)^2 + (y+2)^2} \times \cos 45^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 + 2 \times (y+2) = \sqrt{5} \times \sqrt{1 + (y+2)^2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 + 4y + 8 = \sqrt{10 + 10 \times (y+2)^2}$

Como o radicando, bem como os dois membros da equação são não negativos, elevando os dois ao quadrado, obtém-se:

$10 + 10 \times (y+2)^2 = (4y+6)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10 + 10 \times (y^2 + 4y + 4) = 16y^2 + 48y + 36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10y^2 - 16y^2 + 40y - 48y + 10 + 40 - 36 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6y^2 - 8y + 14 = 0 \Leftrightarrow 3y^2 + 4y - 7 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 3 \times (-7)}}{2 \times 3} \Leftrightarrow y = \dfrac{-4 \pm 10}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -\dfrac{7}{3} \vee y = 1$

Como $y > 0$, $C(0, 1)$.

6. $A(4, 2, 0)$

6.1. $B(4, 2, z)$ e $B \in r$

$(4, 2, z) = (1, -1, 1) + k\left(1, 1, \dfrac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 1 + k \\ 2 = -1 + k \\ z = 1 + \frac{1}{3}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

$B(4, 2, 2)$

$D(4, 0, 2)$

$C(4, 1, z),\ z > 2$

$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (0, -1, 2-z) \cdot (0, 1, 2-z) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \times 0 - 1 \times 1 + (2-z) \times (2-z) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2-z)^2 = 1 \Leftrightarrow 2 - z = \pm 1 \Leftrightarrow z = 1 \vee z = 3$

Como $z > 2$, $C(4, 1, 3)$.

Cálculo auxiliar:

$\overrightarrow{CD} = D - C = (4, 0, 2) - (4, 1, z) = (0, -1, 2-z)$

$\overrightarrow{CB} = B - C = (4, 2, 2) - (4, 1, z) = (0, 1, 2-z)$

6.2. **a)** $\overrightarrow{CB} \perp CDI$ e $\overrightarrow{CB} = (0, 1, -1)$

CDI: $y - z + d = 0$ e $D \in CDI$

$0 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 2$

CDI: $y - z + 2 = 0$

b) $[ABDE]$ é um quadrado. Então, $AD \perp BE$ e BE está contida no plano BGO.

Logo, $\overrightarrow{AD} \perp BGO$.

$\overrightarrow{AD} = D - A = (4, 0, 2) - (4, 2, 0) = (0, -2, 2)$

$AD: (x, y, z) = (4, 0, 2) + k(0, -2, 2),\ k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (4, 0, 2) + k(0, -1, 1),\ k \in \mathbb{R}$

6.3. **a)** $\overrightarrow{AD} \perp \alpha$

$\alpha: -2y + 2z + d = 0$ e $B \in \alpha$

$-2 \times 2 + 2 \times 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$

$\alpha: -2y + 2z = 0 \Leftrightarrow -y + z = 0$

$E(4, 0, 0)$

$\overline{EB} = \sqrt{(4-4)^2 + (2-0)^2 + (2-0)^2} =$

$= \sqrt{0 + 4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$A_{[OEBG]} = \overline{EB} \times \overline{OA} = 2\sqrt{2} \times 4 = 8\sqrt{2}$ u. a.

b) $A_{[ABCDE]} = A_{[ABDE]} + A_{[BCD]}$

$= 2 \times 2 + \dfrac{2 \times 1}{2} = 4 + 1 = 5$ u. a.

$V_{[ABCDEOFGHI]} = A_{[ABCDE]} \times \overline{OE} = 5 \times 4 = 20$ u. v.

Sejam P, Q, R e S os pontos de interseção de β com as arestas $[AB]$, $[FG]$, $[OI]$ e $[ED]$, respetivamente.

$V_{[OEAFRSPQ]} = \dfrac{1}{2} \times 20 \Leftrightarrow \overline{OE} \times \overline{AE} \times \overline{AP} = 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 \times 2 \times \overline{AP} = 10 \Leftrightarrow \overline{AP} = \dfrac{10}{8} \Leftrightarrow \overline{AP} = \dfrac{5}{4}$

$\beta: z = \dfrac{5}{4}$

7. Seja r a reta perpendicular a α e que passa por P.

$r: (x, y, z) = (-1, 1, -2) + k(1, -2, 1),\ k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (-1 + k, 1 - 2k, -2 + k),\ k \in \mathbb{R}$

Seja Q o ponto de interseção da reta r com o plano α.

$-1 + k - 2 \times (1 - 2k) + (-2 + k) - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 + k - 2 + 4k - 2 + k - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6k = 6 \Leftrightarrow k = 1$

$Q(-1 + 1, 1 - 2 \times 1, -2 + 1) = (0, -1, -1)$

$\overline{PQ} = \sqrt{(-1-0)^2 + (1+1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$

Questões tipo exame

Pág. 228

1.1. $D_f = \mathbb{R}$

$x \in D_f$; $x + 6\pi \in D_f$

$f(x+6\pi) = 2 - 4\sin\left(\dfrac{x+6\pi}{3}\right)$

$= 2 - 4\sin\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{6\pi}{3}\right) = 2 - 4\sin\left(\dfrac{x}{3} + 2\pi\right) =$

$= 2 - 4\sin\left(\dfrac{x}{3}\right) = f(x)$

Logo, f é uma função periódica de período 6π.

1.2. $x \in D_f$; $\dfrac{x}{3} \in D_f$

$-1 \le \sin\left(\dfrac{x}{3}\right) \le 1$

$\Leftrightarrow -1 \times (-4) \ge -4\sin\left(\dfrac{x}{3}\right) \ge 1 \times (-4)$

$\Leftrightarrow 4 \ge -4\sin\left(\dfrac{x}{3}\right) \ge -4$

$\Leftrightarrow 4 + 2 \ge 2 - 4\sin\left(\dfrac{x}{3}\right) \ge -4 + 2$

$\Leftrightarrow 6 \ge 2 - 4\sin\left(\dfrac{x}{3}\right) \ge -2$

$\Leftrightarrow -2 \le 2 - 4\sin\left(\dfrac{x}{3}\right) \le 6$

$\Leftrightarrow -2 \le f(x) \le 6$

$D'_f = [-2, 6]$

1.3. $a > 0$

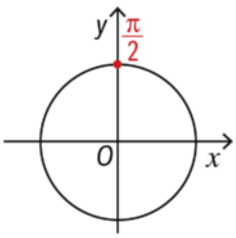
$x = 2$ zero de $g \Leftrightarrow g(2) = 0$

$g(2) = 0 \Leftrightarrow 2\cos(2\pi + a) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos a = 0$

$\Leftrightarrow \cos a = 0$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$



Como se pretende o menor valor positivo de a, $a = \dfrac{\pi}{2}$.

