

## Geometria analítica

**Vamos recordar**

### Ficha 9 Geometria analítica

pág. 26

**1.1. a)**  $m = \frac{3}{-1} = -3$

**b)**  $M_{[AB]} = \left( \frac{1+(-1)}{2}, \frac{2+0}{2} \right) = (0, 1)$

**1.2.**  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-(-1))^2 + (y-0)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 2x + 1 + y^2 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow -4y = 4x - 4 \Leftrightarrow y = -x + 1$

**1.3.** C é o ponto de interseção da reta r com a mediatriz do segmento de reta [AB].

$(x, y) = (-2, 5) + k(-1, 3), k \in \mathbb{R}; y = -x + 1$

$$\begin{cases} x = -2 - k \\ y = 5 + 3k \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - k \\ -x + 1 = 5 + 3k \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - k \\ 2 + k + 1 = 5 + 3k \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ k = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Logo, C(-1, 2).

**1.4.** Como os pontos B e C têm abscissa igual,  $r = y_C - y_B$ .

$r = d(B, C) = 2 - 0 = 2$ .

A equação reduzida da circunferência é  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ .

**2.1.** Como  $\frac{3}{-1} \neq \frac{4}{2}$ , então  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não são colineares.

**2.2. a)**  $2\vec{u} - \vec{v} = 2(-1, 2) - (3, 4) = (-2, 4) + (-3, -4) = (-5, 0)$

**b)**  $\vec{u} + \vec{v} = (-1, 2) + (3, 4) = (2, 6)$  e, portanto,  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|(2, 6)\|^2 = (\sqrt{2^2 + 6^2})^2 = 4 + 36 = 40$

**2.3.** Seja  $\vec{w}$  o vetor colinear com  $\vec{v}$ , mas de sentido oposto e norma 1.

$\vec{w} = k\vec{v}, k \in \mathbb{R}^-, \text{ ou seja, } \vec{w} = k(3, 4) = (3k, 4k)$

$\|\vec{w}\| = 1 \Leftrightarrow \|3k, 4k\| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(3k)^2 + (4k)^2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{9k^2 + 16k^2} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{25k^2} = 1 \Leftrightarrow 25k^2 = 1 \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{25} \stackrel{k \in \mathbb{R}^-}{\Leftrightarrow} k = -\frac{1}{5}$

Logo,  $\vec{w} = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$  e, portanto,  $Q = P + \vec{w} = (1, 2) + \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right)$ .

pág. 27

**3.1.**  $B + \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{CD} = B + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OF} = B + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = B + \overrightarrow{BF} = F$

**3.2. a)**  $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE} = E - A = (-1, 7, 10) - (1, -9, 2) = (-2, 16, 8)$

**b)**  $D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (-3, -4, -9) - (5, -5, -5) = (-8, 1, -4)$

Logo,  $D = (1, -9, 2) + (-8, 1, -4) = (-7, -8, -2)$

**3.3.**  $F = B + \overrightarrow{BF} = (5, -5, -5) + (-2, 16, 8) = (3, 11, 3)$

$(x+7)^2 + (y+8)^2 + (z+2)^2 = (x-3)^2 + (y-11)^2 + (z-3)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 14x + 49 + y^2 + 16y + 64 + z^2 + 4z + 4 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 22y + 121 + z^2 - 6z + 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 20x + 38y + 10z - 22 = 0 \Leftrightarrow 10x + 19y + 5z - 11 = 0$

**3.4.**  $V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \times h = \|\vec{BC}\|^2 \times \|\vec{BF}\|$   
 $\|\vec{BC}\| = \sqrt{(-8)^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{81} = 9$   
 $\|\vec{BF}\| = \sqrt{(-2)^2 + 16^2 + 8^2} = \sqrt{324} = 18$   
 $V_{\text{prisma}} = 9^2 \times 18 = 1458 \text{ u. v.}$

**3.5.** Como a reta  $r$  é paralela ao eixo  $Oy$ , um vetor diretor da reta é  $(0, 1, 0)$ .  
 Uma equação vetorial da reta  $r$  é  $(x, y, z) = (-7, -8, -2) + k(0, 1, 0)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Como  $(-7, -3, -2) = (-7, -8, -2) + 5(0, 1, 0)$ , a reta  $r$  também pode ser definida pela equação  $(x, y, z) = (-7, -3, -2) + k(0, 1, 0)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

O plano  $xOz$  é definido pela equação  $y=0$  (todos os pontos do plano têm ordenada 0). Como a reta  $r$  é paralela ao eixo  $Oy$ , as abcissas e cotas dos seus pontos são iguais a  $-7$  e  $-2$ , respetivamente.

Logo, o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $xOz$  tem coordenadas  $(-7, 0, -2)$ .

