MÁXIMO

11.º ano

Matemática A

Maria Augusta Ferreira Neves
Ana Machado
Bruno Roque
Pedro Rocha Almeida
António Pinto Silva
Luís Guerreiro

Sucessões

Porto Editora

Tarefa de revisão

1.1.

Número da figura	1	2	3	4
N.º de pontos do retângulo	$1\times2=2$	$2\times3=6$	$3\times4=12$	$4\times5=20$
N.º de pontos de cada triângulo	1	3	6	10

1.2. $10\times(10+1)=a \Leftrightarrow 10\times11=a \Leftrightarrow 110=a$

$a=110$

1.3. $n(n+1)$ **1.4.** $\dfrac{n(n+1)}{2}$

1.5. $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n^2+n}{2}$

1.6. $a_n=351 \Leftrightarrow \dfrac{n^2+n}{2}=351 \Leftrightarrow n^2+n=702 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2+n-702=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-702)}}{2\times1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+2808}}{2} \Leftrightarrow n=\dfrac{-1\pm53}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=\underbrace{-27}_{\notin\mathbb{N}\setminus\{0\}} \vee n=26$

Sim. É o termo de ordem 26. $a_{26}=351$

2.

Termos	1	2	3	4	…	n
Quadrados brancos	5 $\underset{(1)}{1}+\underset{(2)}{4}$ 1^2+4	8 $\underset{(1)}{4}+\underset{(2)}{4}$ 2^2+4	13 $9+4$ 3^2+4	20 $16+4$ 4^2+4	…	$b_n=n^2+4$
Quadrados azuis	4 4×1	8 4×2	12 4×3	16 4×4	…	$a_n=4n$

Nota: (1) meio; (2) cantos.

2.1. $b_n=n^2+4$; $b_n=2029 \Leftrightarrow n^2+4=2029 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2=2025 \Leftrightarrow n=\underbrace{-45}_{\notin\mathbb{N}\setminus\{0\}} \vee n=45$

Termo de ordem 45. $a_n=4n$; $a_{45}=4\times45=180$

Essa figura tem 180 quadrados azuis.

2.2. $t_n=a_n+b_n \Leftrightarrow t_n=n^2+4+4n \Leftrightarrow t_n=n^2+4n+4$

$t_n=6561 \Leftrightarrow n^2+4n+4=6561 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2+4n-6557=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times1\times(-6557)}}{2\times1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+26228}}{2} \Leftrightarrow n=\dfrac{-4\pm\sqrt{26244}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=\dfrac{-4\pm162}{2} \Leftrightarrow n=\underbrace{-83}_{\notin\mathbb{N}\setminus\{0\}} \vee n=79$

É o termo de ordem 79. $a_{79}=4\times79=316$

Esse termo tem 316 quadrados azuis.

1. Representações de uma sucessão. Progressões aritméticas e progressões geométricas

1. $u_1=1$; $u_2=3^1$; $u_3=3^2=9$; $u_4=3^3=27$;

$u_1=3^0$ ... $u_n=3^{n-1}$

2. $u_n=3^{n-1}$; $u_{11}=3^{11-1}=3^{10}=59\,049$

A figura de ordem 11 tem 59 049 triângulos.

3. 3^{46} ; $n-1=46 \Leftrightarrow n=47$

A ordem do termo é 47.

1.1. $a_n=-10$; $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=-10$

1.2. $b_n=1-3n$; $b_1=1-3\times1=1-3=-2$;

$b_2=1-3\times2=1-6=-5$; $b_3=1-3\times3=1-9=-8$;

$b_4=1-3\times4=1-12=-11$;

$b_5=1-3\times5=1-15=-14$

1.3. $c_n=2^{n-1}$; $c_1=2^{1-1}=2^0=1$; $c_2=2^{2-1}=2^1=2$;

$c_3=2^{3-1}=2^2=4$; $c_4=2^{4-1}=2^3=8$;

$c_5=2^{5-1}=2^4=16$

1.4. $d_n=1+(-1)^n$; $d_1=1+(-1)^1=1-1=0$;

$d_2=1+(-1)^2=1+1=2$; $d_3=1+(-1)^3=1-1=0$;

$d_4=1+(-1)^4=1+1=2$; $d_5=1+(-1)^5=1-1=0$

1.5. $e_n=(-1)^{n+1}\times\dfrac{1}{n}$; $e_1=(-1)^{1+1}\times\dfrac{1}{1}=(-1)^2\times1=1\times1=1$;

$e_2=(-1)^{2+1}\times\dfrac{1}{2}=(-1)^3\times\dfrac{1}{2}=-1\times\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$;

$e_3=(-1)^{3+1}\times\dfrac{1}{3}=(-1)^4\times\dfrac{1}{3}=1\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$;

$e_4=(-1)^{4+1}\times\dfrac{1}{4}=(-1)^4\times\dfrac{1}{4}=-1\times\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}$;

$e_5=(-1)^{5+1}\times\dfrac{1}{5}=(-1)^6\times\dfrac{1}{5}=1\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{5}$

2.1. **a)** $u_1=\dfrac{1^2-2}{1}=\dfrac{1-2}{1}=-1$

b) $u_6=\dfrac{6^2-2}{6}=\dfrac{36-2}{6}=\dfrac{34}{6}=\dfrac{17}{3}$

2.2 **a)** $u_{n+1}=\dfrac{(n+1)^2-2}{n+1}=\dfrac{n^2+2n+1-2}{n+1}=\dfrac{n^2+2n-1}{n+1}$

b) $u_{2n}=\dfrac{(2n)^2-2}{2n}=\dfrac{4n^2-2}{2n}=\dfrac{2n^2-1}{n}$

c) $u_n+1=\dfrac{n^2-2}{n}+1=\dfrac{n^2-2+n}{n}=\dfrac{n^2+n-2}{n}$

d) $u_{n-1}=\dfrac{(n-1)^2-2}{n-1}=\dfrac{n^2-2n+1-2}{n-1}=\dfrac{n^2-2n-1}{n-1}$

2.3. $u_n=9{,}8 \Leftrightarrow \dfrac{n^2-2}{n}=9{,}8 \underset{(n\in\mathbb{N}\setminus\{0\})}{\Leftrightarrow} n^2-2=9{,}8n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2-9{,}8n-2=0 \Leftrightarrow n=\dfrac{9{,}8\pm\sqrt{9{,}8^2+8}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=\dfrac{9{,}8\pm\sqrt{104{,}04}}{2} \Leftrightarrow n=\dfrac{9{,}8\pm 10{,}2}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=-0{,}2 \ \vee \ n=10$

9,8 é o termo da sucessão de ordem 10.

2.4. $u_n=6 \Leftrightarrow \dfrac{n^2-2}{n}=6 \underset{(n\in\mathbb{N}\setminus\{0\})}{\Leftrightarrow} n^2-2=6n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2-6n-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times 1\times(-2)}}{2\times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=\dfrac{6\pm\sqrt{36+8}}{2} \Leftrightarrow n=\dfrac{6\pm\sqrt{44}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=\dfrac{6\pm 2\sqrt{11}}{2} \Leftrightarrow n=\underbrace{3-\sqrt{11}}_{\notin\mathbb{N}\setminus\{0\}} \ \vee \ n=\underbrace{3+\sqrt{11}}_{\notin\mathbb{N}\setminus\{0\}}$

Logo, 6 não é o termo da sucessão.

Pág. 101

3.1. $a_1=3$; $a_2=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{3}$; $a_3=\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{1}{\frac{1}{3}}=3$; $a_4=\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{1}{3}$

3.2. $a_n=\begin{cases}3 \text{ se } n \text{ ímpar}\\ \dfrac{1}{3} \text{ se } n \text{ par}\end{cases}$

4. (a_n): $1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}$ e $\dfrac{1}{81}$

$\dfrac{1}{3^0}, \dfrac{1}{3^1}, \dfrac{1}{3^2}, \dfrac{1}{3^3}$ e $\dfrac{1}{3^4}$

Termo geral: $a_n=\dfrac{1}{3^{n-1}}$

Recorrência: $\begin{cases}a_1=1\\ a_{n+1}=\dfrac{1}{3}\times a_n,\ n\geq 1\end{cases}$

(b_n): 3, 7, 15, 31 e 63

$2^2-1,\ 2^3-1,\ 2^4-1,\ 2^5-1$ e 2^6-1

Termo geral: $b_n=2^{n+1}-1$

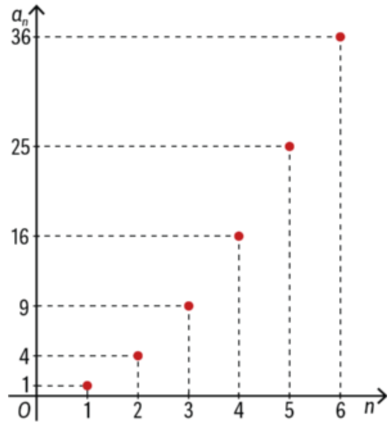
Recorrência: $\begin{cases}b_1=3\\ b_{n+1}=2b_n+1,\ n\geq 1\end{cases}$

Pág. 102

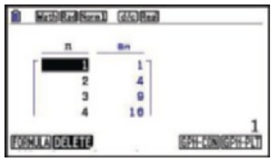
5.1. $a_n=n^2$; $a_1=1^2=1$ $(1,1)$; $a_2=2^2=4$ $(2,4)$;

$a_3=3^2=9$ $(3,9)$; $a_4=4^2=16$ $(4,16)$;

$a_5=5^2=25$ $(5,25)$; $a_6=6^2=36$ $(6,36)$



Com a calculadora gráfica obtivemos o seguinte gráfico e tabela:

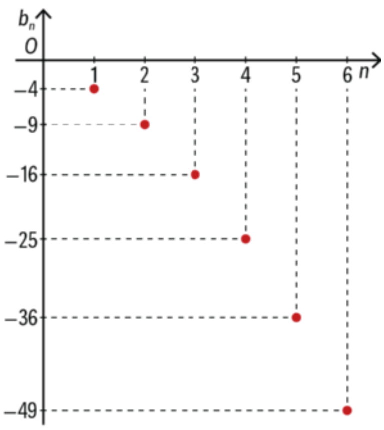


5.2. $b_n=-(n+1)^2$; $b_1=-(1+1)^2=-4$;

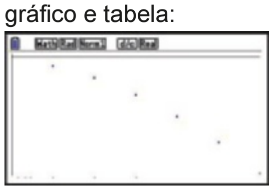
$b_2=-(2+1)^2=-9$; $b_3=-(3+1)^2=-16$;

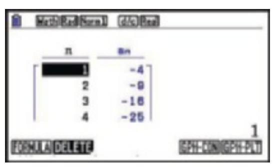
$b_4=-(4+1)^2=-25$; $b_5=-(5+1)^2=-36$;

$b_6=-(6+1)^2=-49$



Com a calculadora gráfica obtivemos o seguinte gráfico e tabela:

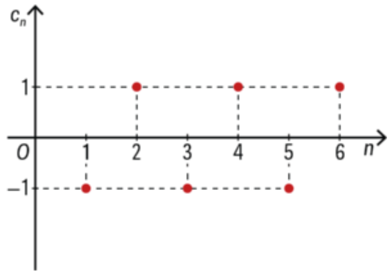




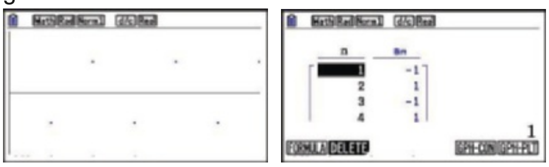
5.3. $c_n = (-1)^n$; $c_1 = (-1)^1 = -1$; $c_2 = (-1)^2 = 1$;

$c_3 = (-1)^3 = -1$; $c_4 = (-1)^4 = 1$; $c_5 = (-1)^5 = -1$;

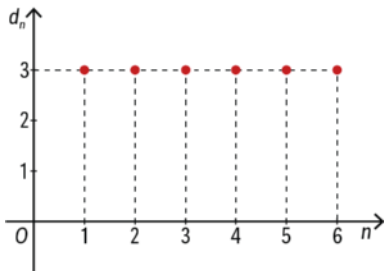
$c_6 = (-1)^6 = 1$



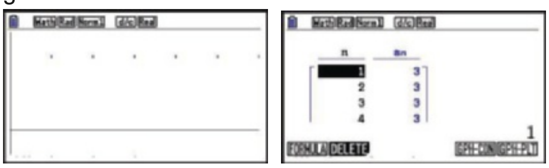
Com a calculadora gráfica obtivemos o seguinte gráfico e tabela:



5.4. $d_n = 3$; $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = 3$



Com a calculadora gráfica obtivemos o seguinte gráfico e tabela:



6.1.

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = 2a_n - 4 \,,\ n \geq 1 \end{cases}$$

$a_1 = 5\ (1, 5)$; $a_2 = 2 \times a_1 - 4 = 2 \times 5 - 4 = 6\ (2, 6)$;

$a_3 = 2 \times a_2 - 4 = 2 \times 6 - 4 = 8\ (3, 8)$;

$a_4 = 2 \times a_3 - 4 = 2 \times 8 - 4 = 12\ (4, 12)$;

$a_5 = 2 \times a_4 - 4 = 2 \times 12 - 4 = 20\ (5, 20)$;

$a_6 = 2 \times a_5 - 4 = 2 \times 20 - 4 = 36\ (6, 36)$

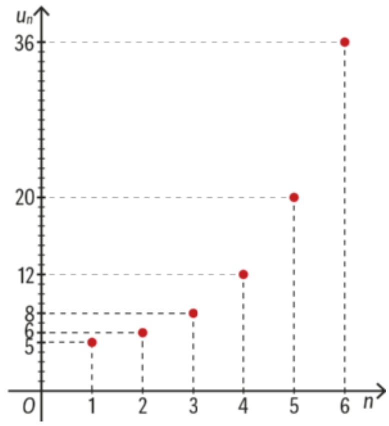


Tabela e gráfico obtidos na calculadora:

6.2.
$$\begin{cases} b_1 = 4 \\ b_{n+1} = \dfrac{n+1}{b_n},\ n \geq 1 \end{cases}$$

$b_1 = 4\ (1, 4)$; $b_2 = \dfrac{1+1}{b_1} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}\ \left(2, \dfrac{1}{2}\right)$;

$b_3 = \dfrac{2+1}{b_2} = \dfrac{3}{\frac{1}{2}} = 6\ (3, 6)$;

$b_4 = \dfrac{3+1}{b_3} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}\ \left(4, \dfrac{2}{3}\right)$;

$b_5 = \dfrac{4+1}{b_4} = \dfrac{5}{\frac{2}{3}} = \dfrac{15}{2}\ \left(5, \dfrac{15}{2}\right)$;

$b_6 = \dfrac{5+1}{b_4} = \dfrac{6}{\frac{15}{2}} = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}\ \left(6, \dfrac{4}{5}\right)$

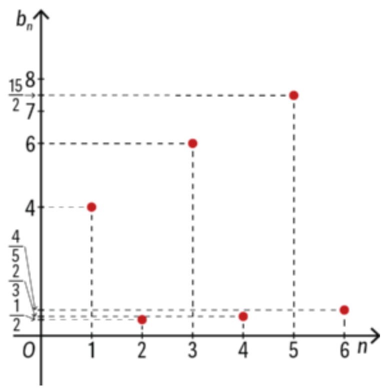
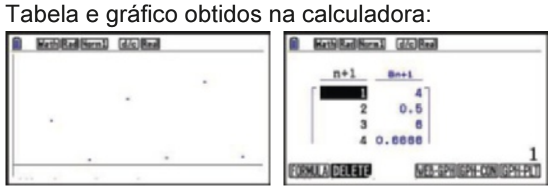


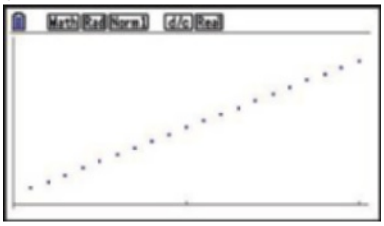
Tabela e gráfico obtidos na calculadora:



Pág. 103

7.1. $u_n = 2n+3$

Com a calculadora gráfica obteve-se o seguinte gráfico:



A sucessão parece ser crescente. Vamos demonstrar que: $\forall\, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\, u_{n+1} - u_n > 0$

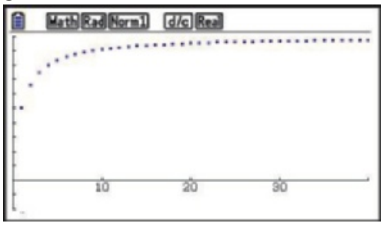
$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 3 - (2n+3) =$

$= \cancel{2n} + 2 + \cancel{3} - \cancel{2n} - \cancel{3} = 2 > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

Logo, a sucessão (u_n) é crescente.

7.2. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

Com a calculadora gráfica obteve-se o seguinte gráfico:



A sucessão parece ser crescente. Vamos demonstrar que: $\forall\, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\, u_{n+1} - u_n > 0$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+1}{n+1+1} - \dfrac{n}{n+1} = \underset{(n+1)}{\dfrac{n+1}{n+2}} - \underset{(n+2)}{\dfrac{n}{n+1}} =$

$= \dfrac{(n+1)(n+1) - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} =$

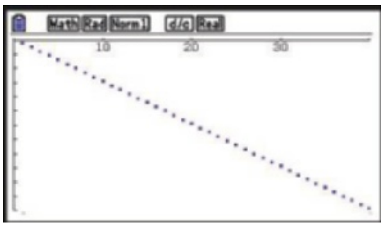
$= \dfrac{\cancel{n^2} + \cancel{2n} + 1 - \cancel{n^2} - \cancel{2n}}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0,$

$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ porque $(n+1)(n+2) > 0$.

Logo, a sucessão (u_n) é crescente.

Pág. 104

8.1. O gráfico da sucessão (v_n) é o seguinte:



A sucessão parece ser decrescente.

8.2. Vamos demonstrar que: $\forall\, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\, v_{n+1} - v_n < 0$

$v_{n+1} - v_n = 1 - 3(n+1) - (1-3n) =$

$= \cancel{1} - \cancel{3n} - 3 - \cancel{1} + \cancel{3n} = -3 < 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

Logo, a sucessão (u_n) é decrescente.

9.1. $a_n = \dfrac{1-3n}{n}$; $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1-3(n+1)}{n+1} - \dfrac{1-3n}{n} =$

$= \dfrac{1-3n-3}{n+1} - \dfrac{1-3n}{n} = \underset{(n)}{\dfrac{-3n-2}{n+1}} - \underset{(n+1)}{\dfrac{1-3n}{n}} =$

$= \dfrac{n(-3n-2) - (1-3n)(n+1)}{n(n+1)} =$

$= \dfrac{-3n^2 - 2n - (n+1-3n^2-3n)}{n(n+1)} =$

$= \dfrac{-\cancel{3n^2} - \cancel{2n} - \cancel{n} - 1 + \cancel{3n^2} + \cancel{3n}}{n(n+1)} = \dfrac{-1}{n(n+1)} < 0,$

$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ porque $n(n+1) > 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ a_{n+1} - a_n < 0$.