1.4. $g(x) = 2\cos(\pi x)$

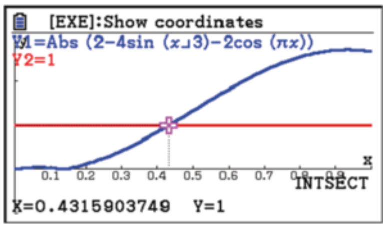
$P(x_0, f(x_0))$; $Q(x_0, g(x_0))$

$P\left(x_0, 2 - 4\sin\left(\dfrac{x_0}{3}\right)\right)$; $Q(x_0, 2\cos(\pi x_0))$

$\overline{PQ} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x_0 - x_0)^2 + \left(2 - 4\sin\left(\dfrac{x_0}{3}\right) - 2\cos(\pi x_0)\right)^2} = 1$

$\Leftrightarrow \left|2 - 4\sin\left(\dfrac{x_0}{3}\right) - 2\cos(\pi x_0)\right| = 1$



$x_0 \approx 0{,}43$

2.1. $\overline{OA} = 1$

$\sin\alpha = \dfrac{\overline{PA}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{PA}}{1} = \sin\alpha \Leftrightarrow \overline{PA} = \sin\alpha$

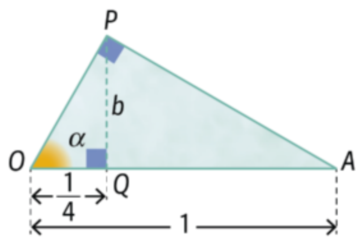
$\cos\alpha = \dfrac{\overline{OP}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{OP}}{1} = \cos\alpha \Leftrightarrow \overline{OP} = \cos\alpha$

$A_{[OAP]} = \dfrac{\overline{PA} \times \overline{OP}}{2} = \dfrac{\sin\alpha \times \cos\alpha}{2}$

$A_{[ORAP]} = 2 \times A_{[OAP]} = 2 \times \dfrac{\sin\alpha \times \cos\alpha}{2}$

$A_{[ORAP]} = \sin\alpha \times \cos\alpha$

2.2.



$P\left(\dfrac{1}{4}, b\right)$

$\overline{OP} = \cos\alpha$

O triângulo $[OQP]$ é retângulo em P.

$\dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \cos\alpha \Leftrightarrow \dfrac{\frac{1}{4}}{\cos\alpha} = \cos\alpha \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{4}$

Como $\cos\alpha > 0$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ e, portanto, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

$\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \tan\alpha \Leftrightarrow \dfrac{b}{\frac{1}{4}} = \tan\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow b = \dfrac{1}{4} \times \sqrt{3} \Leftrightarrow b = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Pág. 229

3.1. $\overline{OB} = \cos\alpha$, $\overline{BA} = \sin\alpha$ e $\overline{CD} = \tan\alpha$

$A_{[ABCD]} = A_{[OCD]} - A_{[OBA]} = \dfrac{\overline{OC} \times \overline{CD}}{2} - \dfrac{\overline{OB} \times \overline{BA}}{2} =$

$= \dfrac{1 \times \tan\alpha}{2} - \dfrac{\cos\alpha \times \sin\alpha}{2} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \sin\alpha\cos\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sin\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sin\alpha\left(1 - \cos^2\alpha\right)}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sin\alpha\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin^3\alpha}{2\cos\alpha}$$

Portanto, a área do trapézio $[ABCD]$ é dada por $f(\alpha)$.

3.2. $\tan\beta = 2$

Como $1 + \tan^2\beta = \dfrac{1}{\cos^2\beta}$, vem

$$1 + 2^2 = \frac{1}{\cos^2\beta} \Leftrightarrow 5 = \frac{1}{\cos^2\beta} \Leftrightarrow \cos^2\beta = \frac{1}{5}$$

Sendo $\beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\beta > 0$ pelo que

$$\cos\beta = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Dado que $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$, temos:

$$\sin^2\beta + \frac{1}{5} = 1 \Leftrightarrow \sin^2\beta = 1 - \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin^2\beta = \frac{4}{5}$$

Como $\beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin\beta > 0$ pelo que

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$f(\beta) = \frac{\sin^3\beta}{2\cos\beta} = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3}{2 \times \frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}} \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{\frac{2}{\sqrt{5}}} =$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5}$$

3.3. $\overline{CD} = 1 \Leftrightarrow \tan\alpha = 1$. Logo, como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

temos $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Portanto, se $\overline{CD} = 1$,

$$A_{[ABCD]} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} \times \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

Opção **(A)**

3.4. $A(\cos\alpha, \sin\alpha)$ e $D(1, \tan\alpha)$

$\overline{OB} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{2}$. Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos

$\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ pelo que $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\tan\alpha = \sqrt{3}$.

Então, $A\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $D\left(1, \sqrt{3}\right)$ pelo que

$$\overline{AD} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

Em alternativa, pela semelhança de triângulos $[OCD]$ e $[OBA]$,

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \frac{1 + \overline{AD}}{1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 1 + \overline{AD} = 2 \Leftrightarrow \overline{AD} = 1.$$

4.1. $A(1,0)$; $B(1, \tan\alpha)$

$$A_{[OAB]} = \frac{1 \times \tan\alpha}{2} = \frac{\tan\alpha}{2}$$

$P\left(\cos(\pi + \alpha), \sin(\pi + \alpha)\right) = (-\cos\alpha, -\sin\alpha)$;

$Q(-\cos\alpha, 0)$

$$A_{[OPQ]} = \frac{|-\cos\alpha| \times |-\sin\alpha|}{2} = \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{2}$$

$$\frac{A_{[OAB]}}{A_{[OPQ]}} = \frac{\frac{\tan\alpha}{2}}{\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{2}} = \frac{\tan\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\cos\alpha\sin\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$$

4.2. **a)** $\cos(-\pi - \alpha) + \sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

$\Leftrightarrow -\cos\alpha - \cos\alpha = -1$

$\Leftrightarrow -2\cos\alpha = -1$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{A_{[OAB]}}{A_{[OPQ]}} = 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

b) α é a inclinação da reta BP

Se $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ e $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então

$\tan\alpha = \tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

Como passa na origem do referencial, a equação reduzida da reta BP é $y = \sqrt{3}x$.

Pág. 230

5.1. $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\frac{3}{5} \Leftrightarrow \sin\alpha=-\frac{3}{5}$

$f(\alpha)=-3\tan\alpha-2\cos\alpha=-3\times\left(-\frac{3}{4}\right)-2\times\frac{4}{5}=$

$=\frac{9}{4}-\frac{8}{5}=\frac{13}{20}$

Cálculos auxiliares:

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \cos^2\alpha=1-\frac{9}{25}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha=\frac{16}{25} \Leftrightarrow \cos\alpha=\pm\frac{4}{5}$

Como $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$.

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \tan\alpha=\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} \Leftrightarrow \tan\alpha=-\frac{3}{4}$

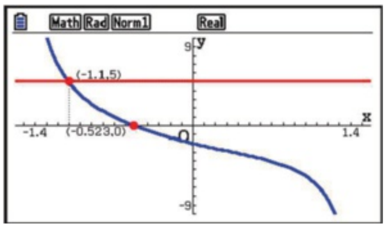
5.2. $f(x)=-3\tan x-2\cos x=-3\frac{\sin x}{\cos x}-2\cos x=$

$=\frac{-3\sin x-2\cos^2 x}{\cos x}=\frac{-3\sin x-2\left(1-\sin^2 x\right)}{\cos x}=$

$=\frac{-3\sin x-2+2\sin^2 x}{\cos x}=\frac{2\sin^2 x-3\sin x-2}{\cos x}$

5.3. $A(x_A,5)$; $B(x_B,0)$

$f(x_A)=5$ e $f(x_B)=0$



$x_B\approx-0{,}52$

$A_{[OAB]}=\frac{\overline{OB}\times 5}{2}\approx\frac{0{,}52\times 5}{2}\approx 1{,}3$ u. a.