**3.6.** O centro da superfície esférica é, por exemplo, o ponto médio do segmento de reta  $[CE]$  e a medida do raio é

$$r = \frac{\|\vec{CE}\|}{2} = \frac{\sqrt{(-1 - (-3))^2 + (7 - (-4))^2 + (10 - (-9))^2}}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 11^2 + 19^2}}{2} = \frac{\sqrt{486}}{2};$$

$$r^2 = \left(\frac{\sqrt{486}}{2}\right)^2 = \frac{486}{4} = \frac{243}{2}$$

$$M_{[CE]} = \left(\frac{-3 + (-1)}{2}, \frac{-4 + 7}{2}, \frac{-9 + 10}{2}\right) = \left(-2, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

A equação da superfície esférica pedida é  $(x+2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{243}{2}$ .

## Ficha 10 Declive e inclinação de uma reta

**1.1.**  $m_{AB} = 4$

Sendo  $\alpha$  a inclinação, em graus, da reta  $AB$ ,  $\tan \alpha = m_{AB} = 4$ .

Logo,  $\alpha = \tan^{-1}(4) \approx 76,0^\circ$ .

**1.2. a)**  $y=0: 4x+2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

A reta  $r$  é a mediatriz da reta  $AB$ , sendo  $B(0, 2)$  e  $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ .

Determinação da equação da mediatriz de  $[AB]$ :

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 + (y - 2)^2 \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y = -x + \frac{15}{4} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{15}{16}$$

Logo, o declive da reta  $r$  é  $-\frac{1}{4}$  e tem como vetores diretores  $k\left(1, -\frac{1}{4}\right)$ ,  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

O vetor  $\vec{v}$  obtém-se para  $k=4$ :  $4\left(1, -\frac{1}{4}\right) = (4, -1)$ .

**b)** Como as retas  $AB$  e  $s$  têm o mesmo declive,  $m_s = 4$ .

Logo, um vetor diretor da reta  $s$  é  $(1, 4)$ .

Uma equação vetorial da reta  $s$  é  $(x, y) = (0, 0) + k(1, 4)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

**2.**  $A_{[OAB]} = A_{[ODE]}$ , pois os triângulos são iguais.

$$A_{[OAB]} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{3 \times \overline{AB}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{3}$$

Considerando que a inclinação da reta  $OB$  é  $\alpha$ , vem:  $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

$$\widehat{D\hat{O}E} = \widehat{A\hat{O}B} = \frac{\pi}{6}$$

A inclinação da reta  $OD$  é  $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ .

Logo, o declive da reta  $OD$  é  $m = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ .

**3.1.** O raio da circunferência mede 1.

Seja  $C(x_c, 1)$ , com  $x_c > 0$ . O declive da reta  $r$  é  $m = \frac{1}{x_c}$ .

Por outro lado,  $m = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Logo,  $\frac{1}{x_c} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x_c = \frac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x_c = \sqrt{3}$  e, portanto,  $C(\sqrt{3}, 1)$ .

Assim, conclui-se que a equação reduzida da circunferência é  $(x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 = 1$ .

**3.2.** Seja  $a$  ( $a > 0$ ) o declive da reta  $s$ .

A equação reduzida da reta  $s$  é  $y = ax$ ,  $a > 0$ .

Como a reta  $s$  é tangente à circunferência, então o sistema de equações

$$\begin{cases} (x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 = 1 \\ y = ax \end{cases}$$

tem uma única solução.

$$\begin{aligned} (x - \sqrt{3})^2 + (ax - 1)^2 = 1 &\Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + a^2x^2 - 2ax + 1 = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1 + a^2)x^2 + (-2\sqrt{3} - 2a)x + 3 = 0 \end{aligned}$$

Como esta equação tem uma única solução, o respetivo binómio discriminante é igual a zero.

$$\begin{aligned} \text{Assim, } \Delta = 0 &\Leftrightarrow (-2\sqrt{3} - 2a)^2 - 4(1 + a^2) \times 3 = 0 \Leftrightarrow 12 + 8\sqrt{3}a + 4a^2 - 12 - 12a^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -8a^2 + 8\sqrt{3}a = 0 \Leftrightarrow -8a(a - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = \sqrt{3} \stackrel{a > 0}{\Leftrightarrow} a = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

O declive da reta  $s$  é  $\sqrt{3}$  e, portanto, um dos vetores diretores tem coordenadas  $(1, \sqrt{3})$ .

Logo, uma equação vetorial da reta  $s$  é  $(x, y) = (0, 0) + k(1, \sqrt{3})$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

O ponto  $T$  tem coordenadas da forma  $(x, y) = (k, \sqrt{3}k)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Como também é ponto da circunferência, tem-se:

$$\begin{aligned} (k - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}k - 1)^2 = 1 &\Leftrightarrow k^2 - 2\sqrt{3}k + 3 + 3k^2 - 2\sqrt{3}k + 1 = 1 \Leftrightarrow 4k^2 - 4\sqrt{3}k + 3 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k = \frac{-(-4\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 - 4 \times 4 \times 3}}{2 \times 4} \Leftrightarrow k = \frac{4\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Logo,  $T\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

**3.3.** O declive da reta  $s$  é  $\sqrt{3}$ , pelo que a sua inclinação é  $\frac{\pi}{3}$  rad.

$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ , pelo que a amplitude do ângulo das retas  $r$  e  $s$  é  $\frac{\pi}{6}$  rad.