A sucessão (a_n) é decrescente.

9.2. $b_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$; $b_{n+1} - b_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n =$

$= \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \times \left(\dfrac{2}{3}\right) - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \left(\dfrac{2}{3} - 1\right) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \times \left(-\dfrac{1}{3}\right) =$

$= -\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n < 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ porque $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n > 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ b_{n+1} - b_n < 0$.

A sucessão (b_n) é decrescente.

9.3. $c_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$; $c_{n+1} - c_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{3}{2}\right)^n =$

$= \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \times \left(\dfrac{3}{2}\right) - \left(\dfrac{3}{2}\right)^n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \left(\dfrac{3}{2} - 1\right) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \times \dfrac{1}{2} =$

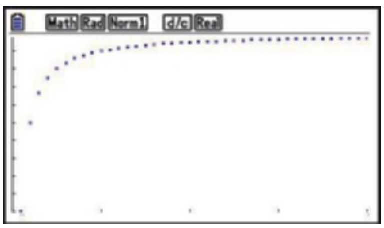
$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ porque $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n > 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ c_{n+1} - c_n > 0$.

A sucessão (c_n) é crescente.

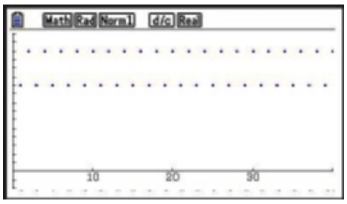
Pág. 105

10.1. $a_n = 6 - \dfrac{1}{n}$



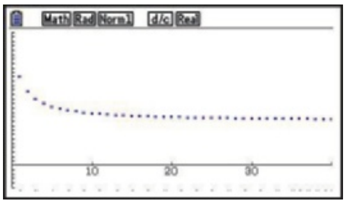
A sucessão parece ser crescente.

$b_n = 6 + (-1)^n$



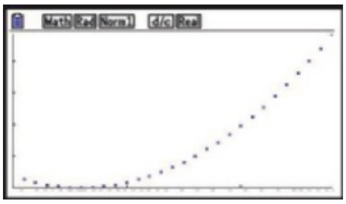
A sucessão é não monótona.

$c_n = \dfrac{n+3}{n+1}$



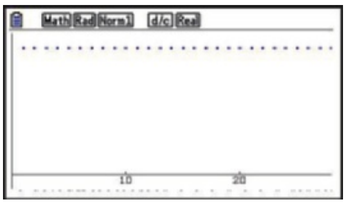
A sucessão parece ser decrescente.

$d_n = (6-n)^2$



A sucessão é não monótona.

$e_n = (-3)^2 = 9$



A sucessão parece ser monótona em sentido lato.

10.2. $a_n = 6 - \dfrac{1}{n}$; $a_{n+1} - a_n = 6 - \dfrac{1}{n+1} - \left(6 - \dfrac{1}{n}\right) =$

$= \cancel{6} - \dfrac{1}{n+1} - \cancel{6} + \dfrac{1}{n} = -\underset{(n)}{\dfrac{1}{n+1}} + \underset{(n+1)}{\dfrac{1}{n}} = \dfrac{-\cancel{n} + \cancel{n} + 1}{n(n+1)} =$

$= \dfrac{1}{n(n+1)} > 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ porque $n(n+1) > 0$.

$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_{n+1} - a_n > 0$.

A sucessão (a_n) é crescente.

$b_n = 6 + (-1)^n$; $b_1 = 6 + (-1)^1 = 6 - 1 = 5$;

$b_2 = 6 + (-1)^2 = 6 + 1 = 7$; $b_3 = 6 + (-1)^3 = 6 - 1 = 5$;

$b_2 > b_1$ mas $b_3 < b_2$.

Logo, (b_n) não é monótona.

$c_n = \dfrac{n+3}{n+1}$; $c_{n+1} - c_n = \dfrac{n+1+3}{n+1+1} - \dfrac{n+3}{n+1} =$

$= \underset{(n+1)}{\dfrac{n+4}{n+2}} - \underset{(n+2)}{\dfrac{n-3}{n+1}} = \dfrac{(n+4)(n+1) - (n+3)(n+2)}{(n+1)(n+2)} =$

$= \dfrac{n^2 + n + 4n + 4 - (n^2 + 2n + 3n + 6)}{(n+1)(n+2)} =$

$= \dfrac{\cancel{n^2} + \cancel{5n} + 4 - \cancel{n^2} - \cancel{5n} - 6}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{-2}{(n+1)(n+2)} < 0,$

$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ porque $(n+1)(n+2) > 0$.

$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $c_{n+1} - c_n < 0$.

A sucessão (c_n) é decrescente.

$d_n = (6-n)^2$; $d_{n+1} - d_n = (6 - (n+1))^2 - (6-n)^2 =$

$= (6 - n - 1)^2 - (6-n)^2 = (5-n)^2 - (6-n)^2 =$

$= 25 - 10n + n^2 - (36 - 12n + n^2) =$

$= 25 - 10n + \cancel{n^2} - 36 + 12n - \cancel{n^2} = 2n - 11$

$2n - 11 > 0 \Leftrightarrow 2n > 11 \Leftrightarrow n > \dfrac{11}{2} \Leftrightarrow n \in \{6, 7, 8, ...\}$

$2n - 11 < 0 \Leftrightarrow 2n < 11 \Leftrightarrow n < \dfrac{11}{2} \Leftrightarrow n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Logo, a sucessão (d_n) não é monótona.

Alternativa:

$d_5 = (6-5)^2 = 1$

$d_6 = (6-6)^2 = 0$

$d_7 = (6-7)^2 = 1$

$d_6 < d_5$, mas $d_7 > d_6$.

Logo, (d_n) é não monótona.

$e_n = (-3)^2 = 9$; $e_{n+1} - e_n = 9 - 9 = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$

A sucessão (e_n) é monótona em sentido lato.

11. $v_n = (-1)^n + 2n$;

$v_{n+1} - v_n = (-1)^{n+1} + 2(n+1) - \left[(-1)^n + 2n\right] =$

$= (-1)^n \times (-1) + \cancel{2n} + 2 - (-1)^n - \cancel{2n} = -2(-1)^n + 2 =$

$= \begin{cases} 0 \text{ se } n \text{ par} \\ 4 \text{ se } n \text{ ímpar} \end{cases}$

$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $v_{n+1} - v_n \geq 0$.

(v_n) é crescente em sentido lato.

Pág. 106

12.1. $a_n = \dfrac{3-2n}{5}$; $a_{n+1} - a_n = \dfrac{3 - 2(n+1)}{5} - \dfrac{3-2n}{5} =$

$= \dfrac{\cancel{3} - \cancel{2n} - 2 - \cancel{3} + \cancel{2n}}{5} = -\dfrac{2}{5}$

(a_n) é uma progressão aritmética de razão

$r = -\frac{2}{5}$.

12.2. $v_n = \frac{n+1}{n}$; $v_{n+1} - v_n = \frac{n+1+1}{n+1} - \frac{n+1}{n} =$

$= \underset{(n)}{\frac{n+2}{n+1}} - \underset{(n+1)}{\frac{n+1}{n}} = \frac{n(n+2)-(n+1)(n+1)}{n(n+1)} =$

$= \frac{n^2+2n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)} = \frac{\cancel{n^2}+\cancel{2n}-\cancel{n^2}-\cancel{2n}-1}{n(n+1)} =$

$= \frac{-1}{n(n+1)}$

Como $v_{n+1} - v_n$ não é constante, (v_n) não é uma progressão aritmética.

Alternativa:

$v_1 = 2$, $v_2 = \frac{3}{2}$ e $v_3 = \frac{4}{3}$

Como $v_2 - v_1 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$ e $v_3 - v_2 = \frac{4}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{6}$, não é constante a diferença entre dois termos consecutivos, pelo que (v_n) não é uma progressão aritmética.

12.3. $w_n = \begin{cases} w_1 = 1 \\ w_{n+1} = w_n + 1, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$

$w_{n+1} = w_n + 1 \Leftrightarrow w_{n+1} - w_n = 1$

Logo, (w_n) é uma progressão aritmética de razão 1.

Pág. 107

13.1. $a_1 = 3$; $r = 5$; $a_n = a_1 + (n-1)r$;

$a_n = a_1 + (n-1) \times 5 \Leftrightarrow a_n = 3 + 5n - 5 \Leftrightarrow a_n = 5n - 2$

$a_{301} = 5 \times 301 - 2 = 1503$

13.2. $a_1 = -2$; $r = \frac{1}{3}$; $a_n = a_1 + (n-1)r$;

$a_n = -2 + (n-1) \times \frac{1}{3} \Leftrightarrow a_n = \underset{(\times 3)}{\frac{-2}{1}} + \frac{1}{3}n - \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_n = \frac{1}{3}n - \frac{7}{3}$; $a_{301} = \frac{1}{3} \times 301 - \frac{7}{3} = 98$

13.3. $a_1 = 100$; $r = -\frac{1}{2}$; $a_n = a_1 + (n-1)r$;

$a_n = 100 + (n-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow a_n = \underset{(\times 2)}{\frac{100}{1}} - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_n = -\frac{1}{2}n + \frac{201}{2}$; $a_{301} = -\frac{1}{2} \times 301 + \frac{201}{2} = -50$

Pág. 108

14.1. $u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+1}{3} - \frac{2n+1}{3} =$

$= \frac{\cancel{2n}+2+\cancel{1}-\cancel{2n}-\cancel{1}}{3} = \frac{2}{3}$

Como $u_{n+1} - u_n$ é constante, (u_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{2}{3}$.

14.2. $100 < u_n < 120 \Leftrightarrow 100 < \frac{2n+1}{3} < 120 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2n+1}{3} > 100 \wedge \frac{2n+1}{3} < 120 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2n+1 > 300 \wedge 2n+1 < 360 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2n > 299 \wedge 2n < 359 \Leftrightarrow n > \frac{299}{2} \wedge n < \frac{359}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n > 149{,}5 \wedge n < 179{,}5 \Leftrightarrow 150 \leq n \leq 179$

$179 - 150 + 1 = 30$

Há 30 termos da sucessão entre 100 e 120.

15. $\begin{cases} u_1 = -4 \\ u_{n+1} = u_n - 6, \ n \leq 1 \end{cases}$; $u_1 = -4$; $r = -6$;

$u_n = u_1 + (n-1)r$; $u_n = -4 + (n-1) \times (-6) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n = -4 - 6n + 6 \Leftrightarrow u_n = -6n + 2$

$u_{85} = -6 \times 85 + 2 = -508$

16. $\begin{cases} v_1 = -3 \\ \frac{1}{4}v_{n+1} = \frac{v_n}{4} - \underset{(\times 2)}{\frac{1}{2}}, \ n \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = -3 \\ v_{n+1} = v_n - 2, \ n \geq 1 \end{cases}$

16.1. $v_{n+1} = v_n - 2 \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = -2$

Como $v_{n+1} - v_n$ é constante, (v_n) é uma progressão aritmética de razão -2 .

16.2. $v_1 = -3$; $r = -2$;

$v_n = v_1 + (n-1)r \Leftrightarrow v_n = -3 + (n-1) \times (-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v_n = -3 - 2n + 2 \Leftrightarrow v_n = -2n + 1$

$v_{80} = -2 \times 80 - 1 = -161$

17. $u_n = (n-2)^2 - n^2 = \cancel{n^2} - 4n + 4 - \cancel{n^2} = -4n + 4$

17.1. $u_{n+1} - u_n = -4(n+1) + 4 - (-4n+4) =$

$= -\cancel{4n} - 4 + 4 - \cancel{4n} - 4 = -4$

(u_n) é uma progressão aritmética de razão -4 .

17.2. $u_1 = -4 \times 1 + 4 = 0$; $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = u_n - 4, \ n \geq 1 \end{cases}$

Pág. 109

18.1. $b_1 = 3$; $r = -3$; $b_n = b_1 + (n-1)r$;

$b_n = 3 + (n-1)\times(-3) \Leftrightarrow b_n = 3 - 3n + 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b_n = -3n + 6$

18.2. $b_5 = -10$; $b_{10} = -25$;

$\begin{cases} b_5 = -10 \\ b_{10} = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + 4r = -10 \\ b_1 + 9r = -25 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = -10 - 4r \\ -10 - 4r + 9r = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{1cm}} \\ 5r = -15 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = -10 - 4\times(-3) \\ r = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 2 \\ r = -3 \end{cases}$

$b_n = 2 + (n-1)\times(-3) \Leftrightarrow b_n = 2 - 3n + 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b_n = -3n + 5$

18.3. $b_2 + b_5 = 0$; $r = \frac{1}{2}$;

$b_2 + b_5 = 0 \Leftrightarrow b_1 + r + b_1 + 4r = 0 \Leftrightarrow 2b_1 + 4r = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2b_1 + 5r = 0 \Leftrightarrow 2b_1 + 5\times\frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2b_1 = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b_1 = -\frac{5}{4}$; $b_n = -\frac{5}{4} + (n-1)\times\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b_n = -\frac{5}{4} + \underset{(\times 2)}{\frac{1}{2}}n - \underset{(\times 2)}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow b_n = \frac{1}{2}n - \frac{7}{4}$

18.4. $b_1 - b_2 = 5$; $b_4 + b_7 = -5$;

$\begin{cases} b_1 - b_2 = 5 \\ b_4 + b_7 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 - (b_1 + r) = 5 \\ b_1 + 3r + b_1 + 6r = -5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{b_1} - \cancel{b_1} - r = 5 \\ 2b_1 + 95 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -5 \\ 2b_1 + 9\times(-5) = -5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{1cm}} \\ 2b_1 - 45 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{1cm}} \\ 2b_1 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -5 \\ b_1 = 20 \end{cases}$

$b_n = 20 + (n-1)\times(-5) \Leftrightarrow b_n = 20 - 5n + 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b_n = -5n + 25$

19. $u_9 = \frac{3}{7}u_{17}$; $u_4 = -0,5$;

$\begin{cases} u_9 = \frac{3}{7}u_{17} \\ u_4 = -0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7u_9 = 3u_{17} \\ u_1 + 3r = -0,5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7(u_1 + 8r) = 3(u_1 + 16r) \\ u_1 = -0,5 - 3r \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7u_1 + 56r = 3u_1 + 48r \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 + 8r = 0 \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(-0,5 - 3r) + 8r = 0 \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 - 12r + 8r = 0 \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4r = 2 \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{1}{2} \\ u_1 = -0,5 - 3\times\left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{1}{2} \\ u_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{1}{2} \\ u_1 = 1 \end{cases}$

$u_n = 1 + (n-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow u_n = 1 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n = -\frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$; $\frac{1}{2}n + \frac{3}{2} = -20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -n + 3 = -40 \Leftrightarrow -n = -43 \Leftrightarrow n = 43$

Como $43 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, -20 é o termo da sucessão de ordem 43, isto é, $u_{43} = -20$.

20. Sejam u_n e u_{n+1} dois termos consecutivos de uma progressão aritmética. Então, $u_{n+1} = u_n + r$.

$\begin{cases} u_n + u_{n+1} = -\frac{3}{4} \\ u_n \times u_{n+1} = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n + u_n + r = -\frac{3}{4} \\ u_n \times (u_n + r) = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_n + r = -\frac{3}{4} \\ u_n^2 + u_n r = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -2u_n - \frac{3}{4} \\ 8u_n^2 + 8u_n r = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{1cm}} \\ 8u_n^2 + 8u_n\left(-2u_n - \frac{3}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{1cm}} \\ 8u_n^2 - 16u_n^2 - 6u_n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -2u_n - \frac{3}{4} \\ -8u_n^2 - 6u_n - 1 = 0 \end{cases}$

C.A.: $-8u_n^2 - 6u_n - 1 = 0 \Leftrightarrow 8u_n^2 + 6u_n + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2\times 8} \Leftrightarrow u_n = \frac{-6 \pm 2}{16} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n = -\frac{1}{2} \vee u_n = -\frac{1}{4}$

Se $u_n = -\frac{1}{2}$, $r = -2\times\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Se $u_n = -\frac{1}{4}$, $r = -2\times\left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$

$r = -\frac{1}{4}$ ou $r = \frac{1}{4}$

Pág. 110

21.1. $\begin{cases} u_5 = -\frac{1}{2} \\ u_8 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4r = -\frac{1}{2} \\ u_1 + 7r = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 8r = -1 \\ u_1 = -2 - 7r \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2 - 7r) + 8r = -1 \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 - 14r + 8r = -1 \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6r = 3 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -\dfrac{1}{2} \\ u_1 = -2-7\times\left(-\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -\dfrac{1}{2} \\ u_1 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$r = -\dfrac{1}{2}$

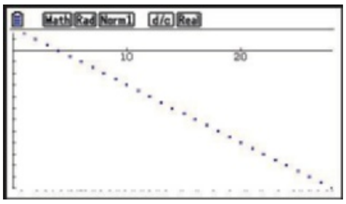
21.2. Como $r = -\frac{1}{2} < 0$, (u_n) é decrescente.

21.3. $v_n = \dfrac{3}{2} + (n-1)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow v_n = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}n + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v_n = -\dfrac{1}{2}n + 2$

O gráfico de (v_n) está contido na reta de equação

$y = -\dfrac{1}{2}x + 2$.



Pág. 111

22.1. $a_n = \dfrac{\pi^n}{3}$; $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{\pi^{n+1}}{\cancel{3}}}{\frac{\pi^n}{\cancel{3}}} = \dfrac{\pi^{n+1}}{\pi^n} = \dfrac{\cancel{\pi^n}\times\pi}{\cancel{\pi^n}} = \pi$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \pi$

.

22.2. $b_n = \left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$; $\dfrac{b^{n+1}}{b^n} = \dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^{n+1-1}}{\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}} = \dfrac{\cancel{\sqrt{3}^n}}{\cancel{\sqrt{3}^n}\times\sqrt{3}^{-1}} =$

$= \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$

(b_n) é uma progressão geométrica de razão

$r = \sqrt{3}$.

22.3. $c_n = 2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2-n}$; $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{\cancel{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{2-(n+1)}}{\cancel{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{2-n}} = \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2-n-1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2-n}} =$

$= \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{1-n}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2-n}} = \dfrac{\frac{1}{3}\times\cancel{\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\times\cancel{\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}} = \dfrac{9}{3} = 3$

(c_n) é uma progressão geométrica de razão

$r = 3$.