6.1. O triângulo [*ORP*] é retângulo em *R* já que a reta *RP* é tangente à circunferência no ponto *R* e [*OR*] é um raio dessa circunferência.

Do mesmo modo se conclui que o triângulo [*OSP*] é retângulo em *S*.

Além disso, estes dois triângulos são iguais pois têm a hipotenusa comum e dois catetos iguais ([*OR*] e [*OS*] são raios da circunferência).

Consequentemente, os ângulos *ROP* e *SOP* são iguais, tendo cada um deles amplitude $\frac{\alpha}{2}$.

Portanto:

$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\overline{RP}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\overline{RP}}{1} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\overline{RP}$

Assim, a área do triângulo [*ORP*] é:

$\frac{\overline{RP}\times\overline{OR}}{2}=\frac{\overline{RP}\times 1}{2}=\frac{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2}$

Logo, a área do quadrilátero [*ORP*] que é o dobro da área do triângulo [*ORP*] é dada, em função de α, por: $f(\alpha)=\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

6.2. $\overline{RP}=\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ e como $\overline{RP}=\overline{SP}$, então

$\overline{SP}=\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Por outro lado, a amplitude do arco de circunferência *SOR* é igual a α, pelo que a amplitude do arco de circunferência do *RCS* é $2\pi-\alpha$.

Assim:

Comprimento do arco da circunferência		Amplitude do ângulo (rad)
$2\pi\times 1$	-------	2π
x	-------	$2\pi-\alpha$

$x=\frac{2\pi\times 1\times(2\pi-\alpha)}{2\pi} \Leftrightarrow x=2\pi-\alpha$

Logo, o arco de circunferência *RCS* tem $2\pi-\alpha$ unidades de comprimento.

A distância percorrida pelo ponto *W* é igual a

$\overline{RP}+2\pi-\alpha+\overline{SP}=2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)+2\pi-\alpha$, com

$\alpha\in\left]0,\pi\right[$.

Pág. 231

7.1. Base maior: $2\sin\alpha$

Base menor: $\sin\alpha$

Altura: $\cos\alpha$

$A_{[OQPR]}=\frac{2\sin\alpha+\sin\alpha}{2}\times\cos\alpha$

$=\frac{3\sin\alpha}{2}\times\cos\alpha=\frac{3\sin\alpha\cos\alpha}{2}$

7.2. $T(1,-\tan\alpha)$

$-\tan\alpha=-\frac{15}{8} \Leftrightarrow \tan\alpha=\frac{15}{8}$

Cálculos auxiliares:

$\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \left(\frac{15}{8}\right)^2+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\Leftrightarrow \frac{225}{64}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{289}{64}=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha=\frac{64}{289} \Leftrightarrow \cos\alpha=\pm\frac{8}{17}$

Como $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\alpha=\frac{8}{17}$.

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \dfrac{64}{289} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \dfrac{225}{289} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \pm \dfrac{15}{17}$

Como $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin\alpha = \dfrac{15}{17}$.

$A_{[OQPR]} = \dfrac{3 \times \frac{15}{17} \times \frac{8}{17}}{2} = \dfrac{360}{578} = \dfrac{180}{289}$ u. a.

7.3. $O(0, 0)$; $T\left(1, -\tan\dfrac{\pi}{6}\right)$

$T\left(1, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\overline{OT} = \sqrt{(1-0)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3} - 0\right)^2}$

$= \sqrt{1 + \dfrac{3}{9}} = \sqrt{1 + \dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ u. c.

8.1. $A_{[BCOE]} = \dfrac{\overline{OC} + \overline{BE}}{2} \times \overline{OA}$

$\overline{AB} = \overline{OC} = |\sin x| = \sin x$

(Como $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, $\sin x > 0$)

$\overline{AE} = |\tan x| = -\tan x$

(Como $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, $\tan x < 0$)

$\overline{BE} = \overline{AB} + \overline{AE} = \sin x - \tan x$

$\overline{OA} = 1$

Assim:

$A_{[BCOE]} = \dfrac{\overline{OC} + \overline{BE}}{2} \times \overline{OA} = \dfrac{\sin x + \sin x - \tan x}{2} \times 1 =$

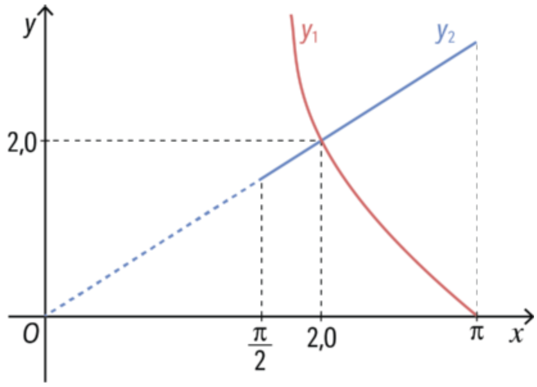
$= \dfrac{2\sin x - \tan x}{2} = \dfrac{2\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{2} =$

$= \dfrac{2\sin x \cos x - \sin x}{2\cos x}$

8.2. A abcissa do ponto de interseção do gráfico de A e da reta de equação $y = x$ no intervalo $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ é a solução da condição

$\dfrac{2\sin x \cos x - \sin x}{2\cos x} = x \wedge x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Fazendo $y_1 = \dfrac{2\sin x \cos x - \sin x}{2\cos x}$ e $y_2 = x$ no intervalo $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, obtivemos a seguinte representação gráfica:



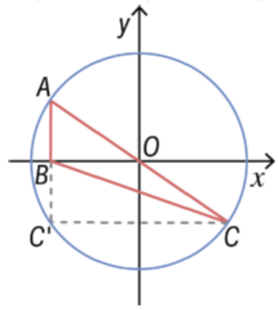
O gráfico da função A e a reta de equação $y = x$ intersetam-se no ponto de coordenadas (a, a) com $a \approx 2,0$.

Pág. 232

9. $A(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$; $B(2\cos\alpha, 0)$;

$C(-2\cos\alpha, -2\sin\alpha)$

Seja *C'* a projeção ortogonal de *C* sobre a reta *AB*.