**Ficha 11** Produto escalar de dois vetores

pág. 30

**1.1.**  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot (\vec{AB} + \vec{BC}) = \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \vec{AB} \cdot \vec{BC} = \|\vec{AB}\|^2 - \vec{BA} \cdot \vec{BC} =$   
 $= 6^2 - 6 \times 5 \times \cos \alpha = 36 - 30 \times \cos \alpha$

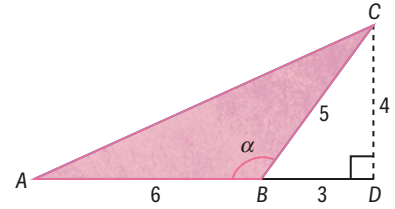
Como a área do triângulo é 12:

$A_{[ABC]} = 12 \Leftrightarrow \frac{6 \times a}{2} = 12 \Leftrightarrow 6a = 24 \Leftrightarrow a = 4$

Tomando como referência a figura ao lado, vem  $\overline{CD} = 4$  e, pelo Teorema de Pitágoras,  $\overline{BD} = 3$ .

$\cos(\pi - \alpha) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow -\cos \alpha = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$

Portanto,  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 36 - 30 \times \left(-\frac{3}{5}\right) = 36 + 18 = 54$ .



**1.2.** Tomando como referência a figura usada na resolução de 1.1., vem:

$\vec{CA} \cdot \vec{BC} = -\vec{CA} \cdot \vec{CB} = -(\vec{CD} + \vec{DA}) \cdot (\vec{CD} + \vec{DB}) = -(\vec{CD} \cdot \vec{CD} + \vec{CD} \cdot \vec{DB} + \vec{DA} \cdot \vec{CD} + \vec{DA} \cdot \vec{DB}) =$   
 $= -(\|\vec{CD}\|^2 + 0 + 0 + \|\vec{DA}\| \times \|\vec{DB}\| \times \cos 0^\circ) = -(4^2 + 9 \times 3 \times 1) = -(16 + 27) = -43$

**1.3.** Seja  $\theta$  a amplitude, em graus, do ângulo  $BAC$ .

$\tan \theta = \frac{4}{9} \wedge 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{9}\right) \wedge 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  Logo,  $\hat{BAC} \approx 24^\circ$ .

**2.**  $\vec{AP} \perp \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AP} \cdot \vec{AB} = 0$ ;  $P(0, 0, z)$

O triângulo  $[PAB]$  é retângulo em  $A$ ;

$\overline{AB} = \sqrt{(1-0)^2 + (3-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

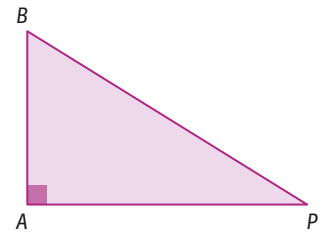
$\overline{AP} = \sqrt{(0-0)^2 + (0-1)^2 + (z+2)^2} = \sqrt{1+z^2+4z+4} = \sqrt{z^2+4z+5}$

$\overline{BP} = \sqrt{(0-1)^2 + (0-3)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{1+9+z^2-2z+1} = \sqrt{z^2-2z+11}$

Logo:  $\overline{AP}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BP}^2 \Leftrightarrow (\sqrt{z^2+4z+5})^2 + (\sqrt{14})^2 = (\sqrt{z^2-2z+11})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2 + 4z + 5 + 14 = z^2 - 2z + 11 \Leftrightarrow 6z = -8 \Leftrightarrow z = -\frac{8}{6} \Leftrightarrow z = -\frac{4}{3}$

Logo,  $P\left(0, 0, -\frac{4}{3}\right)$ .



**3.**  $\vec{AE} \cdot \vec{AF} = (\vec{AB} + \vec{BE}) \cdot (\vec{AD} + \vec{DF}) = \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AB} \cdot \vec{DF} + \vec{BE} \cdot \vec{AD} + \vec{BE} \cdot \vec{DF} =$

$= 0 + \vec{AB} \cdot \left(\frac{2}{3} \vec{AB}\right) + \left(\frac{1}{3} \vec{AD}\right) \cdot \vec{AD} + 0 = \frac{2}{3} \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AD} \cdot \vec{AD} =$

$= \frac{2}{3} \|\vec{AB}\|^2 + \frac{1}{3} \|\vec{AD}\|^2 \stackrel{\|\vec{AB}\| = \|\vec{AD}\|}{=} \frac{2}{3} \|\vec{AB}\|^2 + \frac{1}{3} \|\vec{AB}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2$

pág. 31

**4.1.**  $\vec{AM} \cdot \vec{AN} = (\vec{AD} + \vec{DM}) \cdot (\vec{AB} + \vec{BN}) =$

$= \vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{AD} \cdot \vec{BN} + \vec{DM} \cdot \vec{AB} + \vec{DM} \cdot \vec{BN} =$