23. $u_1 = -5$; $u_4 = -40$; $u_2 = u_1 \times r = -5r$;

$u_3 = -5r\times r = -5r^2$; $u_4 = -5r^2\times r = -5r^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -40 = -5r^3 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow r = 2$

$r = 2$

Pág. 112

24. Sucessão das áreas: 2^2 1^2 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$ ... ;

$4 \xrightarrow[\times\frac{1}{4}]{} 1 \xrightarrow[\times\frac{1}{4}]{} \dfrac{1}{4} \xrightarrow[\times\frac{1}{4}]{} \dfrac{1}{16}$

Logo, o termo geral da sequência das áreas é:

$a_n = 4\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$. $a_n = 4\times\left(4^{-1}\right)^{n-1} = 4\times 4^{-n+1} =$

$= 4^{1-n+1} = 4^{2-n}$; $a_n = 4^{2-n}$; $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{4^{2-(n+1)}}{4^{2-n}} =$

$= \dfrac{4^{2-n-1}}{4^{2-n}} = \dfrac{4^{1-n}}{4^{2-n}} = 4^{1-n-(2-n)} = 4^{1-n-2+n} = 4^{-1} = \dfrac{1}{4}$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão

$r = \dfrac{1}{4}$.

$a_8 = 4^{2-8} = 4^{-6} = \dfrac{1}{4^6} = \dfrac{1}{4096}$

Pág. 113

25.1. $u_1 = 4$; $r = 2$;

$u_n = 4\times 2^{n-1} = 2^2\times 2^{n-1} = 2^{2+n-1} = 2^{n+1}$

$u_n = 2^{n+1}$

25.2. $u_1 = 4$; $r = 2$; $u_2 = u_1\times r \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = u_1\times 2 \Leftrightarrow u_1 = \dfrac{1}{4}$;

$u_n = \dfrac{1}{4}\times 2^{n-1} = 2^{-2}\times 2^{n-1} = 2^{-2+n-1} = 2^{n-3}$

$u_n = 2^{n-3}$

25.3. $u_7 + u_6 = -36$; $r = 3$;

$u_7 + u_6 = -36 \Leftrightarrow u_1\times r^6 + u_1\times r^5 = -36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_1\times 3^6 + u_1\times 3^5 = -36 \Leftrightarrow u_1\left(3^6+3^5\right) = -36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 972u_1 = -36 \Leftrightarrow u_1 = -\dfrac{36}{972} \Leftrightarrow u_1 = -\dfrac{1}{27}$;

$u_n = -\dfrac{1}{27}\times 3^{n-1} \Leftrightarrow u_n = -\dfrac{1}{3^3}\times 3^{n-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n = -3^{-3}\times 3^{n-1} \Leftrightarrow u_n = -3^{-3+n-1} \Leftrightarrow u_n = -3^{n-4}$

$u_n = -3^{n-4}$

26. $u_4 = 32$; $u_7 = 256$; $\begin{cases} u_4 = 32 \\ u_7 = 256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \times r^3 = 32 \\ u_1 \times r^6 = 256 \end{cases} \underset{(r\neq 0)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{32}{r^3} \\ \dfrac{32}{r^3} \times r^6 = 256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ 32r^3 = 256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ r^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ r = \sqrt[3]{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{32}{2^3} \\ r = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{32}{8} \\ r = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ r = 2 \end{cases}$

$u_n = 4 \times 2^{n-1} = 2^2 \times 2^{n-1} = 2^{2+n-1} = 2^{n+1}$

$u_6 = 2^{6+1} = 2^7 = 128$

$u_6 = 128$

27.1. $\begin{cases} u_5 = \dfrac{1}{2^6} \\ u_{35} = -\dfrac{1}{32} \times u_{30} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \times r^4 = \dfrac{1}{2^6} \\ \cancel{u_1} \times r^{34} = -\dfrac{1}{32} \times \cancel{u_1} \times r^{29} \end{cases} \underset{(r\neq 0)}{\Leftrightarrow}$

$\underset{(r\neq 0)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2^6 \times r^4} \\ \dfrac{r^{34}}{r^{29}} = -\dfrac{1}{32} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ r^5 = -\dfrac{1}{2^5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ r = -\sqrt[5]{\dfrac{1}{2^5}} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ r = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad r < 0$

27.2. $u_5 = \dfrac{1}{2^6} \Leftrightarrow u_1 \times r^4 = \dfrac{1}{2^6} \Leftrightarrow u_1 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{2^6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_1 \times \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{2^6} \Leftrightarrow u_1 = \dfrac{\frac{1}{2^6}}{\frac{1}{2^4}} \Leftrightarrow u_1 = \dfrac{2^4}{2^6} \Leftrightarrow u_1 = \dfrac{1}{2^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_1 = \dfrac{1}{4}$; $u_n = \dfrac{1}{4} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} =$

$= \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{2+n-1} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{4} \\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{2} u_n, \ n \geq 1 \end{cases}$

Pág. 114

28. Seja l_n o lado do quadrado q_n.

$l_{n+1} = \dfrac{1}{2} d_n = \dfrac{1}{2}\sqrt{l_n^2 + l_n^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2l_n^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} l_n$

$\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ l_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} l_n$

28.1. $p_n = 4l_n$; $p_{n+1} = 4l_{n+1} = 4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} l_n\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(4l_n) =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} p_n$; $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ p_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} p_n$

Logo (p_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$a_n = l_n^2$; $a_{n+1} = (l_{n+1})^2 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} l_n\right)^2 = \dfrac{1}{2} l_n^2 = \dfrac{1}{2} a_n$;

$\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2} a_n$

Logo (a_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \dfrac{1}{2}$.

28.2. a) $p_n = p_1 r^{n-1}$; $p_n = 4 \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

C.A.: $l_1 = 1$; $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $p_n = 4l_n$; $p_1 = 4l_1$;

$p_1 = 4 \times 1 = 4$

b) $a_n = a_1 r^{n-1}$; $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

C.A.: $l_1 = 1$; $r = \dfrac{1}{2}$; $a_n = l_n^2$; $a_1 = l_1^2$; $a_1 = 1^2 = 1$

Pág. 115

29.1. Para a sucessão ser crescente com $a_1 = 2 > 0$, a razão tem de ser maior que 1.

$a_n = 2 \times 3^{n-1}$, por exemplo.

29.2. Para a sucessão ser crescente com $a_1 > 0$, $0 < r < 1$.

$a_n = 48 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$, por exemplo.

29.3. Para a sucessão ser crescente com $a_1 < 0$, $0 < r < 1$.

$a_n = -256 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$, por exemplo.

29.4. $r = \dfrac{1}{2}$, $0 < r < 1$

Para a sucessão ser decrescente, $a_1 > 0$.

$a_n = 16 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$, por exemplo.

Pág. 116

Tarefas de consolidação 1

1. 1, 3, 6, 10, ...

1.1. O 5.º termo tem mais 5 círculos que o 4.º termo, portanto tem 15 círculos. O 6.º termos tem mais 6 círculos que o 5.º termo, portanto tem 21 círculos. O 7.º termo tem mais 7 círculos que o 6.º termo, portanto tem 28 círculos. O 7.º termo da sucessão tem 28 círculos.

1.2. $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$; $u_1 = \dfrac{1(1+1)}{2} = 1$; $u_2 = \dfrac{2(2+1)}{2} = 3$;

$u_3 = \dfrac{3(3+1)}{2} = 6$; $u_4 = \dfrac{4(4+1)}{2} = 10$

O termo geral $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ é compatível com os termos apresentados.

1.3. $u_n = 55 \Leftrightarrow \dfrac{n(n+1)}{2} = 55 \Leftrightarrow n(n+1) = 110 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2 + n - 110 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\times 1\times(-110)}}{2\times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+440}}{2} \Leftrightarrow n = \dfrac{-1\pm 21}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \underset{\notin \mathbb{N}}{-11} \vee n = 10$

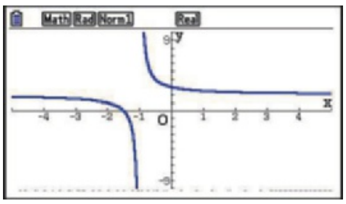
É o termo de ordem 10, isto é $u_{10} = 55$.

2. $u_n > 0 \wedge \dfrac{2}{u_n} \geq 3$; $\dfrac{2}{u_n} \geq 3 \underset{(u_n>0)}{\Leftrightarrow} 2 \geq 3u_n \Leftrightarrow u_n \leq \dfrac{2}{3}$

$0 < u_n \leq \dfrac{2}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$u_n \in \left]0, \dfrac{2}{3}\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. (u_n) é limitada porque é majorada e minorada.

3.1.



3.2. $u_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$

O gráfico de (u_n) está contido no gráfico da função *f*.

$2 < u_n \leq 2,5$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

4. $d_n - d_{n+1} < 0 \Leftrightarrow d_{n+1} - d_n > 0$

(d_n) é monótona crescente.

Opção (D)

5. $u_1 = -4$; $u_2 = \dfrac{2u_1 - 1}{3} = \dfrac{2\times(-4)-1}{3} = -\dfrac{9}{3} = -3$;

$u_3 = \dfrac{2u_2 - 1}{3} = \dfrac{2\times(-3)-1}{3} = -\dfrac{7}{3}$

Opção (A)

6. $u_8 = 14$; $u_{20} = 32$; $\begin{cases} u_8 = 14 \\ u_{20} = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 7r = 14 \\ u_1 + 19r = 32 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 14 - 7r \\ 14 - 7r + 19r = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ 12r = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ r = \dfrac{18}{12} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 14 - 7\times\dfrac{3}{2} \\ r = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{7}{2} \\ r = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

$u_n = u_1 + (n-1)r$

$u_n = \dfrac{7}{2} + (n-1)\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow u_n = \dfrac{7}{2} + \dfrac{3}{2}n - \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow u_n = \dfrac{3}{2}n + 2$

$u_n = \dfrac{3}{2}n + 2$

Pág. 117

7.1. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2(n+1)-1}{4} - \dfrac{2n-1}{4} =$

$= \dfrac{2n+2-1}{4} - \dfrac{2n-1}{4} = \dfrac{\cancel{2n}+1-\cancel{2n}+1}{4} = \dfrac{1}{2}$

(u_n) é uma progressão aritmética de razão $r = \dfrac{1}{2}$.

7.2. $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{4} \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2},\ n \geq 1 \end{cases}$

C.A.: $u_1 = \dfrac{2\times 1 - 1}{4} = \dfrac{1}{4}$

8. $a_1 = \dfrac{1}{4}$; $a_2 = -\dfrac{1}{8}$; $r = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{-\dfrac{1}{8}}{\dfrac{1}{4}} = -\dfrac{4}{8} = -\dfrac{1}{2}$;

$a_n = a_1 \times r^{n-1}$; $a_n = \dfrac{1}{4}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$;

$a_{21} = \dfrac{1}{4}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{21-1} = 4^{-1}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{20} = \left(2^2\right)^{-1}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{20} =$

$= 2^{-2}\times 2^{-20} = 2^{-22}$

9.1. $F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4 \quad \ldots$

$2 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}$

As áreas vão reduzindo a metade. Estamos perante uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} \times a_n, \ n \geq 1 \end{cases}$$

9.2. $a_n = a_1 \times r^{n-1}$; $a_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 \times \left(2^{-1}\right)^{n-1} =$

$= 2 \times 2^{-n+1} = 2^{1-n+1} = 2^{-n+2}$; $a_n = 2^{-n+2}$;

$a_6 = 2^{-6+2} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

10.1. $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} a_n \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} a_n \Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{3}{2} a_n$

Logo, (a_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{3}{2}$.

10.2. $a_3 \times a_4 = \frac{27}{8} \Leftrightarrow a_1 r^2 \times a_1 r^3 = \frac{27}{8} \Leftrightarrow a_1^2 \times r^5 = \frac{27}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1^2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{27}{8} \Leftrightarrow a_1^2 \times \frac{243}{32} = \frac{27}{8} \Leftrightarrow a_1^2 = \frac{\frac{27}{8}}{\frac{243}{32}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1^2 = \frac{27 \times 32}{8 \times 243} \Leftrightarrow a_1^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow a_1 = \pm\sqrt{\frac{4}{9}} \Leftrightarrow a_1 = \pm\frac{2}{3}$

Como $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_1 = \frac{2}{3}$. $a_n = a_1 r^{n-1}$;

$a_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n =$

$= \frac{4}{9} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$ ou $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$

11.1.

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5} u_n - 4 \end{cases}$$

$u_1 = 2$; $u_2 = \frac{1}{5} u_1 - 4 = \frac{1}{5} \times 2 - 4 = -\frac{18}{5} = -3{,}6$;

$u_3 = \frac{1}{5} u_2 - 4 = \frac{1}{5} \times \left(-\frac{18}{5}\right) - 4 = -\frac{18}{25} - 4 = -\frac{118}{25} =$

$= -4{,}72$; $v_n = u_n + 5$; $v_1 = u_1 + 5 = 2 + 5 = 7$;

$v_2 = u_2 + 5 = -3{,}6 + 5 = 1{,}4$;

$v_2 = u_3 + 5 = -4{,}72 + 5 = 0{,}28$

11.2. $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} + 5}{u_n + 5} = \frac{\frac{1}{5} u_n - 4 + 5}{u_n + 5} = \frac{\frac{1}{5} u_n + 1}{u_n + 5} = \frac{\frac{u_n + 5}{5}}{u_n + 5} =$

$= \frac{\cancel{u_n + 5}}{5\left(\cancel{u_n + 5}\right)} = \frac{1}{5}$

(v_n) é uma progressão aritmética de razão $r = \frac{1}{5}$.

11.3. $v_n = v_1 r^{n-1}$; $v_n = 7\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$; $v_n = u_n + 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n = v_n - 5 \Leftrightarrow u_n = 7\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 5$

Pág. 119

Avaliação formativa 1

1.

	1.º	2.º	3.º	4.º	...
Sequência rosa	4	4	4	4	...
Sequência azul	0	3 $\left(2^2 - 1\right)$	8 $\left(3^2 - 1\right)$	15 $\left(4^2 - 1\right)$	
Sequência círculos	4 $(4 + 0)$	7 $(4 + 3)$	12 $(4 + 8)$	19 $(4 + 15)$	

Termo de ordem 6: $6 = 4 + \left(6^2 - 1\right) = 4 + 36 - 1 = 39$

$\text{I} \rightarrow \text{a)}$

Termo de ordem $n + 1$:

$(n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n + \cancel{1} - \cancel{1} = n^2 + 2n$; $\text{II} \rightarrow \text{b)}$

$7 - 4 = 3$; $12 - 7 = 5$

Não é progressão aritmética. Termo geral da sucessão: $u_n = 4 + \left(n^2 - 1\right) = 4 + n^2 - 1 = n^2 + 3$

$u_n = 444 \Leftrightarrow n^2 + 3 = 444 \Leftrightarrow n^2 = 441 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \pm\sqrt{441} \Leftrightarrow n = \underbrace{-21}_{\notin \mathbb{N}} \vee n = 21$

O termo de ordem 21 tem 444 círculos. $\text{III} \rightarrow \text{b)}$

$\text{I} \rightarrow \text{a)}$; $\text{II} \rightarrow \text{b)}$; $\text{III} \rightarrow \text{b)}$

2. $u_4 = 15$; $u_7 = -0{,}405$;

$$\begin{cases} u_4 = 15 \\ u_7 = -0{,}405 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \times r^3 = 15 \\ u_1 \times r^6 = -0{,}405 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{15}{r^3} \\ \frac{15}{r^3} \times r^6 = -0{,}405 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ 15r^3 = -0{,}405 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ r^3 = -\frac{0{,}405}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ r^3 = -0{,}027 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ r = \sqrt[3]{-0{,}027} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{15}{(-0{,}3)^3} \\ r = -0{,}3 \end{cases}$$

$u_n = u_1 \times r^{n-1}$; $u_n = \frac{15}{(-0,3)^3} \times (-0,3)^{n-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n = 15 \times (-0,3)^{-3} \times (-0,3)^{n-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n = 15 \times (-0,3)^{n-4}$

3. $v_4 = -\frac{1}{26}$; $v_{18} = 16v_{22}$;

$$\begin{cases} v_4 = -\frac{1}{26} \\ v_{18} = 16v_{22} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 \times r^3 = -\frac{1}{26} \\ v_1 \times r^{17} = 16 v_1 r^{21} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ 1 = 16r^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ r^4 = \frac{1}{26} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ r = \sqrt[4]{\frac{1}{26}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ r = -\frac{1}{2} \vee r = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Se $r = -\frac{1}{2}$, $v_1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{26} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v_1 \times \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{26} \Leftrightarrow v_1 = \frac{\frac{1}{26}}{\frac{1}{8}} = \frac{8}{26} = \frac{4}{13}$;

$v_n = \frac{4}{13} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{8}{13} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Se $r = \frac{1}{2}$, $v_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{26} \Leftrightarrow v_1 = -\frac{4}{13}$;

$v_n = -\frac{4}{13} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{8}{13} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

4. Seja (u_n) uma progressão aritmética de razão r.

$u_{n+1} - u_n = r$; $v_n = k^{u_n}$;

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{k^{u_{n+1}}}{k^{u_n}} = k^{u_{n+1} - u_n} = k^r \ (\in \mathbb{R})$

Logo (v_n) é uma progressão geométrica de razão k^r.

5. $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = a_n - 2 \end{cases}$

(a_n) é uma progressão aritmética de razão $r = -2$. $a_n = a_1 + (n-1)r$; $a_n = 4 + (n-1) \times (-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_n = 4 - 2n + 2 \Leftrightarrow a_n = -2n + 6$;

$a_{201} = -2 \times 201 + 6 = -396$

2. Soma de termos de uma progressão

Pág. 120

Tarefa 2

1.

Número de construção (n)	1	2	3	4	5	...	n
Perímetro de construção (p_n)	6	10	14	18	22	...	p_n

2. (p_n) é uma progressão aritmética de razão 4 e primeiro termo $p_1 = 6$.

$(p_n) = p_1 + (n-1) \times r = 6 + (n-1) \times 4 = 4n + 2$

3. Os perímetros das várias construções estão em progressão aritmética de razão $r = 4$. Então,

$p_{100} = 4 \times 100 + 2 = 402$

O perímetro da construção 10 é 402.

4. $p_1 + p_{10} = 6 + 42 = 48$; $p_2 + p_9 = 10 + 38 = 48$;

$p_3 + p_8 = 14 + 34 = 48$; $p_4 + p_7 = 18 + 30 = 48$;

$p_5 + p_6 = 22 + 26 = 48$

A soma é sempre igual a 48.