$A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{AB} \times \overline{CC'}}{2}$

$= \dfrac{|2\sin\alpha| \times 2 \times |-2\cos\alpha|}{2}$

$= \dfrac{2\sin\alpha \times 2 \times (-2\cos\alpha)}{2}$

$= -4\sin\alpha\cos\alpha$

$2\sin\alpha > 0$

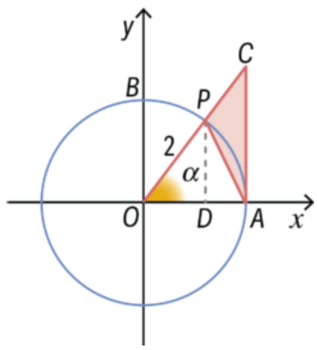
$|2\sin\alpha| = 2\sin\alpha$

$2\cos\alpha < 0$

$\Leftrightarrow -2\cos\alpha > 0$

$|-2\cos\alpha| = -2\cos\alpha$

10. Seja α a amplitude do ângulo AOP e seja D a projeção de P no eixo Ox.



$\dfrac{\overline{CA}}{\overline{OA}} = \tan\alpha \Leftrightarrow \dfrac{\overline{CA}}{2} = \tan\alpha \Leftrightarrow \overline{CA} = 2\tan\alpha$

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OP}} = \cos\alpha \Leftrightarrow \frac{\overline{OD}}{2} = \cos\alpha \Leftrightarrow \overline{OD} = 2\cos\alpha$$

$$\overline{DA} = \overline{OA} - \overline{OD} = 2 - 2\cos\alpha$$

Área do triângulo $[ACP] = \dfrac{\overline{AC} \times \overline{DA}}{2} =$

$= \dfrac{2\tan\alpha \times (2 - 2\cos\alpha)}{2} =$

$= \tan\alpha \times (2 - 2\cos\alpha) =$

$= 2\tan\alpha - 2\tan\alpha\cos\alpha =$

$= 2\left(\tan\alpha - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\alpha\right) =$

$= 2(\tan\alpha - \sin\alpha)$

$c =$ comprimento do arco $AP = \alpha r$

Como $r = 2$, temos $c = 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{c}{2}$ e

$$A_{[ACP]} = 2(\tan\alpha - \sin\alpha) = 2\left(\tan\left(\frac{c}{2}\right) - \sin\left(\frac{c}{2}\right)\right)$$

Pág. 233

11.1. $0 \leq t < 24 \Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{\pi}{12}t < \dfrac{\pi}{12} \times 24 \Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{\pi}{12}t < 2\pi$

Assim, tem-se que:

$-1 \leq \cos\left(\dfrac{\pi}{12}t\right) < 1 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{5} \leq \dfrac{2}{5}\cos\left(\dfrac{\pi}{12}t\right) < \dfrac{2}{5}$

$\Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{5}\cos\left(\dfrac{\pi}{12}t\right) < \dfrac{4}{5} \Leftrightarrow 0 \leq h(t) < \dfrac{4}{5}$

O máximo da função h é $\dfrac{4}{5} = 0{,}8$. Logo, a altura do painel é igual a $2 \times 0{,}8\text{ m} = 1{,}6\text{ m} = 160\text{ cm}$ e a base do painel é igual a $2 \times 160\text{ cm} = 320\text{ cm}$.

Opção **(C)**

11.2. O período de tempo pedido é a solução da condição

$0{,}3 < h(t) < 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}3 < \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{5}\cos\left(\dfrac{\pi}{12}t\right) < 0{,}5$

Na calculadora gráfica:

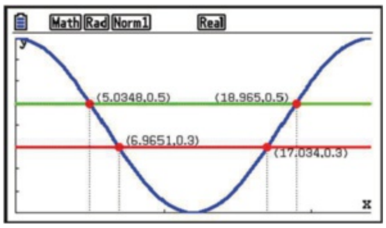
$y_1 = \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{5}\cos\left(\dfrac{\pi}{12}x\right)$

$y_2 = 0{,}3$

$y_3 = 0{,}5$

Janela de visualização: $[0{,}24] \times [0;0{,}8]$

Recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção dos gráficos, obtemos valores arredondados às milésimas da abcissa dos pontos de interseção do gráfico de h, com as retas $y = 0{,}3$ e $y = 0{,}5$ no intervalo $[0{,}24[$.



O período de tempo pedido corresponde à parte do gráfico de h, compreendida entre as duas retas horizontais, ou seja, entre $t_1 \approx 5{,}035$ e $t_2 \approx 6{,}965$ e entre $t_3 \approx 17{,}035$ e $t_4 \approx 18{,}965$.

O primeiro intervalo não pode ser considerado, uma vez que se encontra fora do horário de trabalho.

$0{,}035\text{ h} = 0{,}035 \times 60\text{ min} \approx 2\text{ min}$;
$17{,}035\text{ h} \approx 17\text{ h }02\text{ min}$

$0{,}965\text{ h} = 0{,}965 \times 60\text{ min} \approx 58\text{ min}$;
$18{,}965\text{ h} \approx 18\text{ h }58\text{ min}$

$18{,}965 - 17{,}035 = 1{,}93$

$0{,}93\text{ h} = 0{,}93 \times 60\text{ min} \approx 56\text{ min}$;
$1{,}93\text{ h} \approx 1\text{ h }56\text{ min}$

O trabalho de otimização pode ser efetuado entre as 17:02 e as 18:58, podendo este trabalho durar, no máximo, 1 hora e 56 minutos.

Pág. 234

1.1. Seja M o ponto médio de $[AB]$. Como $\overline{CA} = \overline{CB} = r$, o triângulo $[ABC]$ é isósceles. Logo, $CM \perp AB$, sendo M a projeção ortogonal de C na reta BA. Assim, como $d(B, A) = 8$ e $d(B, M) = 4$, temos:

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overline{BC} \times \overline{BA} \times \cos\left(C\hat{B}A\right) =$

$= \overline{BC} \times \overline{BA} \times \dfrac{\overline{BM}}{\overline{BC}} = \overline{BA} \times \overline{BM} = 8 \times 4 = 32$

Opção **(C)**

1.2. A reta r passa nos pontos de coordenadas $(-6, 0)$ e $(0, 3)$.

$r: y = mx + b$

$m = \dfrac{3 - 0}{0 + 6} = \dfrac{1}{2}$ e $b = 3$

$r: y = \dfrac{1}{2}x + 3$

1.3. A reta r é tangente à circunferência num ponto D se:

$\overrightarrow{CD} \perp \vec{r}$, sendo $\vec{r}$ um vetor diretor da reta r;

$\|\overrightarrow{CD}\| = \text{raio} = 2\sqrt{5}$;

D pertence à reta r.

Como $m_r = \frac{1}{2}$, $\vec{r}(2, 1)$ é um vetor diretor da reta r. Logo, $\vec{n}(1, -2)$ é um vetor perpendicular a r.

Como $\overrightarrow{CD} \perp \vec{r}$, sabemos que $\overrightarrow{CD}$ e $\vec{n}$ são colineares.

$\overrightarrow{CD} = k\vec{n} \wedge \|\overrightarrow{CD}\| = 2\sqrt{5}$

$\|k\vec{n}\| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |k|\|\vec{n}\| = 2\sqrt{5}$

Como $\|\vec{n}\| = \|(1, -2)\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, temos:

$|k|\|\vec{n}\| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |k|\sqrt{5} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |k| = 2 \Leftrightarrow k = -2 \vee k = 2$

Se $k = -2$:

$\overrightarrow{CD} = -2\vec{n} = -2(1, -2) = (-2, 4)$

$D = C + \overrightarrow{CD} = (-4, 6) + (-2, 4) = (-6, 10)$

Como $10 = \frac{1}{2} \times (-6) + 3 \Leftrightarrow 10 = -3 + 3$ é uma proposição falsa, o ponto de coordenadas $(-6, 10)$ não pertence à reta r, pelo que não é o ponto de tangência.