$= 0 + 0 + 0 + \vec{DM} \cdot \vec{DM} = \|\vec{DM}\|^2 = \left\|\frac{1}{2} \vec{AD}\right\|^2 = \frac{1}{4} \|\vec{AD}\|^2 \quad \|\vec{BN}\| = \|\vec{DM}\|$

**4.2.**  $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = \vec{AB} \cdot (\vec{AB} + \vec{BG}) = \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \vec{AB} \cdot \vec{BG} = (\vec{AB})^2 + 0 = \|\vec{AB}\|^2$

$\vec{AB} \cdot \vec{AG} = 16 \Leftrightarrow \|\vec{AB}\|^2 = 16 \stackrel{\|\vec{AB}\| > 0}{\Leftrightarrow} \|\vec{AB}\| = 4$

$\vec{AM} \cdot \vec{AN} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \|\vec{AD}\|^2 = 2 \Leftrightarrow \|\vec{AD}\|^2 = 8 \stackrel{\|\vec{AD}\| > 0}{\Leftrightarrow} \|\vec{AD}\| = \sqrt{8}$

$V_{\text{paralelepípedo}} = A_{\text{base}} \times \text{altura} = (\sqrt{8})^2 \times 4 = 8 \times 4 = 32 \text{ u. v.}$

$$5. \quad \vec{AB} \cdot \vec{BC} = -\vec{BA} \cdot \vec{BC} = -\|\vec{BA}\| \times \|\vec{BC}\| \times \cos(\vec{BA} \hat{,} \vec{BC})$$

$$\|\vec{BA}\| = \|\vec{BC}\| = \frac{16}{8} = 2$$

A amplitude de um ângulo externo de um octógono regular é  $360^\circ : 8 = 45^\circ$ , pelo que a amplitude do ângulo interno  $ABC$  é  $\widehat{ABC} = (\vec{BA} \hat{,} \vec{BC}) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

$$\cos(\vec{BA} \hat{,} \vec{BC}) = \cos(135^\circ) = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Logo, } \vec{AB} \cdot \vec{BC} = -2 \times 2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}.$$

$$6.1. \quad \text{Seja } r = \|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\|$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{CA} = 18 \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot (-\vec{AC}) = 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -18 \Leftrightarrow r \times r \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}r^2 = -18 \Leftrightarrow r^2 = 36$$

A equação reduzida da circunferência é  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 36$ .

$$\left. \begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$6.2. \quad \vec{BA} \cdot \vec{BC} = \vec{BA} \cdot (\vec{BA} + \vec{AC}) = \vec{BA} \cdot \vec{BA} + \vec{BA} \cdot \vec{AC} =$$

$$= \|\vec{BA}\|^2 + (-\vec{AB}) \cdot (-\vec{CA}) = \|\vec{BA}\|^2 + \vec{AB} \cdot \vec{CA} = 36 + 18 = 54$$

### Ficha 12 Produto escalar de dois vetores num referencial o. n.

pág. 32

1.1. Sejam  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$  os vetores diretores das retas  $r$  e  $s$ , respetivamente, e  $\alpha$  a amplitude do ângulo das retas  $r$  e  $s$ .

$$\vec{r} = (0, 2) - (-4, 0) = (4, 2); \quad \vec{s} = (1, -1)$$

$$\cos \alpha = \frac{|(4, 2) \cdot (1, -1)|}{\sqrt{4^2 + 2^2} \times \sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|4 - 2|}{\sqrt{20} \times \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{40}} \Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{40}}\right)$$

Como  $\alpha$  é um ângulo agudo,  $\alpha \approx 71,6^\circ$ .

O ângulo das retas  $r$  e  $s$  é aproximadamente igual a  $71,6^\circ$ .

1.2. Seja  $p$  a reta pedida.

$$m_s = -1; \quad m_p = 1; \quad p: y = x + b$$

$$\text{Como a reta } p \text{ passa no ponto } A(1, -3), \quad -3 = 1 + b \Leftrightarrow -4 = b.$$

$$\text{Logo, } p: y = x - 4.$$

1.3. Comece por mostrar que o ponto de tangência da reta  $s$  com a circunferência é  $T\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ .

Seja  $T$  o ponto de tangência da circunferência com a reta  $s$ .

$T$  é o ponto de interseção das retas  $p$  e  $s$ :  $y = x - 4$

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ x - 4 = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 2x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{2} \\ x = \frac{5}{2} \end{cases} \quad T\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

$$r = \overline{AT} = \sqrt{\left(1 - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(-3 + \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \sqrt{\frac{9}{2}}$$

A equação da circunferência pedida é  $(x-1)^2 + (y+3)^2 = \frac{9}{2}$ .