5. A soma dos 10 primeiros termos da sucessão é igual à soma dos 5 resultados calculados anteriormente. Assim, sendo S_{10} a soma dos 10 primeiros termos da sucessão,

$S_{10} = 5 \times (p_1 + p_{10}) = 5 \times 48 = 240$

Pág. 122

30.1. $u_1 = 2 \times 1 = 2$; $u_{20} = 2 \times 20 = 40$;

$S_{20} = \frac{u_1 + u_{20}}{2} \times 20 \Leftrightarrow S_{20} = \frac{2 + 40}{2} \times 20 \Leftrightarrow S_{20} = 420$

$S_{20} = 420$

30.2. A sucessão dos números ímpares é uma progressão aritmética de razão $r = 2$, cujo primeiro termo é $u_1 = 1$.

$u_{100} = 1 + (100 - 1) \times 2 = 199$;

$S_{100} = \frac{u_1 + u_{100}}{2} \times 100 \Leftrightarrow S_{100} = \frac{1 + 199}{2} \times 100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{100} = 10\,000$

$S_{100} = 10\,000$

30.3. $u_{n+1} - u_n = \frac{5(n+1) - 1}{2} - \frac{5n - 1}{2} = \frac{5n + 5 - 1 - 5n + 1}{2} =$

$= \frac{5}{2} = r$

(u_n) é uma progressão aritmética.

$u_1 = \frac{5 \times 1 - 1}{2} = 2$; $u_{36} = \frac{5 \times 36 - 1}{2} = \frac{179}{2}$;

$S_{36}=\frac{u_1+u_{36}}{2}\times 36 \Leftrightarrow S_{36}=\frac{2+\frac{179}{2}}{2}\times 36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{36}=\frac{183}{4}\times 36 \Leftrightarrow S_{36}=1647$

$S_{36}=1647$

30.4. $a_1=2-3\times 1=-1$; $a_{40}=2-3\times 40=-118$;

$S_{40}=\frac{a_1+a_{40}}{2}\times 40 \Leftrightarrow S_{40}=\frac{-1-118}{2}\times 40 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{40}=-2380$

$S_{40}=-2380$

30.5. $b_{n+1}-b_n=\frac{n+1-1}{2}-\frac{n-1}{2}=\frac{n-n+1}{2}=\frac{1}{2}$

(b_n) é uma progressão aritmética.

$b_1=\frac{1-1}{2}=0$; $b_9=\frac{9-1}{2}=4$; $S_9=\frac{b_1+b_9}{2}\times 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_9=\frac{0+4}{2}\times 9 \Leftrightarrow S_9=18$; $b_{20}=\frac{20-1}{2}=\frac{19}{2}$;

$S_{20}=\frac{b_1+b_{20}}{2}\times 20 \Leftrightarrow S_{20}=\frac{0+\frac{19}{2}}{2}\times 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{20}=\frac{19}{4}\times 20 \Leftrightarrow S_{20}=95$

$b_{10}+b_{11}+...+b_{20}=S_{20}-S_9=95-18=77$

Outro processo: $b_{10}=\frac{10-1}{2}=\frac{9}{2}$; $b_{20}=\frac{19}{2}$;

$b_{10}+b_{11}+...+b_{20}=\frac{b_{10}+b_{20}}{2}\times 11=\frac{\frac{9}{2}+\frac{19}{2}}{2}\times 11=$

$=\frac{28}{4}\times 11=77$

C.A.: $n=20-10+1=11$; $b_{10}+b_{11}+...+b_{20}=77$

30.6. (u_n) é uma progressão aritmética de razão $r=1$.

$u_1=2$;

$u_{19}=u_1+(19-1)\times 1 \Leftrightarrow u_{19}=2+18 \Leftrightarrow u_{19}=20$;

$S_{19}=\frac{u_1+u_{19}}{2}\times 19 \Leftrightarrow S_{19}=\frac{2+20}{2}\times 19 \Leftrightarrow S_{19}=209$

$u_{100}=u_1+(100-1)\times 1 \Leftrightarrow u_{100}=2+99 \Leftrightarrow u_{100}=101$;

$S_{100}=\frac{u_1+u_{100}}{2}\times 100 \Leftrightarrow S_{100}=\frac{2+101}{2}\times 100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{100}=5150$;

$u_{20}+u_{21}+...+u_{100}=S_{100}-S_{19}=5150-209=4941$

Outro processo: $u_{20}=u_1+(20-1)\times 1=2+19=21$;

$u_{20}+u_{21}+...+u_{100}=\frac{u_{20}+u_{100}}{2}\times 81=\frac{21+101}{2}\times 81=$

$=4941$

C.A.: $n=100-20+1=81$

$u_{20}+u_{21}+...+u_{100}=4941$

31.1. a) $6\times 3=18$

Foram necessários 18 cubos para construir o primeiro degrau.

b) $18+6\times 2=18+12=30$

Foram necessários 30 cubos para construir a escadaria até ao 2.º degrau.

c) $30+6=36$

Foram necessários 36 cubos para construir a escadaria até ao 3.º degrau.

31.2. a) O número de cubos usados em cada degrau é uma progressão aritmética. Considerando o 1.º termo da progressão igual ao número de cubos do primeiro degrau, $u_1=7\times 6=42$; $u_7=6$;

$S_7=\frac{u_1+u_7}{2}\times 7 \Leftrightarrow S_7=\frac{42+6}{2}\times 7 \Leftrightarrow S_7=168$

São necessários 168 cubos para construir a escadaria.

b) O número de cubos gastos nos últimos 3 degraus é igual ao número de cubos gastos numa escadaria com 3 degraus (calculado na alínea 34.1.c)), ou seja, são necessários 36 cubos para construir os 3 últimos degraus.

31.3. Seja k o número de degraus. $u_1=6\times k=6k$;

$u_k=6$; $S_k=330 \Leftrightarrow \frac{u_1+u_k}{2}\times k=330 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{6k+6}{2}=330 \Leftrightarrow (3k+3)\times k=330 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3k^2+3k-330=0 \Leftrightarrow k^2+k-110=0$

C.A.: $k=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times 1\times(-110)}}{2\times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\frac{-1\pm\sqrt{441}}{2} \Leftrightarrow k=\frac{-1+21}{2} \vee k=\frac{-1-21}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=10 \vee k=-11$

Como $k>0$, $k=10$. Com 330 cubos é possível construir 10 degraus.

32. Cada fila, a partir da segunda, tem mais de 2 cadeiras que a fila anterior. A sequência do número de cadeiras em cada fila é uma progressão aritmética (u_n) de razão 2 com $u_1=20$.

$u_n=u_1+(n-1)\times 2 \Leftrightarrow u_n=20+2n-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n=2n+18$

$S_n=510 \Leftrightarrow \frac{u_1+u_n}{2}\times n=510 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{20+2n+18}{2}\times n=510 \Leftrightarrow (n+19)n=510 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2+19n-510=0$

C.A.: $n=\frac{-19\pm\sqrt{361+4\times 510}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=\frac{-19\pm\sqrt{2401}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=\frac{-19-49}{2}\vee n=\frac{-19+49}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=-34\vee n=15$

Como $n>0$, $n=15$. A plateia tem 15 filas.

33. Dado que os degraus têm todos a mesma altura, a sequência das distâncias ao solo em cada degrau é uma progressão aritmética (u_n) de razão r (altura de cada degrau). Seja k a ordem do termo que representa o amigo mais adiantado quando chegou à marca. $u_{20}=4$ m e $u_k=20=5\times 4$ m
Então, $k=20\times 5=100$.
Se o mais adiantado, quando atingiu a marca tinha subido a terça parte dos degraus, então a escadaria tem $100\times 3=300$ degraus.

Pág. 126

34.1. Como a área de cada triângulo é $\frac{1}{4}$ da área do triângulo anterior, conclui-se que a sucessão dos perímetros dos triângulos é uma progressão geométrica (p_n) de razão $\frac{1}{2}$ e $p_1=3$.

$p_n=p_1\times r^{n-1}\Leftrightarrow p_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

34.2. A sucessão das áreas dos triângulos é uma progressão geométrica (a_n) de razão $\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

$a_1=\frac{1\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\Leftrightarrow a_1=\frac{\sqrt{3}}{4}$

C.A.: $1^2=h^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\Leftrightarrow h^2=1-\frac{1}{4}\underset{(h>0)}{\Leftrightarrow} h=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{10}=a_1\times\frac{1-r^{10}}{1-r}\Leftrightarrow S_{10}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}}{1-\frac{1}{4}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{10}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}}{\frac{3}{4}}\Leftrightarrow S_{10}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{10}\approx 0{,}58$ u. a.

34.3. $S_n=a_1\times\frac{1-r^n}{1-r}\Leftrightarrow S_{10}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_n=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}}\Leftrightarrow S_{10}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$

35.1. $u_1=2^{1-1}=2^0=1$; $r=\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{1-(n+1)}}{2^{1-n}}=2^{-n-(1-n)}=$

$=2^{-1}=\frac{1}{2}$; $S_{10}=a_1\times\frac{1-r^{10}}{1-r}\Leftrightarrow S_{10}=1\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{10}=\frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow S_{10}=\frac{1023}{510}$

35.2. $\begin{cases}u_3=208\\u_5=3328\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1\times r^2=208\\u_1\times r^4=3328\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=\frac{208}{r^2}\\\frac{208}{r^2}\times r^4=3328\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{———}\\r^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{———}\\r=\pm 4\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=\frac{208}{16}\\r=4\end{cases}\vee\begin{cases}u_1=\frac{208}{16}\\r=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=13\\r=4\end{cases}\vee\begin{cases}u_1=13\\r=-4\end{cases}$

Se $r=4$: $S_7=u_1\times\frac{1-4^7}{1-4}\Leftrightarrow S_7=13\times\frac{-16\,383}{-3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_7=70\,993$; $S_{12}=u_1\times\frac{1-4^{12}}{1-4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{12}=13\times\frac{-16\,777\,217}{-3}\Leftrightarrow S_{12}=72\,701\,265$;

$S_{12}-S_7=72\,701\,265-70\,993=72\,630\,272$

Se $r=-4$:

$S_7=u_1\times\frac{1-(-4)^7}{1-(-4)}\Leftrightarrow S_7=13\times\frac{16385}{5}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_7=42\,601$; $S_{12}=u_1\times\frac{1-(-4)^{12}}{1-(-4)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{12}=13\times\frac{-16\,777\,217}{5}\Leftrightarrow S_{12}=-43\,620\,759$;

$S_{12}-S_7=-43\,620\,759-42\,601=-43\,663\,360$

Pág. 127

36. Pretende-se determinar a soma dos comprimentos das 30 primeiras semicircunferências. A sequência dos comprimentos das semicircunferências (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{2}$ e

$$u_1 = \frac{1}{2}\times 2\pi\times\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}.\quad S_{30} = u_1\times\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{30}}{1-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_{30} = \frac{\pi}{2}\times\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{30}}{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow S_{30} = -\pi\times\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^{30}\right]$$

$S_{30} \approx 602\,401\,\text{cm} \approx 6{,}02\,\text{km} > 6\,\text{km}$

Pág. 128

37. $S_n = 2186 \Leftrightarrow u_1\times\frac{1-r^n}{1-r} = 2186 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\times\frac{1-3^n}{1-3} = 2186 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\times\frac{1-3^n}{-2} = 2186 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^n - 1 = 2186 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^n - 1 = 2187 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^n = 3^7 \Leftrightarrow n = 7$$

C.A.: $2187 = 3^7$

$$\begin{array}{r|l} 2187 & 3 \\ 729 & 3 \\ 243 & 3 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

38. A sucessão das áreas dos quadrados é uma progressão geométrica (a_n) de razão $\frac{1}{2}$ e

$a_1 = a^2$. $S_{11} = 2047 \Leftrightarrow a_1\times\frac{1-r^{11}}{1-r} = 2047 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a^2\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1}{2}} = 2047 \Leftrightarrow a^2\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{\frac{1}{2}} = 2047 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a^2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right) = 2047 \Leftrightarrow 2a^2\times\frac{2047}{2048} = 2047 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 1024 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{1024} \underset{(a>0)}{\Leftrightarrow} a = 32$$

Pág. 129

39. Seja *r* a razão da progressão geométrica.
Temos:

- a, ar e ar^2 são três termos consecutivos da progressão geométrica.
- $4a$, $5ar$ e $4ar^2$ são três termos consecutivos da progressão arimética.

Então, $5ar - 4a = 4ar^2 - 5ar$.

$$\begin{cases} a + ar + ar^2 = 70 \\ 5ar - 4a = 4ar^2 - 5ar \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ar^2 = 70 - a - ar \\ 4ar^2 - 10ar + 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ar^2 = 70 - a - ar \\ 4(70 - a - ar) - 10ar + 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ar^2 = 70 - a - ar \\ 280 - 4a - 4ar - 10ar + 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ar^2 = 70 - a - ar \\ 14ar = 280 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ar^2 = 70 - a - ar \\ ar = \frac{280}{14} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ar^2 = 70 - a - ar \\ ar = 20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\times\left(\frac{20}{a}\right)^2 = 70 - a - a\times\frac{20}{a} \\ r = \frac{20}{a} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{400}{a} = 50 - a \\ r = \frac{20}{a} \end{cases} \underset{(a\neq 0)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 400 = 50a - a^2 \\ r = \frac{20}{a} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 50a + 400 = 0 \\ r = \frac{20}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ r = \frac{20}{10} \end{cases} \vee \begin{cases} a = 40 \\ r = \frac{20}{40} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ r = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 40 \\ r = \frac{1}{2} \end{cases}$$

C.A.: $a^2 - 50a + 400 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a = \frac{50 \pm\sqrt{(-50)^2 - 4\times 1\times 400}}{2\times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{50\pm\sqrt{900}}{2} \Leftrightarrow a = \frac{50-30}{2} \vee a = \frac{50+30}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 10 \vee a = 40$$

Se $a = 10$ e $r = 2$, os números são 10, $10\times 2 = 20$ e $10\times 2^2 = 40$.

Se $a = 40$ e $r = \frac{1}{2}$, os números são 40,

$40\times\frac{1}{2} = 20$ e $40\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10$.

Logo, os números são 10, 20 e 40.

40. Na linha A, a sequência de segmentos, a partir do segundo, é uma progressão geométrica (a_n) de razão 2 e $a_1 = 1$. O comprimento da linha A é a soma dos comprimentos dos 13 elementos de reta, ou seja, é a soma do comprimento do primeiro segmento com a soma dos 12 termos da progressao (a_n).

$$1 + S_{12} = 1 + 1\times\frac{1-2^{12}}{1-2} = 1 - 1 + 2^{12} = 4096\ \text{cm}$$

Então, a linha tem 4096 cm de comprimento, tal como a linha B. Na linha B, a sequência de segmentos de reta é uma progressão aritmética (b_n) de razão 2 e $b_1 = 1$. Seja *n* o número de segmentos de reta da linha B.

$$b_n = b_1 + (n-1)\times r \Leftrightarrow b_n = 1 + (n-1)\times 2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow b_n = 2n-1$; $S_n = 4096 \Leftrightarrow \frac{b_1+b_n}{2}\times n = 4096 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1+2n-1}{2}\times n = 4096 \Leftrightarrow n^2 = 4096 \Leftrightarrow$

$\underset{(n>0)}{\Leftrightarrow} n = \sqrt{4096} \Leftrightarrow n = 64$

Logo, a linha B tem 64 segmentos de reta.

Pág. 130

Tarefa 3

1. $u_1 = 4$; $r = \frac{3}{4}$

2.

Segmento de reta	Comprimento (u_n)	Soma dos comprimentos (S_n)
1	4	4
2	3	7
3	2,25	9,25
4	1,6875	10,9375
5	1,265625	12,203125
6	0,94921875	13,15234375
7	0,711914063	13,864255781
8	0,533935547	14,39819336
9	0,40045166	14,79864502
10	0,300338745	15,09898376
11	0,225254059	15,32423782
12	0,168940544	15,49317837
13	0,126705408	15,61988378
14	0,095029056	15,71491283
15	0,071271792	1578618462
16	0,053453844	15,83963847
17	0,040090383	15,87972885
18	0,30067787	15,90979664
19	0,02255084	15,93234748
20	0,01691313	15,94926061
21	0,012684848	15,96194546
22	0,009513636	15,97145909
23	0,007135227	15,97859432
24	0,00535142	15,98394574
25	0,004013565	15,9879593
26	0,003010174	15,99096948
27	0,00225763	15,99322711
28	0,001693223	15,99492033
29	0,001269917	15,99619025
30	0,000952438	15,99714269

3. A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica é dada por $S_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$.

O valor em C3 representa a soma dos 2 primeiros termos.

$S_2 = 4\times\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1-\frac{3}{4}}$; $\underset{(1)}{\text{B2}}*\left(1-(3/4)\wedge\underset{(2)}{\text{A3}}\right)/(1-3/4)$

(1) O valor em B2 é o primeiro termo (4).

(2) O valor em A3 é 2 (número de termos da soma).

4.1. Os comprimentos dos segmentos de reta diminuem aproximando-se de zero.

4.2. A soma dos comprimentos dos segmentos de reta aproxima-se de 16.

5. O valor obtido é igual ao valor para o qual tende a “soma” de todos os comprimentos dos segmentos da escada infinita.

Pág. 132

41.1. $u_1 = \frac{1}{9}$; $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$; $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$;

$S = \frac{u_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

41.2. $u_1 = 4$; $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$; $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$;

$S = \frac{u_1}{1-r} = \frac{4}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{1+\frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}$

41.3. $u_1 = 2$; $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{2} = 2$; $|2| > 1$.

Logo, não é possível determinar a “soma” de todos os termos da progressão.

42.1. $0,(45) = 0,454545...$;

$0,(45) = 0,45 + 0,0045 + 0,000045 + ...$

Trata-se da soma de todos os termos de uma progressão geométrica (u_n) de razão $r = 0,01$ e $u_1 = 0,45$. Como $|r| < 1$, tem-se

$0,(45) = S = \frac{0,45}{1-0,01} = \frac{0,45}{0,99} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$

42.2. $0,(451) = 0,451451451...$;

$0,(451) = 0,451 + 0,000451 + 0,000000451 + ...$

Trata-se da soma de todos os termos de uma progressão geométrica (u_n) de razão $r = 0,001$ e $u_1 = 0,451$. Como $|r| < 1$, tem-se

$0,(451) = S = \frac{0,451}{1-0,001} = \frac{0,451}{0,999} = \frac{451}{999}$

42.3. $0,2(12) = 0,2121212...$;

$0,2(12) = 0,21 + 0,0021 + 0,000021 + ...$

Trata-se da soma de todos os termos de uma progressão geométrica (u_n) de razão $r = 0,01$ e $u_1 = 0,21$. Como $|r| < 1$, tem-se:

$0,2(12) = S = \frac{0,21}{1-0,01} = \frac{0,21}{0,99} = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$

Pág. 133

43. $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{4^{3-(n+1)}}{4^{3-n}}=4^{3-n-1-3+n}=4^{-1}=\frac{1}{4}$

(v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$ e

$v_1=4^{3-1}=16$. $r=\frac{1}{4}$ e $\left|\frac{1}{4}\right|<1$;

$S=\frac{v_1}{1-r}=\frac{16}{1-\frac{1}{4}}=\frac{16}{\frac{3}{4}}=\frac{64}{3}$

44. $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{4}$

(u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$ e

$u_1=3$. $r=\frac{1}{4}$ e $\left|\frac{1}{4}\right|<1$; $S=\frac{u_1}{1-r}=\frac{3}{1-\frac{1}{4}}=\frac{3}{\frac{3}{4}}=4$

45. A sucessão de comprimentos das semicircunferências (c_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e $c_1=\frac{1}{2}\times 2\pi\times 1=\pi$.