Se $k = 2$: $\overrightarrow{CD} = 2\vec{n} = 2(1, -2) = (2, -4)$

$D = C + \overrightarrow{CD} = (-4, 6) + (2, -4) = (-2, 2)$

Como $2 = \frac{1}{2} \times (-2) + 3 \Leftrightarrow 2 = -1 + 3 \Leftrightarrow 2 = 2$ é uma proposição verdadeira, o ponto de coordenadas $(-2, 2)$ pertence à reta r.

Portanto, a reta r é tangente à circunferência no ponto $D(-2, 2)$.

1.4. O declive da reta r é $m = \frac{1}{2}$.

Sendo α a inclinação da reta r, vem:

$\tan\alpha = \frac{1}{2} \wedge 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{4}{5}$

Como $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, vem: $\cos\alpha = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\frac{4}{5} + \sin^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{4}{5} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{5}$

Como $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, vem: $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - 2\sin(\pi + \alpha)\cos\alpha =$

$= \sin^2\alpha - 2(-\sin a)\cos\alpha =$

$= \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha =$

$= \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = \frac{5}{5} = 1$

2. Inclinação da reta r: $30°$

Declive da reta r: $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$r: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3}$; $C(x, 0) \in r$

$\frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}x = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 6$

$C(6, 0)$

Inclinação da reta s: $180° - 60° = 120°$

Declive da reta s: $\tan 120° = -\sqrt{3}$

$s: y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$; $B(x, 0) \in s$

$-\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}x = -2\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 2$

$B(2, 0)$

Logo, $\overline{BC} = 6 - 2 = 4$

$A \in r \wedge A \in s$

$-\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}x = -4\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{4\sqrt{3}}{3}x = -4\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 3$

Ordenada de $A: y_A = -\sqrt{3} \times 3 + 2\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times |y_A|}{2} = \frac{4 \times \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ u. a.

Pág. 235

3.1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (0,2) - (-4,0) = (4,2)$

$m_{AB} = \frac{1}{2}$; $AB: y = \frac{1}{2}x + 2$; $m_{CP} = -2$

$CP: y = -2x + b$; $C(4, -1)$

$-1 = -8 + b \Leftrightarrow b = 7$

$CP: y=-2x+7$

$\frac{1}{2}x+2=-2x+7 \Leftrightarrow x+4=-4x+14 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x=10 \Leftrightarrow x=2$

$y=-2\times 2+7=-4+7=3$

$P(2,3)$

3.2. $raio=\overline{CP}$; $P(2,3)$; $C(4,-1)$

$\overline{CP}=\sqrt{(4-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{2^2+(-4)^2}=$

$=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

$(x-4)^2+(y+1)^2=20$

3.3. O declive da reta r é igual à tangente da inclinação da reta.
Assim,

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$ (α é um ângulo agudo)

Cálculos auxiliares:

$\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{5}{4}=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \cos\alpha=\pm\frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\alpha=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Como α é agudo, $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha=\tan\alpha\times\cos\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin^2\left(-\alpha-\frac{7\pi}{2}\right)\times 2\sin\alpha\cos\alpha=$

$=\sin^2\left(-\alpha-\frac{4\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)\times 2\sin\alpha\cos\alpha=$

$=\sin^2\left(-\alpha-2\pi-\frac{3\pi}{2}\right)\times 2\sin\alpha\cos\alpha=$

$=\sin^2\left(-\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\times 2\sin\alpha\cos\alpha=$

$=\cos^2\alpha\times 2\sin\alpha\cos\alpha=$

$=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2\times 2\times\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=$

$=\frac{4\times 5}{25}\times 2\times\frac{2\times 5}{25}=\frac{4}{5}\times 2\times\frac{2}{5}=\frac{16}{25}$

3.4.

$\overline{AQ}=\frac{1}{3}\overline{QB}$; $Q\left(x,\frac{1}{2}x+2\right)$; $A(-4,0)$; $B(0,2)$

$\overline{AQ}=\sqrt{(x-(-4))^2+\left(\frac{1}{2}x+2\right)^2}=$

$=\sqrt{(x+4)^2+\left(\frac{1}{2}x+2\right)^2}=$

$=\sqrt{x^2+8x+16+\frac{1}{4}x^2+2x+4}=\sqrt{\frac{5}{4}x^2+10x+20}$

$\overline{QB}=\sqrt{(x-0)^2+\left(\frac{1}{2}x+2-2\right)^2}=\sqrt{x^2+\frac{1}{4}x^2}=\sqrt{\frac{5}{4}x^2}$

$\overline{AQ}=\frac{1}{3}\overline{QB} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{5}{4}x^2+10x+20}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{4}x^2} \Leftrightarrow$

$\underset{x>-4}{\Leftrightarrow} \frac{5}{4}x^2+10x+20=\frac{1}{9}\left(\frac{5}{4}x^2\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5}{4}x^2+10x+20=\frac{5}{36}x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{10}{9}x^2+10x+20=0 \Leftrightarrow 10x^2+90x+180=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+9x+18=0 \Leftrightarrow x=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\times 1\times 18}}{2\times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{-9\pm\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-9-3}{2} \vee x=\frac{-9+3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-6 \vee x=-3$

Como $x>-4$, $x=-3$.

$AB: y=\frac{1}{2}x+2$

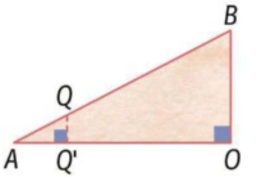
Como $Q\in AB$, tem-se:

$y=\frac{1}{2}\times(-3)+2=-\frac{3}{2}+2=\frac{1}{2}$

$Q\left(-3,\frac{1}{2}\right)$

Opção **(A)**

Outro processo:



$\overline{AQ}=\frac{1}{3}\overline{QB}$

$\Leftrightarrow \overline{QB}=3\overline{AQ}$

$\overline{AQ}+\overline{QB}=\overline{AB}$

$\Leftrightarrow \overline{AQ}+3\overline{AQ}=\overline{AB}$

$\Leftrightarrow 4\overline{AQ}=\overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AQ}=\frac{1}{4}\overline{AB}$

Seja Q' a projeção ortogonal de Q sobre a reta AO.
Os triângulos $[ABO]$ e $[AQQ']$ são semelhantes.
Assim:

$\frac{\overline{AQ'}}{\overline{AO}}=\frac{\overline{AQ}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AQ'}}{4}=\frac{\frac{1}{4}\overline{AB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AQ'}}{4}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \overline{AQ'}=1$

Seja $Q(x_Q, y_Q)$:

$x_Q=-4+1=-3$

$\frac{\overline{QQ'}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{AQ'}}{\overline{AO}} \Leftrightarrow \frac{\overline{QQ'}}{2}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \overline{QQ'}=\frac{1}{2}$

$y_Q=\frac{1}{2}$; $Q\left(-3,\frac{1}{2}\right)$

Opção **(A)**

4.1. $2x+z+d=0 \qquad (8,0,0)$

$2\times 8+0+d=0 \Leftrightarrow d=-16$

$2x+z-16=0$

Opção **(C)**

4.2.