**1.4.** Um vetor diretor da reta  $s$  é, por exemplo,  $(1, -1)$ .

Os vetores diretores da reta  $s$  são da forma  $\vec{u} = k(1, -1) = (k, -k)$ ,  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

$$\vec{OA} = A - O = (1, -3)$$

$$\text{Assim, } (k, -k) \cdot (1, -3) = -12 \Leftrightarrow k + 3k = -12 \Leftrightarrow 4k = -12 \Leftrightarrow k = -3$$

$$\vec{u} = (-3, 3)$$

O vetor pedido tem coordenadas  $(-3, 3)$ .

**2.**  $\widehat{EAC} = (\vec{AE}, \vec{AC})$ ;  $\vec{AE} = E - A = (-1, 7, 5) - (1, 2, 1) = (-2, 5, 4)$

$$\vec{AC} = C - A = (5, 4, 3) - (1, 2, 1) = (4, 2, 2)$$

$$\cos(\vec{AE}, \vec{AC}) = \frac{(-2, 5, 4) \cdot (4, 2, 2)}{\sqrt{(-2)^2 + 5^2 + 4^2} \times \sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{-8 + 10 + 8}{\sqrt{45} \times \sqrt{24}} = \frac{10}{\sqrt{1080}}$$

$$\text{Logo, } \widehat{EAC} = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{1080}}\right) \approx 72^\circ.$$

**3.1.**  $A(3, 0, 0)$ ;  $B(3, 3, 0)$ ;  $G(0, 0, 3)$

$$\vec{GA} = A - G = (3, 0, 0) - (0, 0, 3) = (3, 0, -3)$$

$$\|\vec{GA}\| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\vec{GB} = B - G = (3, 3, 0) - (0, 0, 3) = (3, 3, -3)$$

$$\|\vec{GB}\| = \sqrt{3^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{GA} \cdot \vec{GB}}{\|\vec{GA}\| \times \|\vec{GB}\|} = \frac{(3, 0, -3) \cdot (3, 3, -3)}{3\sqrt{2} \times 3\sqrt{3}} = \frac{18}{9\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \text{ Como } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ vem:}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{9}{6} - 1 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{2}{4} \stackrel{\tan \alpha > 0}{\Leftrightarrow} \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**3.2.**  $A(3, 0, 0)$ ;  $F(0, 3, 3)$ ;  $G(0, 0, 3)$ ;

Seja  $M$  o ponto médio do segmento de reta  $[AG]$  e  $P$  o ponto da reta  $AF$  cujas coordenadas são pedidas. As retas  $AF$  e  $MP$  são perpendiculares e interseam-se no ponto  $P$ . Logo,  $\vec{AF} \cdot \vec{MP} = 0$ .

$$\vec{AF} = F - A = (0, 3, 3) - (3, 0, 0) = (-3, 3, 3); M\left(\frac{3+0}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{0+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$$

Uma equação vetorial da reta  $AF$  é  $(x, y, z) = (3, 0, 0) + k(-3, 3, 3)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , pelo que o ponto  $P$  é da forma  $P(3 - 3k, 3k, 3k)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

$$\vec{MP} = P - M = (3 - 3k, 3k, 3k) - \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right) = \left(3 - 3k - \frac{3}{2}, 3k, 3k - \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} - 3k, 3k, 3k - \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Logo, } \vec{AF} \cdot \vec{MP} = 0 \Leftrightarrow (-3, 3, 3) \cdot \left(\frac{3}{2} - 3k, 3k, 3k - \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{9}{2} + 9k + 9k + 9k - \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow 27k = 9 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$$

$$\text{Portanto, } P\left(3 - 3 \times \frac{1}{3}, 3 \times \frac{1}{3}, 3 \times \frac{1}{3}\right) = (2, 1, 1).$$

### Ficha 13 Equações cartesianas de planos no espaço

**1.1.**  $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ , com  $(a, b, c) = (2, -1, 0)$ .

$$2x - y + d = 0$$

$$\text{Como } C(1, 1, 1) \in \alpha, 2 \times 1 - 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$$

Logo,  $2x - y - 1 = 0$  é uma equação do plano pedido.

**1.2.**  $\vec{AB} = B - A = (4, -4, 1)$ ;  $\vec{BC} = C - B = (-2, 3, 0)$

Seja  $\vec{n}(a, b, c)$  um vetor normal ao plano  $ABC$ .

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{BC} = 0 \Leftrightarrow (a, b, c) \cdot (4, -4, 1) = 0 \wedge (a, b, c) \cdot (-2, 3, 0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4a - 4b + c = 0 \wedge -2a + 3b = 0$$

Ora, de (2):  $2a = 3b \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}b$

De (1) e (3):  $4 \times \frac{3}{2}b - 4b + c = 0 \Leftrightarrow 6b - 4b + c = 0 \Leftrightarrow c = -2b$

Assim, tem-se que  $\vec{n}\left(\frac{3}{2}b, b, -2b\right)$ , com  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Por exemplo, para  $b = 2$ , obtém-se o vetor normal ao plano  $n(3, 2, -4)$ .