$r=\frac{1}{2}$ e $\left|\frac{1}{2}\right|<1$; $S=\frac{c_1}{1-r}=\frac{\pi}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$ u. c.

46. Seja *k* a medida dos catetos do triângulo de ordem *m*. Então, a medida dos catetos do triângulo de ordem $n+1$ é $\frac{k}{2}$. Seja (a_n) a sucessão das áreas dos triângulos.

$a_n=\frac{k\times k}{2}=\frac{k^2}{2}$; $a_{n+1}=\frac{\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}}{2}=\frac{k^2}{8}$;

Como $a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n$, para todo $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, (a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$ e

$a_1=\frac{2\times 2}{2}=2$ cm². $S=\frac{a_1}{1-r}=\frac{2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{\frac{3}{2}}=\frac{8}{3}$ cm²

Pág. 134

Tarefas de consolidação 2

1.1. $\begin{cases}a_2=4\\a_6=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1+r=4\\a_1+5r=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=4-r\\4-r+5r=-10\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=4-r\\4r=-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=4-r\\r=-\frac{14}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=4-\left(-\frac{7}{2}\right)\\r=-\frac{7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=\frac{15}{2}\\r=-\frac{7}{2}\end{cases}$

$a_{30}=a_1+(30-1)\times r=\frac{15}{2}+29\times\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{15}{2}-\frac{203}{2}=$

$=-\frac{188}{2}=-94$

1.2. $S_{30}=\frac{a_1+a_{30}}{2}\times 30=\frac{\frac{15}{2}-94}{2}\times 30=\frac{-86,5}{2}\times 30=$

$=-1297,5$

2.1. $b_8=b_1\times r^{8-1}=-2\times 2^7=-256$

2.2. $S_8=b_1\times\frac{1-r^8}{1-r}=-2\times\frac{1-2^8}{1-2}=-2\times 255=-510$

3. $\begin{cases}c_4=11\\c_7=-88\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c_1\times r^3=11\\c_1\times r^6=-88\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c_1=\frac{11}{r^3}\\\frac{11}{r^3}\times r^6=-88\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}c_1=\frac{11}{r^3}\\r^3=-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c_1=\frac{11}{-8}\\r=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c_1=-\frac{11}{8}\\r=-2\end{cases}$

$c_5=c_1\times r^4=-\frac{11}{8}\times(-2)^4=-22$;

$c_6=c_5\times r=-22\times(-2)=44$;

$c_8=c_6\times r^2=44\times(-2)^2=176$

Opção (C)

4. A sucessão do número de segmentos em cada fila (u_n) é uma progressão aritmética de razão 4 e $u_1=7$.

$u_{20}=u_1+(20-1)\times r=7+19\times 4=83$

A afirmação I é falsa.

$u_{27}=u_1+(27-1)\times r=7+26\times 4=111$;

$S_{27}=\frac{u_1+u_{27}}{2}\times 27=\frac{7+111}{2}\times 27=1593>1485$

A afirmação II é falsa.

$u_{30}=u_1+(30-1)\times r=7+29\times 4=123$;

$S_{30}=\frac{u_1+u_{30}}{2}\times 30=\frac{7+123}{2}\times 30=1950$

A afirmação III é verdadeira.

Opção (D)

5. A sucessão de comprimentos dos segmentos de reta (c_n) é uma progressão aritmética de razão 1 e $c_1=1$. Seja *n* o número de segmentos de reta.

$c_n=c_1+(n-1)\times r\Leftrightarrow c_n=1+(n-1)\times 1\Leftrightarrow c_n=n$

30 cm = 300 mm; $S_n=300\Leftrightarrow\frac{c_1+c_n}{2}\times n=300\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1+n}{2}\times n=300\Leftrightarrow(1+n)\times n=600\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2+n-600=0$

C.A.: $n^2+n-600=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4\times1\times(-600)}}{2\times1} \Leftrightarrow n=\dfrac{-1\pm49}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=-25 \vee n=24$. Como $n>0$, $n=24$.

A linha é formada por 24 segmentos de reta.

Pág. 135

6.1. $v_1=\dfrac{1}{2}$; $2v_{n+1}-v_n=0 \Leftrightarrow 2v_{n+1}=v_n \Leftrightarrow v_{n+1}=\dfrac{1}{2}v_n$;

$v_2=v_{1+1}=\dfrac{1}{2}v_1=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$;

$v_3=v_{2+1}=\dfrac{1}{2}v_2=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$

Os 3 primeiros termos são $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}$ e $\dfrac{1}{8}$.

6.2. $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{\frac{1}{2}v_n}{v_n}=\dfrac{1}{2}$

(v_n) é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{2}$.

$v_n=v_1\times r^{n-1}=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

6.3. $\left|\dfrac{1}{2}\right|<1$; $S=\dfrac{v_1}{1-r}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$

7. $l=2x$; $p=2\times x+2\times 2x=6x$; $a=2x\times x=2x^2$

Se l, p e a são termos consecutivos de uma progressão aritmética, então, $a-p=p-l \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-6x=6x-2x \Leftrightarrow 2x^2-10x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x(x-5)=0 \Leftrightarrow 2x=0 \vee x-5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=5$

Como $x>0$, $x=5$ e $2x=2\times5=10$. O retângulo tem dimensões 5 m por 10 m.

8.1. $u_{n+1}-u_n=u_n+b-u_n=b$

(u_n) é uma progressão aritmética de razão b.

8.2. $\begin{cases} u_{10}=4 \\ u_{50}=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+9r=4 \\ u_1+49r=24 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1=4-9r \\ 4-9r+49r=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=4-9r \\ 40r=20 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1=4-9\times\dfrac{1}{2} \\ r=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=-\dfrac{1}{2} \\ r=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$u_n=u_1+(n-1)\times r \Leftrightarrow u_n=-\dfrac{1}{2}+(n-1)\times\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}n-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow u_n=\dfrac{1}{2}n-1$

8.3. $S_n=280 \Leftrightarrow \dfrac{u_1+u_n}{2}\times n=280 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n-1}{2}\times n=280 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}n-\dfrac{3}{2}\right)n=560 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2-3n-1120=0$

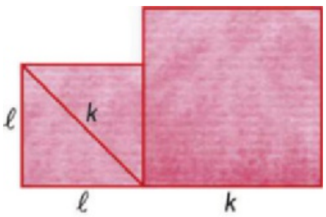
C.A.: $n^2-3n-1120=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4\times1\times(-1120)}}{2\times1} \Leftrightarrow n=\dfrac{3\pm67}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=-32 \vee n=35$

Como $n>0$, $n=35$.

9. Seja k a medida do lado quadrado de ordem n e seja l a medida do lado do quadrado de ordem $n+1$.



$k^2=l^2+l^2 \Leftrightarrow 2l^2=k^2 \Leftrightarrow l^2=\dfrac{k^2}{2} \Leftrightarrow$

$\underset{(l>0)}{\Leftrightarrow} l=\dfrac{k}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow l=\dfrac{\sqrt{2}k}{2}$

Então, o comprimento do quarto de circunferência de ordem n é $\dfrac{1}{4}\times2\pi\times k=\dfrac{\pi k}{2}$ e o de ordem $n+1$ é $\dfrac{1}{4}\times2\pi\times\dfrac{\sqrt{2}k}{2}=\dfrac{\sqrt{2}\pi k}{4}$.

Seja (p_n) a sucessão dos comprimentos dos quartos de circunferência

$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}\pi k}{4}}{\frac{\pi k}{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}\pi k}{4\pi k}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Como $p_{n+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}p_n$, para todo $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, (p_n) é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e

$p_1=\dfrac{1}{4}\times2\pi\times2=\pi$. O comprimento da espiral será dado pela "soma" de todos os termos desta progressão.

$r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $\left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right|<1$; $S=\dfrac{p_1}{1-r}=$

$=\dfrac{\pi}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\pi}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{2\pi}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{2\pi(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=$

$=\dfrac{2\pi(2+\sqrt{2})}{2^2-\sqrt{2}^2}=\dfrac{2(2+\sqrt{2})\pi}{2}=(2+\sqrt{2})\pi$ u. c.

Pág. 137

Avaliação formativa 2

1. A sucessão de comprimentos de segmentos de reta (c_n) é uma progressão aritmética de razão 1 e $c_1 = 2$.

$c_n = c_1 + (n-1)\times 1 \Leftrightarrow c_n = 2+(n-1)\times 1 \Leftrightarrow c_n = n+1$

O comprimento da linha será dado pela soma dos 20 primeiros termos desta progressão.

$c_n = 20+1 = 21$; $S_{20} = \dfrac{c_1 + c_{20}}{2}\times 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{20} = \dfrac{2+21}{2}\times 20 \Leftrightarrow S_{20} = 230$

A linha tem 230 cm de comprimento.

2.1. $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{-\dfrac{3}{2^{n+1}}}{-\dfrac{3}{2^n}} = \dfrac{3\times 2^n}{3\times 2^n \times 2} = \dfrac{1}{2}$

(v_n) é uma progressão aritmética de razão $\dfrac{1}{2}$.

$$\begin{cases} v_1 = -\dfrac{3}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n,\ n\geq 1 \end{cases}$$

2.2. **a)** $S_{10} = v_1 \times \dfrac{1-r^{10}}{1-r} \Leftrightarrow S_{10} = -\dfrac{3}{2}\times \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}}{1-\dfrac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{10} = -\dfrac{3}{2}\times \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}}{\dfrac{1}{2}} \Leftrightarrow S_{10} = -3\times \dfrac{1023}{1024} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{10} = -\dfrac{3069}{1024}$

b) $r = \dfrac{1}{2}$ e $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$; $S = \dfrac{v_1}{1-r} \Leftrightarrow S = \dfrac{-\dfrac{3}{2}}{1-\dfrac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S = \dfrac{-\dfrac{3}{2}}{\dfrac{1}{2}} \Leftrightarrow S = -3$

3. $(a_{k+1})^2 = \left(\dfrac{1}{4}a_k\right)^2 + \left(\dfrac{3}{4}a_k\right)^2 \Leftrightarrow (a_{k+1})^2 = \dfrac{a_k^2}{16} + \dfrac{9a_k^2}{16} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a_{k+1})^2 = \dfrac{10a_k^2}{16} \underset{(a_{k+1}>0)}{\Leftrightarrow} a_{k+1} = \dfrac{\sqrt{10}a_k}{4}$

$\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{10}a_k}{4}}{a_k} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$ $\quad$ I $\rightarrow$ b)

(a_n) é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

$a_5 = a_1 \times r^4 = 2\times\left(\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right)^4 = 2\times \dfrac{100}{256} = \dfrac{25}{32}$

$P_5 = 4a_5 = 4\times\dfrac{25}{32} = \dfrac{25}{8}$ cm $\quad$ II $\rightarrow$ c)

$A_n = (a_n)^2 = \left(a_1 \times \left(\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right)^{n-1}\right)^2 = a_1^2 \times \left[\left(\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right)^2\right]^{n-1} =$

$= 2^2 \times \left(\dfrac{5}{8}\right)^{n-1} = 4\times\left(\dfrac{5}{8}\right)^{n-1}$

(A_n) é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{5}{8}$ e

$A_1 = 4$. $S = \dfrac{A_1}{1-r} = \dfrac{4}{1-\dfrac{5}{8}} = \dfrac{4}{\dfrac{3}{8}} = \dfrac{32}{3}$ $\quad$ III $\rightarrow$ a)

I $\rightarrow$ b) ; II $\rightarrow$ c) e III $\rightarrow$ a)

Tarefas complementares

Pág. 138

1.1. $a_1 = \dfrac{2+1}{1} = 3$; $\quad a_2 = \dfrac{2+2}{2} = 2$

$a_3 = \dfrac{2+3}{3} = \dfrac{5}{3}$; $\quad a_4 = \dfrac{2+4}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

1.2. $a_n = 1{,}1 \Leftrightarrow \dfrac{2+n}{n} = 1{,}1 \underset{(n\neq 0)}{\Leftrightarrow} 2+n = 1{,}1n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n - 1{,}1n = -2 \Leftrightarrow -0{,}1n = -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{-2}{-0{,}1} \Leftrightarrow n = 20$

Como 20 é um número natural diferente de zero, 1,1 é termo de (a_n) (é o termo de ordem 20, $a_{20} = 1{,}1$).

2.1. $b_n = -182 \Leftrightarrow -3n^2 - 5n = -182 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3n^2 - 5n + 182 = 0 \Leftrightarrow -3n^2 - 5n + 182 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3n^2 + 5n - 182 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{-5\pm\sqrt{5^2 - 4\times 3\times(-182)}}{2\times 3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{-5\pm\sqrt{25+2184}}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{-5\pm\sqrt{2209}}{6} \Leftrightarrow n = \dfrac{-5\pm 47}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{-5-47}{6} \Leftrightarrow n = \dfrac{-5+47}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \underbrace{-\dfrac{26}{3}}_{\notin \mathbb{N}\setminus\{0\}} \Leftrightarrow n = \underbrace{7}_{\in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \Leftrightarrow$

-182 é o termo de ordem 7 de (b_n). $b_7 = -182$

2.2. Não, porque os termos de (b_n) são números inteiros negativos.

3.1. $\begin{cases} u_1 = 120 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{20} \times u_n + 20, \, n \geq 1 \end{cases}$

$u_1 = 120 \, ; \quad u_2 = \dfrac{1}{20} \times 120 + 20 = 26$

$u_3 = \dfrac{1}{20} \times u_2 + 20 = \dfrac{1}{20} \times 26 + 20 = \dfrac{213}{10} = 21{,}3$

120 ; 26 ; 21,3

3.2. $\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_{n+1} = \sqrt{2 \times b_n^2 + 2}, \, n \geq 1 \end{cases}$

$b_1 = 2$

$b_2 = \sqrt{2 \times b_1^2 + 2} = \sqrt{2 \times 2^2 + 2} = \sqrt{10}$

$b_3 = \sqrt{2 \times b_2^2 + 2} = \sqrt{2 \times \sqrt{10}^2 + 2} = \sqrt{2 \times 10 + 2} = \sqrt{22}$

$2 \, ; \, \sqrt{10} \, ; \, \sqrt{22}$

4.1. $a_n : 3, 5, 7, ..., 2n+1$

$3 \xrightarrow{+2} 5 \xrightarrow{+2} 7$

$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 2, \;\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$

4.2. $b_n : -5, 10, -20, 40, ..., -5 \times (-2)^{n-1}$

$-5 \xrightarrow{\times(-2)} 10 \xrightarrow{\times(-2)} -20 \xrightarrow{\times(-2)} 40$

$\begin{cases} b_1 = -5 \\ b_{n+1} = -2b_n, \;\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$

5.1. $h(n) = 2n^2 - n$

$h_1 = 2 \times 1^2 - 1 = 1 \, ; \qquad h_2 = 2 \times 2^2 - 2 = 6$

$h_3 = 2 \times 3^2 - 3 = 15 \, ; \qquad h_4 = 2 \times 4^2 - 4 = 28$

5.2. $1 \xrightarrow{+5} 6 \xrightarrow{+9} 15 \xrightarrow{+13} 28$

$5 = 4 \times 1 + 1$

$9 = 4 \times 2 + 1$

$13 = 4 \times 3 + 1$

…

$4n + 1$

$\begin{cases} h_1 = 1 \\ h_{n+1} = h_n + 4n + 1, \;\; n \geq 1 \end{cases}$

Pág. 139

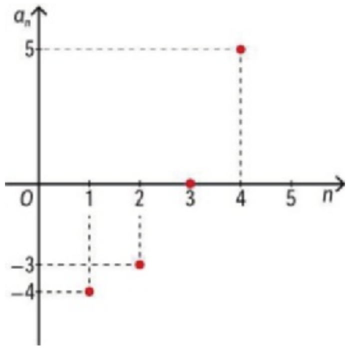
6. $a_n = n^2 - 2n - 3$

6.1. $a_1 = 1^2 - 2 \times 1 - 3 = -4 \;\; (1, -4)$

$a_2 = 2^2 - 2 \times 2 - 3 = -3 \;\; (2, -3)$

$a_3 = 3^2 - 2 \times 3 - 3 = 0 \;\; (3, 0)$

$a_4 = 4^2 - 2 \times 4 - 3 = 5 \;\; (4, 5)$



6.2. $a_{n+1} = (n+1)^2 - 2(n+1) - 3 =$

$= n^2 \cancel{+2n} + 1 \cancel{-2n} - 2 - 3 = n^2 - 4$

$a_{n+1} + 2n - 1 = n^2 \cancel{-2n} - 3 \cancel{+2n} = n^2 - 4$

Logo, $a_{n+1} = a_n + 2n - 1, \, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

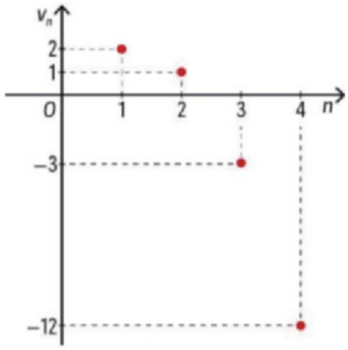
Opção (A)

7.1. $v_1 = 2 \quad (1, 2)$

$v_2 = v_1 - 1^2 = 2 - 1 = 1 \quad (2, 1)$

$v_3 = v_2 - 2^2 = 1 - 4 = -3 \quad (3, -3)$

$v_4 = v_3 - 3^2 = -3 - 9 = -12 \quad (4, -12)$



7.2. $v_{n+1} = v_n - n^2 \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = -n^2 < 0, \, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Logo, (v_n) é decrescente.