$y=0$	$x=0$
$z=0$	$y=0$
$2x+0-8=0$	$2\times 0+z-8=0$
$\Leftrightarrow x=4$	$\Leftrightarrow z=8$
$A(4,0,0)$	$B(0,0,8)$

$M_{[AB]}=\left(\frac{4}{2},0,\frac{8}{2}\right)=(2,0,4)$

$\overrightarrow{MV}=V-M=(x-2\,;0\,;0{,}8x-4)$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(-4\,,0\,,8)$

$\overrightarrow{MV}\bullet\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow(x-2\,;0\,;0{,}8x-4)\bullet(-4\,,0\,,8)=0$

$\Leftrightarrow -4x+8+6{,}4x-32=0\Leftrightarrow 2{,}4x-24=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=10$

$z=0{,}8x=0{,}8\times 10=8$

$V(10,0,8)$

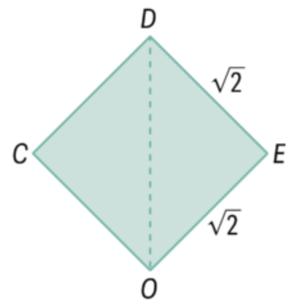
Pág. 236

5.1. $\overline{OD}^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{OD}^2=4 \underset{(\overline{OD}>0)}{\Leftrightarrow} \overline{OD}=2$

$D(0,0,2)$

Opção **(A)**



5.2. $C(0,-1,1)$

$G\left(-\sqrt{2},0,2\right)$

$\overrightarrow{CG}=G-C=\left(-\sqrt{2},0,2\right)-(0,-1,1)=\left(-\sqrt{2},1,1\right)$

$(x,y,z)=(0,-1,1)+k\left(-\sqrt{2},1,1\right),\ \ k\in\mathbb{R}$

5.3. $E(0,1,1)$

$\overrightarrow{CE}=E-C=(0,1,1)-(0,-1,1)=(0,2,0)$

Seja $\vec{n}$ um vetor normal a *CEG*.

$\vec{n}\perp CG$ e $\vec{n}\perp\overrightarrow{CE}$

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CG}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a,b,c)\cdot\left(-\sqrt{2},1,1\right)=0\\ (a,b,c)\cdot(0,2,0)=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{2}a+b+c=0\\ 2b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=\sqrt{2}a\\ b=0\end{cases}$

$\vec{n}=\left(a,0,\sqrt{2}a\right),\ \ a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Para $a=1$, $\vec{n}=\left(1,0,\sqrt{2}\right)$.

CEG: $x+\sqrt{2}z+d=0\wedge E(0,1,1)\in CEG$

$0+\sqrt{2}\times 1+d=0\Leftrightarrow d=-\sqrt{2}$

CEG: $x+\sqrt{2}z-\sqrt{2}=0$

$P\left(2a-1,a^2,1\right)\in CEG$

Então, $2a-1+\sqrt{2}\times 1-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow 2a=1\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$.

6.1. $E\left(2,\sqrt{5},0\right)$

$\overline{OE}=\sqrt{(2-0)^2+\left(\sqrt{5}-0\right)^2+(0-0)^2}=$

$=\sqrt{2^2+\left(\sqrt{5}\right)^2+0^2}=\sqrt{4+5}=3$

Raio da base do cone $=3$

Área lateral do cone $=9\sqrt{10}\pi$

$\Leftrightarrow \pi\times 3\times\overline{AV}=9\sqrt{10}\pi\Leftrightarrow\overline{AV}=\frac{9\sqrt{10}\pi}{3\pi}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overline{AV}=3\sqrt{10}$

$\overline{AV}^2=\overline{AO}^2+\overline{OV}^2\Leftrightarrow\left(3\sqrt{10}\right)^2=3^2+\overline{OV}^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9\times 10=9+\overline{OV}^2\Leftrightarrow\overline{OV}^2=81\Leftrightarrow$

$\underset{(\overline{OV}>0)}{\Leftrightarrow}\overline{OV}=\sqrt{81}\Leftrightarrow\overline{OV}=9$

Então, $V(0,0,9)$.

6.2. $D(3,0,0)$; $B(0,3,0)$; $V(0,0,9)$

$\overrightarrow{DV}=V-D=(0,0,9)-(3,0,0)=(-3,0,9)$

$\overrightarrow{BV}=V-B=(0,0,9)-(0,3,0)=(0,-3,9)$

Seja $\vec{n}$ um vetor normal ao plano *VDB*.

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DV}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BV}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a,b,c)\cdot(-3,0,9)=0\\ (a,b,c)\cdot(0,-3,9)=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-3a+9c=0\\ -3b+9c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a=9c\\ 3b=9c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3c\\ b=3c\end{cases}$

$\vec{n}=(3c,3c,c),\ \ c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Para $c=1$, $\vec{n}=(3,3,1)$.

$3x+3y+z+d=0$ e $D(3,0,0)\in VDB$

$3\times 3+0+0+d=0\Leftrightarrow d=-9$

VDB: $3x+3y+z-9=0$

6.3. $\overrightarrow{EV}=V-E=(0,0,9)-\left(2,\sqrt{5},0\right)=\left(-2,-\sqrt{5},9\right)$

$\overrightarrow{EO}=O-E=(0,0,0)-\left(2,\sqrt{5},0\right)=\left(-2,-\sqrt{5},0\right)$

$\cos\left(\overrightarrow{EV}\,\hat{}\,\overrightarrow{EO}\right)=\frac{\overrightarrow{EV}\cdot\overrightarrow{EO}}{\left\|\overrightarrow{EV}\right\|\times\left\|\overrightarrow{EO}\right\|}=$

$=\frac{\left(-2,-\sqrt{5},9\right)\cdot\left(-2,-\sqrt{5},0\right)}{\sqrt{(-2)^2+\left(-\sqrt{5}\right)^2+9^2}\times\sqrt{(-2)^2+\left(-\sqrt{5}\right)^2+0^2}}=$

$=\frac{-2\times(-2)+\left(-\sqrt{5}\right)\times\left(-\sqrt{5}\right)+9\times 0}{\sqrt{4+5+81}\times\sqrt{4+5+0}}=$

$=\frac{4+5+0}{\sqrt{90}\times\sqrt{9}}=\frac{9}{9\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{10}{100} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{90}{100} \Leftrightarrow \sin\alpha = \pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$

Como α é um ângulo agudo, $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

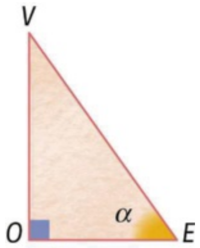
Outro processo:

$\overrightarrow{EV} = \left(-2, -\sqrt{5}, 9\right)$

$\left\|\overrightarrow{EV}\right\| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

$\sin\alpha = \frac{\overline{OV}}{\overline{EV}} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{9}{3\sqrt{10}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$



Pág. 237

7.1. $B = C + \overrightarrow{AC}$; $A(-1,3,2)$; $C(-3,2,1)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (-3,2,1) - (-1,3,2) = (-2,-1,-1)$

$B = (-3,2,1) + (-2,-1,-1) = (-5,1,0)$

Opção **(A)**

7.2. Por exemplo, o vetor $\overrightarrow{AC}$ é normal ao plano α.

Como o plano α passa no ponto *A*, vem:

$-2(x+1) - (y-3) - (z-2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x - 2 - y + 3 - z + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x - y - z + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x + y + z - 3 = 0$

Logo, $2x + y + z - 3 = 0$ é uma equação do plano α.