Por outro lado, como, por exemplo, o plano  $ABC$  passa no ponto  $A$ , vem:

$$3(x+1) + 2(y-2) - 4(z-0) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y - 4z - 1 = 0 \text{ é uma equação do plano pedido.}$$

**1.3.** O plano pode ser definido por:

- um vetor diretor das retas  $r$  e  $s$ :  $(2, -1, 1)$ , por exemplo;
  - um vetor definido por dois pontos não comuns às retas: por exemplo, o ponto de coordenadas  $(1, -1, 0)$ , da reta  $r$ , e o ponto de coordenadas  $(0, 0, 0)$ , da reta  $s$ .
- $(1, -1, 0) - (0, 0, 0) = (1, -1, 0)$ .

Seja  $\vec{n}(a, b, c)$  um vetor normal ao plano. Tem-se:

$$(a, b, c) \cdot (2, -1, 1) = 0 \wedge (a, b, c) \cdot (1, -1, 0) = 0 \Leftrightarrow 2a - b + c = 0 \wedge a - b = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a - a + c = 0 \wedge a = b \Leftrightarrow c = -a \wedge a = b$$

Um vetor normal ao plano é, por exemplo, para  $a = 1$ ,  $\vec{n}(1, 1, -1)$ .

Como o plano passa, por exemplo, pela origem do referencial, vem:

$$x + y - z + d = 0 \text{ e } 0 + 0 - 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$$

Uma equação do plano pedido é  $x + y - z = 0$ .

- 1.4. a)** O plano pedido é perpendicular ao eixo  $Oz$  cujo vetor diretor é, por exemplo,  $\vec{e}_3(0, 0, 1)$ , e passa no ponto  $B(3, -2, 1)$ , cuja cota é 1.  
Logo,  $z = 1$  ou  $z - 1 = 0$  é uma equação do plano pedido.
- b)** O plano pedido é perpendicular ao eixo  $Ox$ , cujo vetor diretor é  $\vec{e}_1(1, 0, 0)$ . Como o ponto tem abcissa 3,  $x = 3$  ou  $x - 3 = 0$  é uma equação do plano pedido.

**2.1.** O ponto  $A$  tem coordenadas  $(1, 2, 0)$  e  $\vec{OA} = A - O = (1, 2, 0)$  é um vetor normal ao plano  $ABE$ .

$$1(x-1) + 2(y-2) + 0(z-0) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 5 = 0$$

Logo,  $x + 2y - 5 = 0$  é uma equação do plano pedido.

**2.2.**  $V_{[OABCDE]} = A_{[OAD]} \times \overline{AB}$

$$\overline{OA} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}; \overline{AD} = 4; A_{[OAD]} = \frac{4 \times \sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$$

$\overline{AB}$  é a distância do ponto  $A$  ao plano de equação  $x - y + 5 = 0$ .

Um vetor diretor da reta  $AB$  tem coordenadas  $(1, -1, 0)$ , pois a reta  $AB$  é perpendicular ao plano  $BCE$ .

$$AB: (x, y, z) = (1, 2, 0) + k(1, -1, 0), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = 1 + k \wedge y = 2 - k \wedge z = 0, k \in \mathbb{R}$$

Determinação das coordenadas do ponto  $B$ :

$$\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 - k \\ z = 0 \\ x - y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ - \\ 1 + k - (2 - k) + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ - \\ 2k = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 0 \\ k = -2 \end{cases}$$

Logo,  $B(-1, 4, 0)$  e  $\overline{AB} = \sqrt{(-1-1)^2 + (4-2)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{8}$

Portanto,  $V_{[OABCDE]} = 2\sqrt{5} \times \sqrt{8} = 2\sqrt{40} = 4\sqrt{10}$  (u. v.)

3. O ponto de interseção da superfície esférica com a reta  $r$ , perpendicular ao plano  $\alpha$  e que passa no centro,  $c$ , da superfície esférica é o ponto de tangência  $T$ , tal que:

$T = (1, 0, 0) + (m, 0, -1) = (1+m, 0, -1)$ , sendo  $(m, 0, -1)$ ,  $m \in \mathbb{R}^+$ , a família de vetores normais ao plano  $\alpha$ .

Como  $T$  é ponto da superfície esférica, tem-se:

$$(1+m-1)^2 + 0^2 + (-1)^2 = 5 \Leftrightarrow m^2 = 4 \stackrel{m \in \mathbb{R}^+}{\Leftrightarrow} m = 2, \text{ sendo } \alpha \text{ plano definido por } 2x - z - 7 = 0.$$

### Ficha 14 Posição relativa de retas e planos

pág. 36

1.1.  $\vec{n}_\alpha(-2, -1, 2); \vec{n}_\beta(1, 4, 3)$

$$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = (-2, -1, 2) \cdot (1, 4, 3) = -2 - 4 + 6 = 0$$

Como  $\vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta$ , então  $\alpha \perp \beta$ .