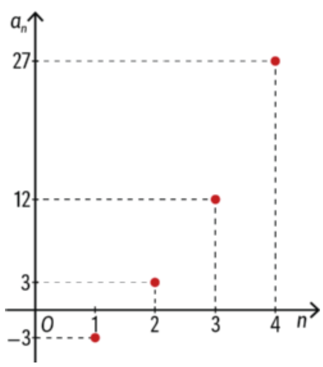
8. $a_n = 2n^2 - 5$

$a_1 = 2 \times 1^2 - 5 = -3 \;\; (1, -3)$

$a_2 = 2 \times 2^2 - 5 = 3 \;\; (2, 3)$

$a_3 = 2 \times 3^2 - 5 = 13 \;\; (3, 13)$

$a_4 = 2 \times 4^2 - 5 = 27$



A sucessão (a_n) é crescente.

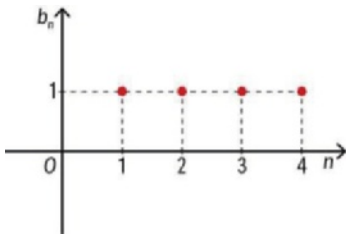
$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = 3b_n - 2 \end{cases}$

$b_1 = 1 \quad (1, 1)$

$b_2 = 3b_1 - 2 = 3 \times 1 - 2 = 1 \quad (2, 1)$

$b_3 = 3b_2 - 2 = 3 \times 1 - 2 = 1 \quad (2, 1)$

$b_4 = 3b_3 - 2 = 3 \times 1 - 2 = 1 \quad (4, 1)$



A sucessão (b_n) é constante.

9.1. $r = 2$

$u_1 = -2$

$u_2 = -2 + 2 = 0$

$u_3 = u_2 + 2 = 0 + 2 = 2$

$u_4 = u_3 + 2 = 2 + 2 = 4$

$u_5 = u_4 + 2 = 4 + 2 = 6$

-2 , 0 , 2 , 4 , 6.

9.2. $r = 3$

$u_1 = -2$

$u_2 = u_1 + 3 = -2 + 3 = 1$

$u_3 = u_2 + 3 = 1 + 3 = 4$

$u_4 = u_3 + 3 = 4 + 3 = 7$

$u_5 = u_4 + 3 = 7 + 3 = 10$

-2 , 1 , 4 , 7 , 10.

9.3. $r = \frac{1}{2}$

$u_1 = -2$

$u_2 = u_1 + \frac{1}{2} = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

$u_3 = u_2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1$

$u_4 = u_3 + \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$u_5 = u_4 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

-2 , $-\frac{3}{2}$, -1 , $-\frac{1}{2}$, 0.

9.4. $r = 0$

$u_1 = -2$

$u_2 = u_1 + 0 = -2 + 0 = -2$

$u_3 = u_2 + 0 = -2 + 0 = -2$

$u_4 = u_3 + 0 = -2 + 0 = -2$

$u_5 = u_4 + 0 = -2 + 0 = -2$

-2 , -2 , -2 , -2 , -2

10. $a_n = \frac{1}{2} - 3n$

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} - 3(n+1) - \left(\frac{1}{2} - 3n\right) =$

$= \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{-3n} - 3 \cancel{-\frac{1}{2}} \cancel{+3n} = -3$

(a_n) é uma progressão aritmética de razão -3 .

$b_n = n^2 - 1$

$b_{n+1} - b_n = (n+1)^2 - 1 - (n^2 - 1) =$

$= \cancel{n^2} + 2n + 1 \cancel{-1} \cancel{-n^2} \cancel{+1} = 2n + 1$

Como $b_{n+1} - b_n$ não é uma progressão aritmética.

Pág. 140

11. $u_5 = 14$; $u_8 = 23$

$\begin{cases} u_5 = 14 \\ u_8 = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4r = 14 \\ u_1 + 7r = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 14 - 4r \\ 14 - 4r + 7r = 23 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} — \\ 3r = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 14 - 4 \times 3 \\ r = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ r = 3 \end{cases}$

$r = 3$

12. $u_1 = -\frac{1}{2}$; $r = \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} \xrightarrow{+\frac{1}{2}} 0 \xrightarrow{+\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \xrightarrow{+\frac{1}{2}} 1 \xrightarrow{+\frac{1}{2}} \frac{3}{2}$

$u_n = u_1 + (n-1) \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2}n - 1$

$u_{500} = \frac{1}{2} \times 500 - 1 = 249$

13.1. $u_1 = 3$; $r = 10$

$u_n = 3 + (n-1) \times 10 \Leftrightarrow u_n = 3 + 10n - 10 \Leftrightarrow u_n = 10n - 7$

$u_n = 10n - 7$

13.2. $u_3 = 10$; $u_4 = 20$

$r = u_4 - u_3 = 10$

$u_3 = u_1 + 2r$

$10 = u_1 + 2 \times 10 \Leftrightarrow u_1 = 10 - 20 \Leftrightarrow u_1 = -10$

$u_n = -10 + (n-1) \times 10 \Leftrightarrow u_n = -10 + 10n - 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n = 10n - 20$

$u_n = -10 + (n-1) \times 10 \Leftrightarrow u_n = -10 + 10n - 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n = 10n - 20$

$u_n = 10n - 20$

13.3. $u_3 = -10$; $r = 5$

$u_3 = u_1 + 2r \Leftrightarrow -10 = u_1 + 2 \times 5 \Leftrightarrow u_1 = -20$

$u_n = -20 + (n-1) \times 5 \Leftrightarrow u_n = -20 + 5n - 5 \Leftrightarrow u_n = 5n - 25$

$u_n = 5n - 25$

13.4. $u_6 + u_8 = 28$; $r = 3$

$u_6 + u_8 = 28 \Leftrightarrow u_1 + 5r + u_1 + 7r = 28 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2u_1 + 12r = 28 \Leftrightarrow 2u_1 + 12\times 3 = 28 \Leftrightarrow 2u_1 = -8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_1 = -4$

$u_n = -4 + (n-1)\times 3 \Leftrightarrow u_n = -4 + 3n - 3 \Leftrightarrow u_n = 3n - 7$

$u_n = 3n - 7$

13.5. $u_{10} = 5$; $u_{30} = -5$

$$\begin{cases} u_{10} = 5 \\ u_{30} = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 9r = 5 \\ u_1 + 29r = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 - 9r \\ 5 - 9r + 29r = -5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ 20r = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 9r = 5 \\ u_1 + 29r = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 - 9\times\left(-\frac{1}{2}\right) \\ r = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 - \frac{9}{2} = \frac{19}{2} \\ r = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$u_n = \frac{19}{2} + (n-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow u_n = \frac{19}{2} - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n = -\frac{1}{2}n + 10$

$u_n = -\frac{1}{2}n + 10$

14. $v_5 = \frac{11}{4}$; $v_8 = \frac{17}{4}$

$$\begin{cases} v_5 = \frac{11}{4} \\ u_{30} = \frac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 + 4r = \frac{11}{4} \\ v_1 + 7r = \frac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{11}{4} - 4r \\ \frac{11}{4} - 4r + 7r = \frac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ \frac{11}{4} + 3r = \frac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ 3r = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{11}{4} - 4\times\frac{1}{2} \\ r = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{3}{4} \\ r = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$v_2 = v_1 + r = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

$v_n = \frac{3}{4} + (n-1)\times\frac{1}{2} \Leftrightarrow v_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}n - \underset{\times 2}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v_n = \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$

$v_{10} = \frac{1}{2}\times 10 - \frac{1}{4} = \frac{21}{4}$

Opção (D)

15. $u_1 = 5$; $r = \frac{1}{2}$

$u_n = u_1 + (n-1)r$

$u_n = 5 + (n-1)\times\frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n = 5 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2}n + \frac{9}{2}$

15.1. $u_n < 20 \Leftrightarrow \frac{1}{2}n + \frac{9}{2} < 20 \Leftrightarrow n + 9 < 40 \Leftrightarrow n < 31$

$n \le 30$

15.2. $u_n > 50 \Leftrightarrow \frac{1}{2}n + \frac{9}{2} > 50 \Leftrightarrow n + 9 > 100 \Leftrightarrow n > 91$

$n \ge 92$

16.1. $u_{n+1} = u_n + \frac{5}{2} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{5}{2}$

(u_n) é uma progressão aritmética de razão $r = \frac{5}{2}$.

16.2. $u_n = 4 + (n+1)\times\frac{5}{2} \Leftrightarrow u_n = 4 + \frac{5}{2}n - \frac{5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n = \frac{5}{2}n + \frac{3}{2}$

$u_n > 20 \Leftrightarrow \frac{5}{2}n + \frac{3}{2} > 20 \Leftrightarrow 5n + 3 > 40 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5n + 3 > 40 \Leftrightarrow n > \frac{37}{5} \Leftrightarrow n > 7{,}4$

$n \ge 8$

16.3. $u_n < 100 \Leftrightarrow \frac{5}{2}n + \frac{3}{2} < 100 \Leftrightarrow 5n + 3 < 200 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5n < 197 \Leftrightarrow n < \frac{197}{5} \Leftrightarrow n < 39{,}4$

$n \le 39$, 39 termos.

Pág. 141

17.1. $a_{n+1} = -3 + a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = -3$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

(a_n) é uma progressão aritmética de razão $r = -3$.

17.2. $a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_{n+1} = -3 + a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = -3$

Os pontos do gráfico de uma progressão aritmética (a_n) pertencem à reta de equação $y = rx + (a_1 - r)$.

Neste caso, os pontos do gráfico da progressão aritmética (a_n) pertencem à reta de equação $y = -3x + [-1 - (-3)]$, isto é $y = -3x + 2$.

17.3. Como $r = -3 < 0$, a progressão aritmética é decrescente.

18.1. $b_{n+1}=\frac{b_n}{4}\Leftrightarrow 4b_{n+1}=b_n\Leftrightarrow 4\frac{b_{n+1}}{b_n}=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{4}$

(b_n) é uma progressão geométrica de razão

$r=\frac{1}{4}$.

18.2. $b_n=b_1\times r^{n-1}$

$b_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\Leftrightarrow b_n=2^{-1}\times\left(\frac{1}{2^2}\right)^{n-1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b_n=2^{-1}\times\left(2^{-2}\right)^{n-1}\Leftrightarrow b_n=2^{-1}\times 2^{-2n+2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b_n=2^{-1-2n+2}\Leftrightarrow b_n=2^{-2n+1}$

a) $b_5=2^{-2\times5+1}=2^{-9}=\frac{1}{2^9}=\frac{1}{512}$

$b_6=2^{-2\times6+1}=2^{-11}=\frac{1}{2^{11}}=\frac{1}{2048}$

$b_5+b_6=\underset{(\times4)}{\frac{1}{512}}+\frac{1}{2048}=\frac{5}{2048}$

b) $b_4=2^{-2\times4+1}=2^{-7}=\frac{1}{2^7}=\frac{1}{128}$

$b_4-16b_6=\frac{1}{128}-16\times\frac{1}{2048}=\frac{1}{128}-\frac{1}{128}=0$

19. $a_n=\frac{2-n}{3}$

$a_{n+1}-a_n=\frac{2-(n+1)}{3}-\frac{2-n}{3}=\frac{\cancel{2}-\cancel{n}-1-\cancel{2}+\cancel{n}}{3}=-\frac{1}{3}$

(a_n) é uma progressão aritmética de razão

$r=-\frac{1}{3}$.

$b_n=3^{n-5}$

$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{3^{n+1-5}}{3^{n-5}}=\frac{3^{n-4}}{3^{n-5}}=3^{n-4-(n-5)}=3^{\cancel{n}-4-\cancel{n}+5}=3$

(b_n) é uma progressão geométrica de razão $r=3$

$c_n=2^n+n$

$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{2^{n+1}n+1}{2^n+n}$

(c_n) não é uma progressão geométrica.

$c_{n+1}-c_n=2^{n+1}+n+1-\left(2^n+n\right)=$

$=2^{n+1}+\cancel{n}+1-2^n-\cancel{n}=2^n\times2-2^n+1=2^n+1$

(c_n) não é uma progressão aritmética.

$\begin{cases}d_1=1\\d_{n+1}=d_n-7,\ n\geq1\end{cases}$

$d_{n+1}=d_n-7\Leftrightarrow d_{n+1}-d_n=-7$

(d_n) é uma progressão aritmética de razão $r=-7$

$\begin{cases}e_1=1\\e_{n+1}=3e_n-5,\ n\geq1\end{cases}$

$e_2=3e_1-5\Leftrightarrow e_2=3\times1-5=-2$

$e_3=3e_2-5\Leftrightarrow e_3=3\times(-2)-5=-11$

$e_2-e_1=-2-1=-3$

$e_3-e_2=-11-(-2)=-11+2=-9$

(e_n) é uma progressão aritmética.

$\frac{e_2}{e_1}=\frac{-2}{1}=-2\ \frac{e_3}{e_2}=\frac{-11}{-2}=\frac{11}{2}$

$\frac{e_3}{e_2}=\frac{-11}{-2}=\frac{11}{2}$

(e_n) não é uma progressão geométrica.

$\begin{cases}f_1=1\\f_{n+1}=\sqrt{2}f_n\end{cases}$

$f_{n+1}=\sqrt{2}f_n\Leftrightarrow\frac{f_{n+1}}{f_n}=\sqrt{2}$

(f_n) é uma progressão geométrica de razão

$r=\sqrt{2}$.

20.1. $\begin{cases}b_1=1\\b_{n+1}=-2b_n\ ,\ n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\end{cases}$

20.2. $b_2=-2b_1=-2\times2=-4$

$b_3=-2b_2=-2\times(-4)=8$; $\quad b_3=8$

Pág. 142

21.1. $\begin{cases}a_1=-3\\a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n,\ n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\end{cases}$

21.2. $a_2=\frac{1}{2}\times a_1=\frac{1}{2}\times(-3)=-\frac{3}{2}$

$a_3=\frac{1}{2}\times a_2=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4}$; $\ a_3=-\frac{3}{4}$

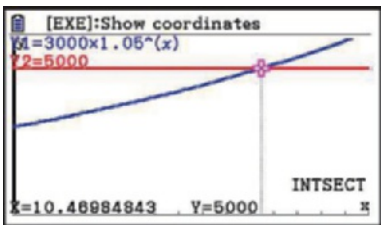
22.1. $c_1=2{,}5$; $r=\frac{1}{2}$; $c_n=2{,}5\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

22.2. $c_5=2{,}5\times\left(\frac{1}{2}\right)^{5-1}=2{,}5\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{2}\times\frac{1}{16}=\frac{5}{32}$

23.1. $c(3)=3000\times1{,}05^3\approx3472{,}88$

O capital acumulado pela Laura ao fim de 3 anos é $3472{,}88$ €.

23.2. $c(n)=5000\Leftrightarrow 3000\times1{,}05^n=5000$



São necessários 11 anos.

24.1. Sabemos que o antibiótico provoca o desaparecimento de 20% das bactérias em cada dia. Isso significa que a cada dia restam 80% das bactérias do dia anterior. Assim, $u_{n+1} = 0,8u_n$

(u_n) é uma progressão geométrica de razão 0,8.

$u_n = u_1 \times r^{n-1}$

C.A.:

$u_1 = 0,8 \times 100\,000 = 80\,000$

$u_n = 80\,000 \times 0,8^{n-1}$

$u_n = 80\,000 \times 0,8^{-1} \times 0,8^n$

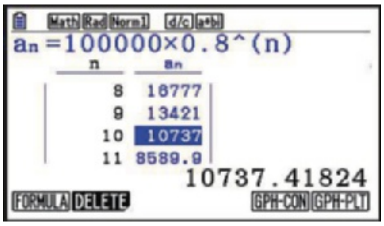
$u_n = \dfrac{80\,000}{0,8} \times 0,8^n$

24.2. $u_n = 100\,000 \times 0,8^n$

$u_{10} = 100\,000 \times 0,8^{10} \approx 10\,737$

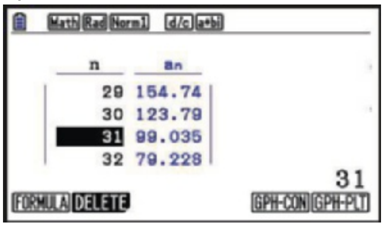
O número de bactérias ao fim de 10 dias é aproximadamente 10 737.

24.2. a)



$u_{10} \approx 10\,737$. Ao fim de 10 dias, o número de bactérias existentes era de aproximadamente 10 737. $c(n) = 5000 \Leftrightarrow 3000 \times 1,05^n = 5000$

b)



Ao fim de 31 dias, o número de bactérias já é aproximadamente 99,8 , ou seja, inferior a 100.

25.1. Sabemos que a floresta perde 5% das árvores a cada ano. Isso significa que a cada ano, resta 95% das árvores do ano anterior. Assim,

$a_{n+1} = 0,95\,a_n \, , n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Estamos perante uma progressão geométrica de razão 0,95.

25.2. $a_n = a_1 \times r^{n-1}$

C.A.:

$a_1 = 0,95 \times 20\,000 = 19\,000$

$a_n = 19\,000 \times 0,95^{n-1}$

$a_n = 19\,000 \times 0,95^{-1} \times 0,95^n$

$a_n = \dfrac{19\,000}{0,95} \times 0,95^n$

$a_n = 20\,000 \times 0,95^n$

$a_{10} = 20\,000 \times 0,95^{10} \approx 11\,975$

Em 2034 estima-se existir $11\,975$ árvores.

Pág. 143

26.

2025	2026	2027	...
100 €	105,2 €	110,6704 €	

$\times 1,052$ $\quad \times 1,052$

C.A.:

$100 + 100 \times 5,2\% = 105,2$ €

$105,2 + 105,2 \times 5,2\% = 110,6704$ €

$\dfrac{110,6704}{105,2} = \dfrac{105,2}{100} = 1,052$

$u_n = 100 \times 1,052^{n-1}$

$u_6 = 100 \times 1,052^{6-1} \approx 128,85$

O custo do produto será aproximadamente $128,85$ € .