7.3. $Z(0,0,z), z \in \mathbb{R}^+$; $\overrightarrow{OA} = A$; $\overrightarrow{OZ} = Z$

$\cos\left(A\hat{O}D\right) = \frac{(0,0,z)\cdot(-1,3,2)}{\sqrt{0^2+0^2+z^2} \times \sqrt{(-1)^2+3^2+2^2}} =$

$= \frac{2z}{\sqrt{z^2} \times \sqrt{14}} = \frac{2z}{z \times \sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$

$A\hat{O}D = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) \approx 58°$

Logo, a amplitude do ângulo *AOD* é aproximadamente igual a 58°.

8.1. $A(a,0,0), a \in \mathbb{R}^+$

V é um ponto do semieixo positivo Ox.

Como *A* é um ponto da reta *AV*:

$(a,0,0) = (2,0,2) + k(-1,0,1),\ k \in \mathbb{R}$, tem-se:

$(a,0,0) = (2,0,2) + k(-1,0,1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 2 - k \wedge 0 = 0k \wedge 0 = 2 + k$

$\Leftrightarrow k = -2 \wedge a = 4$

$0 = 0k$ é uma condição universal em $\mathbb{R}$ e, portanto, em $\mathbb{R}^+$.

Logo, $a = 4$, pelo que as coordenadas do ponto A são $(4,0,0)$.

$V(0,0,c), c \in \mathbb{R}^+$

V é um ponto do semieixo positivo Oz.

Como *V* é um ponto da reta *AV*:

$(0,0,c) = (2,0,2) + k(-1,0,1), k \in \mathbb{R}$, tem-se:

$(0,0,c) = (2,0,2) + k(-1,0,1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 = 2 - k \wedge 0 = 0k \wedge c = 2 + k$

$\Leftrightarrow k = 2 \wedge c = 4$

$0 = 0k$ é uma condição universal em $\mathbb{R}$ e, portanto, em $\mathbb{R}^+$.

Logo, $c = 4$, pelo que as coordenadas do ponto V são $(0,0,4)$.

8.2. $A\hat{V}B = \left(\overrightarrow{VA}\hat{,}\overrightarrow{VB}\right) = \alpha$

$\overrightarrow{VA} = A - V = (4,0,0) - (0,0,4) = (4,0,-4)$

$\overrightarrow{VB} = B - V = (0,4,0) - (0,0,4) = (0,4,-4)$

$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{VA}\cdot\overrightarrow{VB}}{\overrightarrow{VA}\times\overrightarrow{VB}} =$

$= \frac{(4,0,-4)\cdot(0,4,-4)}{\sqrt{4^2+0^2+(-4)^2} \times \sqrt{0^2+4^2+(-4)^2}} =$

$= \frac{16}{\sqrt{32}\times\sqrt{32}} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

Logo, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$.

Pág. 238

9.1. *HCD // ABG*. Então, $\vec{n} = (6, 2, -3)$ é um vetor normal a *HCD*.

$HCD:\ 6x + 2y - 3z + d = 0$ **e** $H(-2,-5,1) \in HCD$

$6\times(-2) + 2\times(-5) - 3\times 1 + d = 0$

$\Leftrightarrow -12 - 10 - 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = 25$

$HCD:\ 6x + 2y - 3z + 25 = 0$

9.2. $HG \perp ABG$ e $H(-2,-5,1) \in HG$

$HG:\ (x,y,z) = (-2,-5,1) + k(6,2,-3),\ k \in \mathbb{R}$

Ponto genérico de *HG*:

$HG:\ (x,y,z) = (-2+6k, -5+2k, 1-3k),\ k \in \mathbb{R}$

G é o ponto de interseção de *HG* com *ABG*.

Então,

$6(-2+6k) + 2(-5+2k) - 3(1-3k) - 24 = 0$

$\Leftrightarrow -12 + 36k - 10 + 4k - 3 + 9k - 24 = 0$

$\Leftrightarrow 49k = 49 \Leftrightarrow k = \frac{49}{49} \Leftrightarrow k = 1$

$G(-2+6\times1, -5+2\times1, 1-3\times1)$

$G(4,-3,-2)$

10.1. A superfície esférica tem centro no ponto $C(2,-4,3)$ e raio 3.

$A(3,-2,5)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(2,-4,3)-(3,-2,5)=(-1,-2,-2)$

$B=C+\overrightarrow{CB}=C+\overrightarrow{AC}=$

$=(2,-4,3)+(-1,-2,-2)=(1,-6,1)$

Opção **(D)**

10.2. Se o plano α é tangente à superfície esférica no ponto A, então $\overrightarrow{AC}(-1,-2,-2)$ é um vetor normal a esse plano. Por outro lado, como o plano α passa no ponto $A(3,-2,5)$, vem:

$-1(x-3)-2(y+2)-2(z-5)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x+3-2y-4-2z+10=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x-2y-2z+9=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2y+2z-9=0$

Logo, $x+2y+2z-9=0$ é uma equação do plano α.

Pág. 239

11.1. Por exemplo, o vetor de coordenadas $(0,1,0)$ é vetor diretor do eixo *Oy*.

$\left(\frac{1}{2},0,0\right)-(0,0,1)=\left(\frac{1}{2},0,-1\right)$

ω é o plano que passa pelo ponto de coordenadas $(0,0,1)$ e tem a direção dos vetores de coordenadas $(0,1,0)$ e $\left(\frac{1}{2},0,-1\right)$.

Seja $\vec{n}(a,b,c)$ um vetor normal ao plano ω.

Tem-se:

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot(0,1,0)=0\\ (a,b,c)\cdot\left(\frac{1}{2},0,-1\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\ \frac{1}{2}a-c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\ a=2c\end{cases}$$

Portanto, $\vec{n}(2c,0,c)$, $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Por exemplo, para $c=1$, $\vec{n}(2,0,1)$.

$2(x-0)+0(y-0)+1(z-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+z-1=0 \Leftrightarrow 2x+z=1$

Logo, uma equação do plano ω é $2x+z=1$.

11.2. $2\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}=1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 \Leftrightarrow 0=1$ (Proposição falsa)

Logo, o ponto de coordenadas $\left(-\frac{1}{4},\sqrt{2},\frac{1}{2}\right)$ não pertence ao plano ω.

11.3. $(x,y,z)=(1,-1,0)+k(2,0,0),\ k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+2k\\ y=-1\\ z=0\end{cases},\ k\in\mathbb{R}$$

Ponto genérico da reta r: $(1+2k,-1,0)$

Para que este ponto pertença ao plano ω, as suas coordenadas terão de satisfazer a condição $2x+z=1$:

$2(1+2k)+0=1 \Leftrightarrow 2+4k=1 \Leftrightarrow 4k=-1 \Leftrightarrow k=-\frac{1}{4}$

Para $k=-\frac{1}{4}$, $1+2k=1-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$

Logo, a reta *r* e o plano ω intersetam-se no ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{2},-1,0\right)$.

12.1. Como $\overline{OA}=6$, $A(6,0,0)$

O ponto *P* pertence ao plano α e à reta *DE* definida por $y=0\wedge z=6$

$P(x,0,6)$;

$3x-4\times0+2\times6=18 \Leftrightarrow 3x=6 \Leftrightarrow x=2$

Logo, $P(2,0,6)$.