1.2.  $\vec{r}(1, \frac{1}{2}, -1)$  e  $\vec{s}(0, 0, 1)$ , por exemplo.

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = -1$$

Os vetores diretores não são colineares nem perpendiculares.

Veamos se têm algum ponto em comum:

$$\begin{cases} (x, y, z) = (2, -1, 1) + k(1, \frac{1}{2}, -1), k \in \mathbb{R} \\ x = 1 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$(1, -4, z) = (2, -1, 1) + k(1, \frac{1}{2}, -1), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 = 2 + k \wedge -4 = -1 + \frac{1}{2}k \wedge z = 1 - k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{k = -1 \wedge k = -6}_{\text{cond. imp.}} \wedge z = 1 - k$$

Logo, as retas  $r$  e  $s$  não se intersectam, pelo que, não sendo paralelas nem perpendiculares, são não coplanares.

1.3.  $\vec{r}(1, \frac{1}{2}, -1); \vec{n}_\alpha(-2, -1, 2)$

Como  $\frac{-2}{1} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{-1} = -2$ , então  $\vec{r} \parallel \vec{n}_\alpha$ . Logo, a reta  $r$  e o plano  $\alpha$  são perpendiculares.

1.4.  $\vec{s}(0, 0, 1); \vec{n}_\beta(1, 4, 3)$

Os vetores diretor e normal não são colineares, porque, por exemplo,  $\vec{s}$  tem abcissa nula e a abcissa de  $\vec{n}_\beta$  não é nula.

$$\vec{s} \cdot \vec{n}_\beta = (0, 0, 1) \cdot (1, 4, 3) = 3$$

Os vetores diretor e normal não são perpendiculares. Logo, a reta é oblíqua ao plano.

1.5.  $\vec{r}(1, \frac{1}{2}, -1); \vec{s}(0, 0, 1); \vec{n}(a, b, c)$

Seja  $\vec{n}$  um vetor normal ao plano definido pelas retas  $r$  e  $s$ .

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{s} = 0 \Leftrightarrow (a, b, c) \cdot (1, \frac{1}{2}, -1) = 0 \wedge (a, b, c) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a + \frac{1}{2}b - c = 0 \wedge c = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}b \wedge c = 0$$

Por exemplo, se  $b = 2$ ,  $a = -\frac{1}{2} \times 2 = -1$  e, portanto,  $\vec{n}(-1, 2, 0)$ .

Como  $\vec{n} \cdot \vec{n}_\alpha = (-1, 2, 0) \cdot (-2, -1, 2) = 2 - 2 = 0$ , então os planos são perpendiculares.

**2.1.** Um vetor diretor da reta  $AB$  é o vetor normal ao plano  $\alpha$  de coordenadas  $(3, -2, 1)$ .

$$\vec{AB} = B - A = (-3, 2, -3a)$$

$$\text{Como } \vec{AB} \parallel \vec{n}_\alpha, \frac{-3}{3} = \frac{2}{-2} = \frac{-3a}{1} \Leftrightarrow -3a = -1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}.$$

**2.2.** Um vetor normal ao plano  $\beta$  é, por exemplo, o vetor normal ao plano  $\alpha$ :  $\vec{n}_\beta = \vec{n}_\alpha = (3, -2, 1)$ .

Como o plano  $\beta$  passa no ponto  $A(1, 1, 0)$ , vem

$$3(x-1) - 2(y-1) + 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + z - 1 = 0.$$

$3x - 2y + z - 1 = 0$  é uma equação do plano  $\beta$ .

**3.1.** Por exemplo, os vetores  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$  são perpendiculares ao vetor normal ao plano que contém a base da pirâmide,  $\vec{n}$ .

$$\vec{n}(a, b, c); \vec{OA}(4, 3, 0); \vec{OB}(4, 3, 5)$$

Por exemplo,  $\vec{n}(-3, 4, 0)$  é perpendicular aos vetores  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$ .

$$-3\left(x - \frac{7}{2}\right) + 4\left(y + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -3x + 4y + \frac{25}{2} = 0 \Leftrightarrow -6x + 8y + 25 = 0 \Leftrightarrow 6x - 8y - 25 = 0$$

$6x - 8y - 25 = 0$  é uma equação do plano  $\alpha$ .

**3.2.** O plano pedido é o plano  $ACV$ .

Por exemplo, o vetor  $\vec{OB}$  é perpendicular ao plano pedido.  $\vec{OB} = (4, 3, 5)$

Como o plano passa no ponto  $V\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ , vem:

$$4\left(x - \frac{7}{2}\right) + 3\left(y + \frac{1}{2}\right) + 5\left(z - \frac{5}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 4x - 14 + 3y + \frac{3}{2} + 5z - \frac{25}{2} = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y + 5z - 25 = 0$$

$4x + 3y + 5z - 25 = 0$  é uma equação do plano  $\alpha$ .