27.1. $a_2 = \left(3 + \dfrac{3}{1}\right) \times a_1 = 6 \times \dfrac{1}{3} = 2$

$a_3 = \left(3 + \dfrac{3}{2}\right) \times a_2 = \dfrac{9}{2} \times 2 = 9$; $a_2 = 2$ e $a_3 = 9$

27.2. $v_n = \dfrac{a_n}{n}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{a_{n+1}}{n+1}}{\frac{a_n}{n}} = \frac{\frac{\left(3+\frac{3}{n}\right)a_n}{n+1}}{\frac{a_n}{n}} =$$

$$= \frac{\left(3+\frac{3}{n}\right)\cancel{a_n} \times n}{(n+1) \times \cancel{a_n}} = \frac{\left(3+\frac{3}{n}\right) \times n}{n+1} = \frac{3n+3}{n+1} = \frac{3\cancel{(n+1)}}{\cancel{n+1}} = 3$$

(v_n) é uma progressão geométrica de razão $r = 3$

27.3. $v_1 = \dfrac{a_n}{1} = \dfrac{\frac{1}{3}}{1} = \dfrac{1}{3}$; $v_n = \dfrac{1}{3} \times 3^{n-1} = 3^{-1} \times 3^{n-1} = 3^{n-2}$

$v_n = 3^{n-2}$

27.4. Como $r = 3 > 1$ e $v_1 = \dfrac{1}{3} > 0$, (v_n) é crescente.

28. $s_1 = 120$

$s_{n+1} = s_n - \dfrac{1}{20} s_n + 20 = \left(1 - \dfrac{1}{20}\right) s_n + 20 =$

$= \dfrac{19}{20} s_n + 20 = 0,95 s_n + 20$

$$\begin{cases} s_1 = 120 \\ s_{n+1} = 0,95 s_n + 20, \, n \geq 1 \end{cases}$$

29.1. $u_2 = \dfrac{u_1}{1 + u_1} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

$$u_3 = \frac{u_2}{1+u_2} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$u_4 = \frac{u_3}{1+u_3} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{2}} = \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

29.2. $u_n = \frac{1}{n}$

Pág. 144

30. $\begin{cases} v_1 = 4 \\ v_{n+1} = v_n + 3n^2 + 3n \end{cases}$

$v_{n+1} = v_n + 3n^2 + 3n \Leftrightarrow v_{n+1} = n^3 - n + 4 + 3n^2 + 3n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v_{n+1} = n^3 + 3n^2 + 2n + 4 \qquad (1)$

$v_n = n^3 - n + 4$

$v_{n+1} = (n+1)^3 - (n+1) + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v_{n+1} = (n+1)^2(n+1) - n - 1 + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v_{n+1} = (n^2 + 2n + 1)(n+1) - n + 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v_{n+1} = n^3 + n^2 + 2n + \cancel{n} + 1 - \cancel{n} + 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v_{n+1} = n^3 + 3n^2 + 2n + 4 \qquad (2)$

Como as expressões (1) e (2) são iguais, fica provado que $v_n = n^3 - n + 4$.

31.1. $u_1 = 0$; $(1, 0)$

$u_2 = 2 \times u_1 + 1 = 2 \times 0 + 1 = 1 \quad (2, 1)$

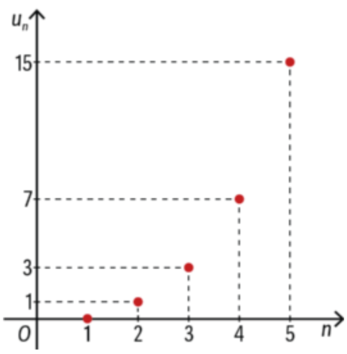
$u_3 = 2 \times u_2 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3 \quad (3, 3)$

$u_4 = 2 \times u_3 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7 \quad (4, 7)$

$u_5 = 2 \times u_4 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15 \quad (5, 15)$

1 , 3 , 7 , 15.

31.2.



31.3. Podemos conjeturar que a sucessão (u_n) é crescente.

32.1. $2a_{n+1} + 4 = 2a_n \underset{(:2)}{\Leftrightarrow} a_{n+1} + 2 = a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = -2$

(a_n) é uma progressão aritmética de razão $r = -2$.

32.2. $a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_n = 1 + (n-1) \times (-2) \Leftrightarrow a_n = 1 - 2n + 2 \Leftrightarrow a_n = -2n + 3$

a) $a_{10} = -2 \times 10 + 3 = -17$

$a_{20} = -2 \times 20 + 3 = -37$

$a_{10} + 2a_{20} = -17 + 2 \times (-37) = -91$

b) $a_5 = -2 \times 5 + 3 = -7$

$a_4 = -2 \times 4 + 3 = -5$

$(a_5)^2 - (a_4)^2 = (-7)^2 - (-5)^2 = 49 - 25 = 24$

33.1. a) $\begin{cases} b_3 = 3 \\ b_5 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + 2r = 3 \\ b_1 + 4r = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 3 - 2r \\ 3 - 2r + 4r = 7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ 2r = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 3 - 2 \times 2 \\ r = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = -1 \\ r = 2 \end{cases}$

$r = 2$

b) $b_n = b_1 + (n-1) \times r$

$b_n = -1 + (n-1) \times 2 \Leftrightarrow b_n = -1 + 2n - 2 \Leftrightarrow b_n = 2n - 3$

$b_n = 2n - 3$

33.2. $b_n > 500 \Leftrightarrow 2n - 3 > 500 \Leftrightarrow n > 251{,}5$

$n \geq 252$

33.3. $100 \leq b_n \leq 500 \Leftrightarrow b_n \geq 100 \wedge b_n \leq 500 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2n - 3 \geq 100 \wedge 2n - 3 \leq 500 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2n \geq 103 \wedge 2n \leq 503 \Leftrightarrow n \geq 51{,}5 \wedge n \leq 251{,}5$

$n \in [52, 251]$;

$52 \leq n \leq 251$

Pág. 145

34.1. Depósito: 2500 €

Juros simples: 2%

$2500 \times 2\% = 2500 \times 0{,}02 = 50$ €

O rendimento da Leonor é 50 €.

34.2. $R_n = 50n$

$50n = 250 \Leftrightarrow n = 5$

São necessários 5 anos.

35.1. $\begin{cases} b_3 = \frac{1}{3} \\ b_9 = -\frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + 2r = \frac{1}{3} \\ b_1 + 8r = -\frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{1}{3} - 2r \\ \frac{1}{3} - 2r + 8r = -\frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ 6r = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ 6r = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{1}{3} - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ r = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{1}{3} + 1 \\ r = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{4}{3} \\ r = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad r = -\frac{1}{2}$

35.2. $y = rx + (b_1 - r)$

$y = -\frac{1}{2}x + \left[\frac{4}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \left(\underset{(\times 2)}{\frac{4}{3}} + \underset{(\times 2)}{\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{6}$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{6}$

35.3. Como $r = -\frac{1}{2} < 0$, (b_n) é decrescente, logo as afirmações (A) e (B) são falsas.

$b_n = -\frac{1}{2}n + \frac{11}{6}$

$b_n = -\frac{29}{3} \Leftrightarrow -\underset{(\times 3)}{\frac{1}{2}}n + \frac{11}{6} = -\underset{(\times 2)}{\frac{29}{3}} \Leftrightarrow -3n + 11 = -58 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3n = -69 \Leftrightarrow n = 23$

$b_{23} = -\frac{29}{3}$

Opção (C)

36. $\begin{cases} u_1 = 600 \\ u_{n+1} = u_n + u_n \times 0{,}025 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 600 \\ u_{n+1} = (1 + 0{,}025)u_n \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 600 \\ u_{n+1} = 1{,}025u_n \end{cases}$

(u_n) é uma progressão geométrica.

$u_n = 600 \times 1{,}025^{n-1}$

$u_6 = 600 \times 1{,}025^5 \approx 678{,}8449$

Daqui a 5 anos o preço da renda é, aproximadamente, 678 €.

37. $\begin{cases} u_1 = 20\,000 \\ u_{n+1} = u_n - u_n \times 0{,}054 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 20\,000 \\ u_{n+1} = (1 + 0{,}054)u_n \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 20\,000 \\ u_{n+1} = 0{,}946u_n \end{cases}$

37.1. $u_n = 20\,000 \times 0{,}946^{n-1}$

Passados n anos,

$u_{n+1} = 20\,000 \times 0{,}946^n$

37.2. $u_{11} = 20\,000 \times 0{,}946^{10} \approx 11\,479{,}98$

Daqui a 10 anos o preço da máquina é, aproximadamente, 11 480 €.

Pág. 146

38. $d_n = \frac{3}{1{,}5^n}$

38.1. $\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\frac{3}{1{,}5^{n+1}}}{\frac{3}{1{,}5^n}} = \frac{\cancel{3} \times 1{,}5^n}{\cancel{3} \times 1{,}5^{n+1}} = \frac{\cancel{1{,}5^n}}{\cancel{1{,}5^n} \times 1{,}5} = \frac{1}{1{,}5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

(d_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{2}{3}$.

38.2. $d_1 = \frac{3}{1{,}5} = \frac{3}{\frac{15}{10}} = \frac{30}{15} = 2$

$\begin{cases} d_1 = 2 \\ d_{n+1} = \frac{2}{3}d_n, \ n \geq 1 \end{cases}$

38.3. $d_2 = \frac{3}{1{,}5^2} = \frac{3}{2{,}25} = \frac{4}{3}$

$d_3 = \frac{3}{1{,}5^3} = \frac{3}{3{,}375} = \frac{8}{9}$

$d_1 + d_2 + d_3 = \underset{(\times 9)}{2} + \underset{(\times 3)}{\frac{4}{3}} + \frac{8}{9} = \frac{38}{9}$

39. **I.** $a_{n+1} - a_n = 3a_n + 2 - a_n = 2a_n + 2$

(a_n) não é uma progressão aritmética.

(I) Falsa.

II. $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_{n+1}} = \frac{3a_{n+2} + 1}{a_{n+1}}$

$= \frac{3a_{n+3}}{a_{n+1}} = \frac{3(a_{n+1})}{a_{n+1}} = 3$

(b_n) é uma progressão geométrica de razão $r = 3$.

Opção (C)

40.1. $a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 5 - (3n - 5) =$

$= 3n + 3 - 5 - 3n + 5 = 3$

(a_n) é uma progressão aritmética de razão 3.

40.2. a) $a_{n+1} - a_1 = 3 \times 1 - 5 = -2$

$a_1 = 3 \times 1 - 5 = -2$; $\quad a_{12} = 3 \times 12 - 5 = 31$

$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \times 12 = \frac{-2 + 31}{2} \times 12 = 29 \times 6 = 174$

b) $a_{10} = 3 \times 10 - 5 = 25$

$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \times 10 = \frac{-2 + 25}{2} \times 10 = 23 \times 5 = 115$

$S_{12} - S_{10} = 174 - 115 = 59$

Outro processo:

$S_{12} - S_{10} = a_1 + a_{12} = 28 + 31 = 59$

Cálculos auxiliares: $a_{11} = 3 \times 11 - 5 = 28$

c) $3n - 5 = 169 \Leftrightarrow 3n = 174 \Leftrightarrow n = 58$

169 é o termo de (a_n) de ordem 58.

$S_1 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + \ldots + 169 =$

$= a_1 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{58} =$

$= -2 + \frac{a_{10} + 169}{2} \times 49 =$

$= -2 + \frac{25 + 169}{2} \times 49 = 4751$

d)

$S_{199} - S_{200} + S_{201} - S_{202} =$

$= S_{199} - S_{199} - a_{200} + S_{201} - S_{201} - a_{202} =$

$= -a_{200} - a_{202} =$

$= -(3 \times 200 - 5) - (3 \times 202 - 5) =$

$= -595 - 601 = -1196$

Pág. 147

41.1. $a_n = a_1 + (n-1)\times r \Leftrightarrow a_n = 2 + (n-1)\times 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_n = 5n - 3$

41.2. $a_{10} = 5\times 10 - 3 = 47$

$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2}\times 10 \Leftrightarrow S_{10} = \frac{2+47}{2}\times 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{10} = 49\times 5 \Leftrightarrow S_{10} = 245$

41.3. $a_9 = 5\times 9 - 3 = 42$

$S_9 = \frac{a_1 + a_9}{2}\times 9 \Leftrightarrow S_9 = \frac{2+42}{2}\times 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_9 = 22\times 9 \Leftrightarrow S_9 = 198$

$a_{20} = 5\times 20 - 3 = 97$

$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2}\times 20 \Leftrightarrow S_{20} = \frac{2+97}{2}\times 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{20} = 99\times 10 \Leftrightarrow S_{20} = 990$

$a_{10} + a_{11} + ... + a_{20} = S_{20} - S_9 = 990 - 198 = 792$

42.1. (u_n) é uma progressão aritmética de razão -3 .

$u_3 = u_1 + 2r \Leftrightarrow -5 = u_1 + 2(-3) \Leftrightarrow u_1 = -5 + 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_1 = 1$

$u_n = u_1 + (n-1)\times r \Leftrightarrow u_n = 1 + (n-1)\times(-3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n = -3n + 4$

$u_{10} = -3\times 10 + 4 = -26$

42.2. a) $S_{10} = \frac{u_1 + u_{10}}{2}\times 10 \Leftrightarrow S_{10} = \frac{1-26}{2}\times 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{10} = -25\times 5 \Leftrightarrow S_{10} = -125$

b) $u_{24} = -3\times 24 + 4 = -68$

$S_{24} = \frac{u_1 + u_{24}}{2}\times 24 = \frac{1-68}{2}\times 24 = -67\times 12 = -804$

$u_{30} = -3\times 30 + 4 = -86$

$S_{30} = \frac{u_1 + u_{30}}{2}\times 30 = \frac{1-86}{2}\times 30 = -85\times 15 = -1275$

$u_{25} + u_{26} + ... + u_{30} = S_{30} - S_{24} = -1275 - (-804) =$

$= -1275 + 804 = -471$

43. A sucessão de montantes da Laura no mealheiro (a_n) é uma progressão aritmética de razão 10 e $a_1 = 100 + 10 = 110$.

$a_n = a_1 + (n-1)\times r \Leftrightarrow a_n = 110 + (n-1)\times 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_n = 10n + 100$

O dinheiro que a Laura terá ao fim de 52 semanas é dado pelo termo de ordem 52.

$a_{52} = 10\times 52 + 100 = 620$

Ao fim de 52 semanas, a Laura tem 620 € .

44. A sucessão do número de camisas vendidas por mês (u_n) é uma progressão aritmética de razão 1500 e $u_1 = 25\,000$.

$u_n = u_1 + (n-1)\times r \Leftrightarrow u_n = 25\,000 + (n-1)\times 1500 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n = 1500n + 23\,500$

O número de camisas vendidas até ao final do ano é dado pela soma dos 12 primeiros termos desta progressão.

$u_{12} = 1500\times 12 + 23\,500 = 41\,500$

$S_{12} = \frac{u_1 + u_{12}}{2}\times 12 = \frac{25\,000 + 41\,500}{2}\times 12 = 399\,000$

Até ao final do ano serão vendidas 399 000 camisas.

45. Seja (d_n) a sucessão das distâncias percorridas pela bola nas subidas e descidas desde o primeiro momento em que cai no chão.

(d_n) é uma progressão geométrica de razão $0{,}75$ e $d_1 = 2\times(0{,}75\times 4) = 6$.

2: subida e descida

A distância percorrida pela bola (nas descidas e nas subidas) até ao instante em que bate no chão pela 10.ª vez é dada por:

$4 + S_9$

4: 1.ª descida;

S_9 : soma das 9 subidas e descidas após a primeira descida.

$4 + S_9 = 4 + d_1\times\frac{1-r^9}{1-r} = 4 + 6\times\frac{1-0{,}75^9}{1-0{,}75} \approx 26{,}2$

A distância percorrida pela bola é de cerca de $26{,}2$ m .

Pág. 148

46.1. $a_1 = \frac{1}{2}\times 2\pi r = \pi r$; $\quad a_2 = \frac{1}{2}\times \pi r = \frac{\pi r}{2}$

$a_3 = \frac{1}{2}\times\frac{\pi r}{2} = \frac{\pi r}{4}$; $\quad a_4 = \frac{1}{2}\times\frac{\pi r}{4} = \frac{\pi r}{8}$

$a_5 = \frac{1}{2}\times\frac{\pi r}{8} = \frac{\pi r}{16}$

46.2. A sucessão de diâmetro (d_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e $d_1 = 2r$.

$S_p = \frac{31}{8}r \Leftrightarrow d_1\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^p}{1-\frac{1}{2}} = \frac{31}{8}r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2r\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^p}{\frac{1}{2}} = \frac{31}{8}r \Leftrightarrow 1-\left(\frac{1}{2}\right)^p = \frac{31}{32} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^p = 1 - \frac{31}{32} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^p = \frac{1}{32} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^p = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Leftrightarrow p = 5$

47.1. $u_2 = u_{1+1} = 3u_1 + 1 = 3 \times \frac{1}{4} + 1 = \frac{7}{4}$

$u_3 = u_{2+1} = 3u_2 + 1 = 3 \times \frac{7}{4} + 1 = \frac{25}{4}$

$u_4 = u_{3+1} = 3u_3 + 1 = 3 \times \frac{25}{4} + 1 = \frac{79}{4}$

47.2. $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} + \frac{1}{2}}{u_n + \frac{1}{2}} = \frac{3u_n + 1 + \frac{1}{2}}{u_n + \frac{1}{2}} = \frac{3u_n + \frac{3}{2}}{u_n + \frac{1}{2}} =$

$= \frac{3\left(u_n + \frac{1}{2}\right)}{u_n + \frac{1}{2}} = 3$

(v_n) é uma progressão geométrica de razão 3.

47.3. $v_1 = u_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$v_n = v_1 \times r^{n-1} = \frac{3}{4} \times 3^{n-1} = \frac{3^n}{4}$

47.4. $S_{10} = v_1 \times \frac{1 - r^{n-1}}{1 - r} = \frac{3}{4} \times \frac{1 - 3^{n-1}}{1 - 3} = -\frac{3}{8}\left(1 - 3^{10}\right) =$

$= 22\,143$

48. <u>1.ª hipótese:</u>

30 euros por hora em 20 horas

$30 \times 20 = 600$ €

O jovem ganhava 600 €.

<u>2.ª hipótese:</u>

A sucessão de pagamentos em cada hora (a_n) é uma progressão aritmética de razão 3 e $a_1 = 2$.

$a_n = a_1 + (n-1) \times r \Leftrightarrow a_n = 2 + (n-1) \times 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_n = 3n - 1$

O dinheiro recebido pelo jovem pelas 20 horas de trabalho é a soma dos 20 primeiros termos desta sucessão.

$a_{20} = 3 \times 20 - 1 = 59$

$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \times 20 = \frac{2 + 59}{2} \times 20 = 61 \times 10 = 610$ €

O jovem ganhava 610 €.

<u>3.ª hipótese</u>:

Seja (b_n) a sucessão de pagamentos em cada hora.

$b_{n+1} = b_n + 0{,}3b_n \Leftrightarrow b_{n+1} = 1{,}3b_n$

(b_n) é uma progressão geométrica de razão 1,3 e $b_1 = 1$.

O dinheiro recebido pelo jovem pelas 20 horas de trabalho é a soma dos 20 primeiros termos desta sucessão

$S_{20} = b_1 \times \frac{1 - 1{,}3^{20}}{1 - 1{,}3} = 1 \times \frac{1 - 1{,}3^{20}}{-0{,}3} \approx 630{,}17$

O jovem ganhava cerca de 630,17 €. A melhor hipótese era a terceira e a pior era a primeira.