O ponto *Q* pertence ao plano α e à reta *EF* definida por $x=6\wedge z=6$

$Q(6,y,6)$;

$3\times6-4\times y+2\times6=18 \Leftrightarrow -4y=-12 \Leftrightarrow y=3$

Logo, $Q(6,3,6)$.

Assim:

$\overrightarrow{AP}=P-A=(2,0,6)-(6,0,0)=(-4,0,6)$

$\overrightarrow{AQ}=Q-A=(6,3,6)-(6,0,0)=(0,3,6)$

$$\cos\left(\overrightarrow{AP}\,\hat{}\,\overrightarrow{AQ}\right)=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}}{\left\|\overrightarrow{AP}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AQ}\right\|}$$

$$=\frac{(-4,0,6)\cdot(0,3,6)}{\sqrt{16+0+36}\times\sqrt{0+9+36}}=\frac{36}{\sqrt{2340}}$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{36}{\sqrt{2340}}\right)\approx 42^\circ$$

A amplitude do ângulo *QAP* é, aproximadamente, igual a 42º.

12.2. $E(6,0,6)$

O vetor normal ao plano α é um vetor diretor da reta *s*.

Logo, $s:(x,y,z)=(6,0,6)+k(3,-4,2),\ k\in\mathbb{R}$

Tarefas de aprofundamento

Pág. 246

1. Por exemplo:

1.1. conjunto de pontos do plano equidistantes a A e a B;

1.2. conjunto de pontos do espaço equidistantes a A e a B;

1.3. conjunto de pontos do plano a uma distância fixa, o raio, de um ponto fixo, o centro;

1.4. conjunto de pontos do espaço a uma distância fixa, o raio, de um ponto fixo;

1.5. conjunto de pontos do plano, P, tais que $\overrightarrow{CA}$ é perpendicular a $\overrightarrow{AP}$;

1.6. conjunto de pontos do espaço, P, tais que $\overrightarrow{CA}$ é perpendicular a $\overrightarrow{AP}$.

Pág. 247

2. $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$

No plano, representa a equação da circunferência de diâmetro [AB]. No espaço, representa a equação da superfície esférica de diâmetro [AB].

$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

No plano, representa a equação da mediatriz do segmento de reta [AB]. No espaço, representa a equação do plano mediador do segmento de reta [AB].

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

No plano, representa a equação da reta tangente à circunferência de centro C no ponto A. No espaço, representa a equação do plano tangente à circunferência de centro C no ponto A.

3.1. Seja M o ponto médio de [AB] e $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de [AB].

$M\left(\frac{2+0}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = (1, 0)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, -1) - (2, 1) = (-2, -2)$

$\overrightarrow{MP} = P - M = (x, y) - (1, 0) = (x-1, y)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MP} = 0 \Leftrightarrow (-2, -2) \cdot (x-1, y) = 0$

$\Leftrightarrow -2(x-1) - 2y = 0 \Leftrightarrow -2x + 2 - 2y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2y = 2x - 2 \Leftrightarrow y = -x + 1$

3.2. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da circunferência de diâmetro [AB].

$\overrightarrow{AP} = P - A = (x, y) - (2, 1) = (x-2, y-1)$

$\overrightarrow{BP} = P - B = (x, y) - (0, -1) = (x, y+1)$

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow (x-2, y-1) \cdot (x, y+1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2) \times x + (y-1)(y+1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 1 = 0$

3.3. Seja P um ponto qualquer da reta tangente à circunferência de centro em C no ponto A.

$\overrightarrow{CA} = A - C = (2, 1) - (1, -2) = (1, 3)$

$\overrightarrow{AP} = P - A = (x, y) - (2, 1) = (x-2, y-1)$

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \Leftrightarrow (1, 3) \cdot (x-2, y-1) = 0$

$\Leftrightarrow 1(x-2) + 3(y-1) = 0 \Leftrightarrow x - 2 + 3y - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3y = -x + 5 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

4.1. Seja M o ponto médio de [AB] e seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer do plano mediador de [AB].

$M\left(\frac{-1+0}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

$\overrightarrow{MP} = P - M = (x, y, z) - \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) =$

$= \left(x + \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}, z\right)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 1, -1) - (-1, 0, 1) = (1, 1, -2)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MP} = 0 \Leftrightarrow (1, 1, -2) \cdot \left(x + \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}, z\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} + y - \frac{1}{2} - 2z = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + y - 2z = 0$

4.2. Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer da superfície esférica de diâmetro [AB].

$\overrightarrow{AP} = P - A = (x, y, z) - (-1, 0, 1) = (x+1, y, z-1)$

$\overrightarrow{BP} = P - B = (x, y, z) - (0, 1, -1) = (x, y-1, z+1)$

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow (x+1, y, z-1) \cdot (x, y-1, z+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x+1) + y(y-1) + (z-1)(z+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + x + y^2 - y + z^2 - 1 = 0$

4.3. Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer do plano tangente à superfície esférica de centro $C(4, -2, 0)$ no ponto A.

$\overrightarrow{CA} = A - C = (-1, 0, 1) - (4, -2, 0) = (-5, 2, 1)$

$\overrightarrow{AP} = P - A = (x, y, z) - (-1, 0, 1) = (x+1, y, z-1)$

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \Leftrightarrow (-5, 2, 1) \cdot (x+1, y, z-1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5(x+1) + 2y + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5x - 5 + 2y + z - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5x + 2y + z - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x - 2y - z + 6 = 0$

5.1. Como A, B e C têm a mesma cota, definem o plano da base ABC.

Assim, $F(1,1,-2+6)=(1,1,4)$.

$\overrightarrow{CF}=F-C=(1,1,4)-(-2,4,-2)=(3,-3,6)$

$CF:\ (x,y,z)=(1,1,4)+k(3,-3,6),\ k\in\mathbb{R}$

$(-8,10,-14)=(1,1,4)+k(3,-3,6)$

$$\begin{cases}-8=1+3k\\10=1-3k\\-14=4+6k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3k=-9\\3k=-9\\6k=-18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-3\\k=-3\\k=-3\end{cases}$$

Logo, L pertence à reta CF.

5.2. $\overrightarrow{AC}=C-A=(-2,4,-2)-(-1,-1,-2)=(-1,5,0)$

Seja $\vec{n}$ um vetor normal ao plano AFC.

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CF}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a,b,c)\cdot(3,-3,6)=0\\(a,b,c)\cdot(-1,5,0)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3a-3b+6c=0\\-a+5b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a-3b+6c=0\\a=5b\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3\times5b-3b+6c=0\\a=5b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12b+6c=0\\a=5b\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}c=-2b\\a=5b\end{cases}$$

$\vec{n}=(5b,b,-2b)$, $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Para $b=1$, $\vec{n}=(5,1,-2)$.

AFC: $5x+y-2z+d=0$ e $C(-2,4,-2)\in AFC$.

$5(-2)+4-2(-2)+d=0\Leftrightarrow d=10-4-4\Leftrightarrow d=2$

AFC: $5x+y-2z+2=0$

5.3. Superfície esférica de diâmetro $[AB]$.