**3.3.** O plano  $xOz$  é o plano de equação  $y = 0$  e a equação do plano pedida é da forma  $y = b$ , com  $b \in \mathbb{R}$ .

Como o plano passa no ponto  $V\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ , então  $y = -\frac{1}{2}$  é uma equação do plano  $\alpha$ .

### Avaliação global do tema

#### Ficha 15

**1.1.**  $y = mx + b$ ;  $m = -\frac{1}{2}$ ;  $A(-1, 0)$

$$0 = -\frac{1}{2} \times (-1) + b \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = b \quad \text{Logo, a equação reduzida da reta } AB \text{ é } y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

**1.2.**  $m_{AB} = -\frac{1}{2}$ ;  $\vec{u}(2, -1)$  é um vetor diretor da reta  $AB$ .

$$\vec{OC} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) - (0, 0) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$\vec{v}(3, 4)$  é um vetor diretor da reta  $OC$ .

$$\cos \alpha = \frac{|(2, -1) \cdot (3, 4)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2} \times \sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{5} \times 5} = \frac{2}{5\sqrt{5}}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right)^2} \Leftrightarrow 1 - \tan^2 \alpha = \frac{1}{\frac{4}{125}} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{125}{4} - 1 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{125}{4} - 1 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{121}{4}$$

Como  $\alpha$  é um ângulo agudo,  $\tan \alpha = \sqrt{\frac{121}{4}} = \frac{11}{2}$ .

**2.**  $\vec{r}(2, 1, -1); \vec{s}(5, -3, -1)$

Os vetores não são colineares (por exemplo,  $\frac{5}{2} \neq \frac{-3}{1}$ )

e não são perpendiculares ( $((2, 1, -1) \cdot (5, -3, -1) = 10 - 3 + 1 = 8 \neq 0)$ )

pelo que as retas  $r$  e  $s$  não são paralelas nem perpendiculares.

$$r: x = 1 + 2k \wedge y = -1 + k \wedge z = 2 - k$$

$$s: x = -2 + 5m \wedge y = 3 - 3m \wedge z = 2 - m$$

$$\begin{cases} 1 + 2k = -2 + 5m \\ -1 + k = 3 - 3m \\ 2 - k = 2 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2k = -2 + 5k \\ -1 + k = 3 - 3k \\ k = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 1 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ m = 1 \end{cases}$$

$$(x, y, z) = (1, -1, 2) + 1(2, 1, -1) = (3, 0, 1)$$

Logo, as retas  $r$  e  $s$  são concorrentes (interseçam-se no ponto de coordenadas  $(3, 0, 1)$ ).

**3.1.**  $V(0, 0, z)$

Como  $V$  é um ponto do plano  $\alpha$ ,  $3 \times 0 + z - 3 = 0 \Leftrightarrow z = 3$ .

Logo,  $V(0, 0, 3)$ .

**3.2.** Como a reta  $r$  é perpendicular ao plano  $\alpha$ , um vetor normal ao plano  $\alpha$  é vetor diretor da reta  $r$ :

$$\vec{r} = \vec{n}_\alpha = (0, 3, 1).$$

Dado que  $A$  é ponto da reta  $r$ , uma equação da reta  $r$  é:

$$(x, y, z) = (1, -1, 0) + k(0, 3, 1), k \in \mathbb{R}.$$

Como o ponto de coordenadas  $(1, 2, 1) = (1, -1, 0) + 1(0, 3, 1)$ , então

$$(x, y, z) = (1, 2, 1) + k(0, 3, 1), k \in \mathbb{R} \text{ também é equação da reta } r.$$

**3.3.** Seja  $P$  o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $\alpha$ .

A distância do ponto  $A$  ao plano  $\alpha$  é  $\overline{AP}$ .

$$\begin{cases} (x, y, z) = (1, 2, 1) + k(0, 3, 1) \\ 3y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 3k \\ z = 1 + k \\ 3 \times (2 + 3k) + 1 + k - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 3k \\ z = 1 + k \\ 10k = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{4}{5} \\ z = \frac{3}{5} \\ k = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$P\left(1, \frac{16}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$\overline{AP} = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{4}{5} + 1\right)^2 + \left(\frac{3}{5} - 0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{25} + \frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{90}}{5} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

**3.4.**  $\vec{n}_\beta = \vec{n}_\alpha = (0, 3, 1); A(1, -1, 0)$

$$0(x-1) + 3(y+1) + 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow 3y + z + 3 = 0$$

Uma equação do plano  $\beta$  é  $3y + z + 3 = 0$ .

**3.5.**  $B(1, 1, 0); C(-1, 1, 0); V(0, 0, 3)$

$$\overline{BC} = |1 - (-1)| = |2| = 2$$

$$M_{[BC]} = \left(\frac{1-1}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (0, 1, 0)$$

$$\overline{VM}_{[BC]} = \sqrt{(0-0)^2 + (1-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

A área lateral da pirâmide é igual a  $4 \times \frac{2\sqrt{10}}{2} = 4\sqrt{10}$  u. a.