Pág. 149

49.1. 1, 2, 3, ..., n é uma progressão aritmética de razão 1 e termo geral $a_n = n$

$1 + 2 + 3 + ... + n = S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n = \frac{1 + n}{2} \times n =$

$A_1 = 4^2 = 16 \quad = \frac{n(n+1)}{2}$

49.2. $1, 2, 4, 8, ..., 2^{n-1}$ é uma progressão geométrica de razão 2 e termo geral $b_n = 2^{n-1}$

$1, 2, 4, 8, ..., 2^{n-1} = S_n = b_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r} = 1 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} =$

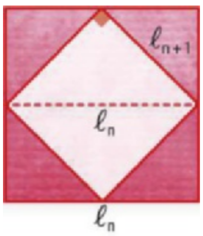
$= 1 \times \frac{1 - 2^n}{-1} = 2^n - 1$

49.3. $1, a, a^2, a^3, ..., a^{n-1}$ é uma progressão geométrica de razão a e termo geral $c_n = a^{n-1}$

$1, a, a^2, a^3, ..., a^{n-1} = c_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r} = 1 \times \frac{1 - a^n}{1 - a} =$

$= \frac{a^n - 1}{a - 1}$

50.1. Seja l_n o comprimento do lado de ordem n e l_{n+1} o comprimento do quadrado de ordem $n+1$.



$l_n^2 = (l_{n+1})^2 + (l_{n+1})^2 \Leftrightarrow 2(l_{n+1})^2 = l_n^2 \Leftrightarrow (l_{n+1})^2 = \frac{l_n^2}{2} \Leftrightarrow$

$\underset{(l_{n+1}>0)}{\Leftrightarrow} l_{n+1} = \frac{l_n}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow l_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} l_n$

(l_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

50.2. $l_n = l_1 \times r^{n-1} = 4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

$A_n = \left(4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right)^2 = 16 \times \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^{n-1} =$

$= 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^4 \times 2^{-n+1} = 2^{5-n}$

$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{2^{5-(n+1)}}{2^{5-n}} = \frac{2^{5-n-1}}{2^{5-n}} = \frac{2^{5-n} \times 2^{-1}}{2^{5-n}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

(A_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

$A_1 = 4^2 = 16$

$$S_{10} = A_1 \times \frac{1-r^{10}}{1-r} = 16 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}} = 32 \times \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) =$$

$= \frac{1023}{32}$ u. a.

50.3. $\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{4l_{n+1}}{4l_n} = \frac{l_{n+1}}{l_n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(P_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e $P_1 = 4 \times 4 = 16$

$r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 1$

$$S = \frac{P_1}{1-r} = \frac{16}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{16}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{32}{2-\sqrt{2}} \text{ u. c.}$$

51. A sucessão de números ímpares (u_n) é uma progressão aritmética de razão 2 e $u_1 = 1$

$u_n = u_1 + (n-1)r \Leftrightarrow u_n = 1 + (n-1) \times 2 \Leftrightarrow u_n = 2n-1$

Seja k a ordem do primeiro termo da soma que a Maria calculou:

$S_{10} = 220 \Leftrightarrow \frac{u_k + u_{k+9}}{2} \times 10 = 220 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2k-1+2(k+9)-1}{2} = 22 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2k-1+2k+18-1 = 44 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4k = 28 \Leftrightarrow k = 7$

$k+9 = 7+9 = 16$

A Maria calculou a soma do 7.º ao 16.º termo (inclusive).

Pág. 150

52.1. A sucessão de tempos de exercício (t_n) é uma progressão aritmética de razão 3 e $t_1 = 15$.

$t_{10} = t_1 + (10-1) \times r = 15 + 9 \times 3 = 42$

O atleta dedicou 42 minutos ao exercício no 10.º dia.

52.2. 10×60 min $= 600$ min

$t_n = t_1 + (n-1) \times r \Leftrightarrow t_n = 15 + (n-1) \times 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t_n = 3n + 12$

$s_n = 600 \Leftrightarrow \frac{t_1 + t_n}{2} \times n = 600 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{15+3n+12}{2} \times n = 600 \Leftrightarrow (3n+27) \times n = 1200 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3n^2 + 27n - 1200 = 0 \Leftrightarrow n^2 + 9n - 400 = 0$

Como $n > 0$, $n = 16$ o plano será revisto ao fim de 16 dias.

C.A.:

$n^2 + 9n - 400 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-9 \pm \sqrt{81-1600}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \frac{-9 \pm 41}{2} \Leftrightarrow n = -25 \vee n = 16$

53.1. Sabe-se que $d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n$. Então, (d_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

$d_n = d_1 \times r^{n-1} \Leftrightarrow d_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$a_n = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a_n = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2^{-n+1}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a_n = \frac{\pi}{2}\left(2^{-n}\right)^2 \Leftrightarrow a_n = \frac{\pi}{2} 2^{-2n} \Leftrightarrow a_n = \pi \times 2^{-2n-1}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi \times 2^{-2(n+1)-1}}{\pi \times 2^{-2n-1}} = \frac{2^{-2n-1} \times 2^{-2}}{2^{-2n-1}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$.

53.2. $r = \frac{1}{2}$ e $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, $d_1 = 1$

$$S = \frac{d_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

A soma de todos os diâmetros (d_n) é igual a 2 cm que é o comprimento do diâmetro do círculo exterior.

53.3. $r = \frac{1}{4}$ e $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$, $a_1 = \pi \times 2^{-3} = \frac{\pi}{8}$

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{\pi}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{\pi}{6}$$

A soma das áreas de todos os semicírculos é $\frac{\pi}{6}$ cm^3.

53.4. Área do semicírculo exterior: $\frac{1}{2}\pi \times 1^2 = \frac{\pi}{2}$ u. a.

Área da parte colorida: $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ cm^2

54.1.

$$\begin{cases} S = 3a_1 \\ a_3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{1-r} = 3a_1 \\ a_1 \times r^2 = 9 \end{cases} \underset{(r \neq 1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a_1 = 3a_1(1-r) \\ a_1 \times r^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 - 3a_1(1-r) = 0 \\ a_1 \times r^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(1-3+3r) = 0 \\ a_1 \times r^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\underset{(a_1\neq 0)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3r-2=0 \\ a_1\times r^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=\dfrac{2}{3} \\ a_1\times\dfrac{4}{9}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=\dfrac{2}{3} \\ a_1=\dfrac{81}{4} \end{cases}$$

$$r=\frac{2}{3}$$

54.2. $a_9=a_1\times r^8=\dfrac{81}{4}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^8=\dfrac{64}{81}$

Pág. 151

55. Sejam (d_n) e (a_n) as sucessões de comprimentos das diagonais maiores e de áreas do losango, respetivamente.

(d_n) é uma progressão geométrica de razão

$r=\dfrac{5}{6}$.

Se os losangos são semelhantes então as áreas estão também em progressão geométrica de razão

$$r_a=r^2=\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{36}$$

Seja k o comprimento da diagonal do losango L_1.

$$\left|\frac{25}{36}\right|<1 \text{ e } a_1=\frac{11\times k}{2}$$

$$S=144\Leftrightarrow\frac{\frac{11k}{2}}{1-r_a}=144\Leftrightarrow\frac{\frac{11k}{2}}{1-\frac{25}{36}}=144\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\frac{11k}{2}}{\frac{11}{36}}=144\Leftrightarrow 18k=144\Leftrightarrow k=8$$

A diagonal menor tem 8 cm de comprimento.

56.1. Seja A_n a área do quadrado de ordem n e k o seu lado.

$$A_n=k^2\,;\qquad A_{n+1}=\frac{k\times k}{2}=\frac{k^2}{2}$$

$$\frac{A_{n+1}}{A_n}=\frac{\frac{k^2}{2}}{k^2}=\frac{1}{2}$$

(A_n) é uma progressão geométrica de razão

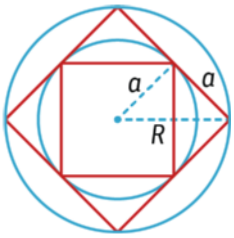
$$r_A=\frac{1}{2} \text{ e } A_1=1^2=1$$

$$A_n=1\times r_A^{n-1}=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Seja C_n a área do círculo de ordem n e R o seu raio e seja a o raio do círculo de ordem $n+1$.

$$R^2=a^2+a^2\Leftrightarrow 2a^2=R^2\Leftrightarrow a^2=\frac{R^2}{2}\Leftrightarrow$$

$$\underset{(a>0)}{\Leftrightarrow} a=\sqrt{\frac{R^2}{2}}\Leftrightarrow a=\frac{R}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{2}R}{2}$$



$$C_n=\pi R^2$$

$$C_{n+1}=\pi a^2=\pi\left(\frac{\sqrt{2}R}{2}\right)^2=\pi\times\frac{2R^2}{4}=\frac{1}{2}\pi R^2=\frac{1}{2}C_n$$

(C_n) é uma progressão geométrica de razão

$$r_c=\frac{1}{2} \text{ e } C_1=\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}$$

$$C_n=C_1\times r^{n-1}=\frac{\pi}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$C_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ e } C_n=\frac{\pi}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

56.2. A área colorida é dada pela diferença entre a soma de todas as áreas dos quadrados e a soma de todas as áreas dos círculos.

Sejam A e C as somas de todas as áreas dos quadrados e dos círculos, respetivamente.

$$A=\frac{A_1}{1-r_A}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2 \text{ u. a.}$$

$$C=\frac{C_1}{1-r_c}=\frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{2} \text{ u. a.}$$

Área da parte colorida: $\left(2-\dfrac{\pi}{2}\right)$ u. a.

Máximo On

Pág. 152

1.1. 2 ,1 ,4 ,2 ,1 ,4 ,2 ,1 ,4

1.2. 10 , 5 , 16 , 8 , 4 , 2 , 1 , 4 , 2

2. Para os primeiros termos apresentados, as sequências geradas têm sempre a sequência 4 , 2 , 1 .

Pág. 153

3.1. **a)** vazia; **b)** Enquanto; **c)** par; **d)** acrescentado

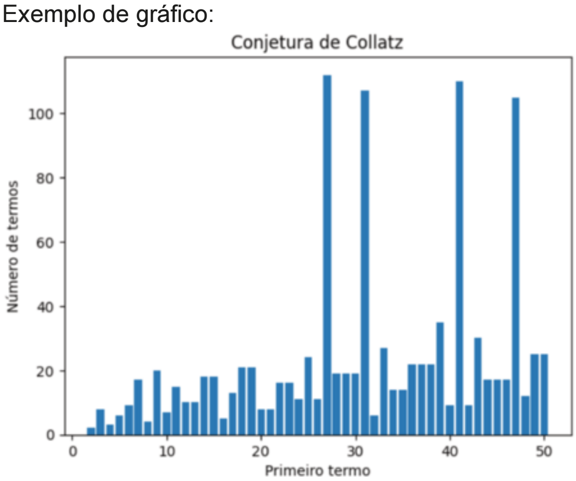
3.2. 1

3.3. Se o primeiro termo é 2 , a sequência tem dois termos e se o primeiro termo é 10 , tem sete termos.

4.1. Exemplo de programa:

```
x=int(input("Até que valor do primeiro termo?"))
seq=[]
def collatz_sequencia(x):
  seq = [x]
  if x < 1:
    return []
  while x > 1:
    if x % 2 == 0:
      x = x / 2
    else:
      x = 3 * x + 1
    seq.append(int(x))
  return seq
abcissas  = list(range(2,x+1))
ordenadas = [len(collatz_sequencia(N)) for N in range (2,x+1)]
#importar a biblioteca que permite fazer gráficos
import matplotlib.pyplot as plt
#formatar o gráfico, o título e os eixos
plt.bar(abcissas, ordenadas)
plt.title("Conjetura de Collatz")
plt.xlabel("Primeiro termo")
plt.ylabel("Número de termos")
#mostrar o gráfico
plt.show()
```

Exemplo de gráfico:



4.2. Pela análise do gráfico verifica-se que o maior número de termos da sequência é obtido quando o primeiro termo é 27 .

Acrescentando na última linha do primeiro programa em Python, o comando print(len(collatz_sequencia(x))), correndo o programa obtém-se que o número de termos da sequência com o primeiro termo 27 é 112 .

Avaliação global 1

Pág. 154

1. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{3\times(-1)^{n+2}}{3\times(-1)^{n+1}}=-1$

(u_n) é uma progressão geométrica de razão -1 e $u_1=3$.

$$S_9=3\times\frac{1-(-1)^9}{1-(-1)}=3\times\frac{1+1}{2}=3$$

$$u_n+u_{n+1}=3\times(-1)^{n+1}+3\times(-1)^{n+2}=$$

$$=3\times(-1)^{n+1}+3\times(-1)^{n+1}\times(-1)=$$

$$=3\times(-1)^{n+1}+3\times(-1)^{n+1}=0$$

Opção (C)

2. $30\text{ cm}=0{,}3\text{ m}$

$80\text{ cm}=0{,}8\text{ m}$

A área lateral do 1.º degrau: $0{,}3\times0{,}8=0{,}24\text{ m}^2$

Volume da 2.ª plataforma: $2\times0{,}3\times0{,}8\times50=24\text{ m}^3$

Seja (a_n) a sucessão das áreas laterais das plataformas

$a_{n+1}=a_n+0{,}8\times0{,}3=a_n+0{,}24\text{ m}$

(a_n) é uma progressão aritmética de razão 0,24 e $a_1=0{,}24$

$a_n=0{,}24+(n-1)\times0{,}24\Leftrightarrow a_n=0{,}24\text{ m}$

$a_{15}=0{,}24\times15=3{,}6\text{ m}$

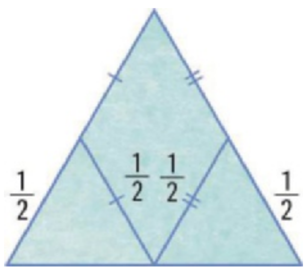
$$S_{15}=\frac{a_1+a_{15}}{2}\times15=\frac{0{,}24+3{,}6}{2}\times15=28{,}8\text{ m}^2$$

Volume da bancada: $28{,}8\times50=1440\text{ m}^3$

$1440\text{ m}^3\neq1500\text{ m}^3$

Opção (D)

3. $c_1=3$ e, em cada divisão, a soma dos comprimentos vai ser sempre igual porque substituímos segmentos por outros de igual comprimento e em mesmo número.
Opção (D)



Pág. 155

4. Seja (d_n) a sucessão de diâmetros das circunferências.

(d_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e $d_1=1$

$$r=\frac{1}{2}\text{ e }\left|\frac{1}{2}\right|<1\ ;\ S=\frac{d_1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2\neq2\times2$$

Seja (p_n) a sucessão de perímetros das circunferências.

(p_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e

$$p_1=2\pi\times\frac{1}{2}=\pi$$

$$S_n=p_1\times\frac{1-r^n}{1-r}=\pi\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\pi\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\neq(2\pi)^n$$

$$S_{10}=2\pi\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)=\frac{1023}{512}\pi\neq4\pi$$

Seja (a_n) a sucessão de áreas dos círculos.

$$a_n=\pi\times\left(\frac{d_n}{2}\right)=\frac{\pi}{4}(d_n)^2$$

$$a_{n+1}=\pi\times\left(\frac{d_{n+1}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}(d_{n+1})^2$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{\pi}{4}(d_{n+1})^2}{\frac{\pi}{4}(d_n)^2}=\left(\frac{d_{n+1}}{d_n}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$

$$a_1=\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}$$

$$r=\frac{1}{4}\text{ e }\left|\frac{1}{4}\right|<1$$

$$S=\frac{a_1}{1-r}=\frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{\pi}{3}\text{ u. a.}$$

Área do círculo c: $\pi\times1^2=\pi$ u. a.

Área da região colorida: $\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$ u. a.

Opção (D)

5. (a_n) é uma progressão geométrica de razão $r=\frac{1}{3}$

$\left|\frac{1}{3}\right|<1$; $S=\dfrac{a_1}{1-r}=\dfrac{2}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{\frac{2}{3}}=3$. Opção (A)

6.

$$\begin{cases} u_1+u_5=26 \\ u_{10}=34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1+4r=26 \\ u_1+9r=34 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1+4r=26 \\ u_1+9r=34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=13-2r \\ 13-2r+9r=34 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1=13-2r \\ 7r=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=13-2\times 3 \\ r=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=7 \\ r=3 \end{cases}$$

$$u_n=u_1+(n-1)\times r \Leftrightarrow u_n=7+(n-1)\times 3 \Leftrightarrow u_n=3n+4$$

$$u_n=150 \Leftrightarrow 3n+4=150 \Leftrightarrow 3n=146 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{146}{3} \notin \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

$$u_n=156 \Leftrightarrow 3n+4=156 \Leftrightarrow 3n=152 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{152}{3} \notin \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

$$u_n=157 \Leftrightarrow 3n+4=157 \Leftrightarrow 3n=153 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{157}{3} \notin \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

Opção (C)

7. $$S_6=\frac{21}{4} \Leftrightarrow t_1\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{21}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t_1\times\frac{21}{32}=\frac{21}{4} \Leftrightarrow t_1=8 \neq -4$$

$$t_2=8\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-4 \neq -8$$

$$t_4=t_1\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3=8\times\left(-\frac{1}{8}\right)=-1$$

$$t_5=-1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$$

Opção (B)

8. $r=-\frac{1}{4}$ e $\left|-\frac{1}{4}\right|<1$

$$S=8 \Leftrightarrow \frac{u_1}{1-r}=8 \Leftrightarrow \frac{u_1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_1}{\frac{5}{8}}=8 \Leftrightarrow u_1=10$$

$$u_4=u_1\times r^3=10\times\left(-\frac{1}{4}\right)^3=-\frac{5}{32}$$

Opção (A)

Avaliação global 2

Pág. 156

1.1. $d_2^2=1^2+1^2 \Leftrightarrow d_2^2=2 \underset{(d_2>0)}{\Leftrightarrow} d_2=\sqrt{2}$

$$d_3^2=d_2^2+1^2 \Leftrightarrow d_3^2=\sqrt{2}^2+1^2 \Leftrightarrow d_3^2=3 \underset{(d_3>0)}{\Leftrightarrow} d_3=\sqrt{3}$$

1.2. $d_{n+1}^2=d_n^2+1^2 \underset{(d_{n+1}>0)}{\Leftrightarrow} d_{n+1}=\sqrt{1+d_n^2}$

2.1. $u_1=\frac{1(3\times 1-1)}{2}=\frac{1\times 2}{2}=1$

$$u_2=\frac{2(3\times 2-1)}{2}=\frac{2\times 5}{2}=5$$

$$u_3=\frac{3(3\times 3-1)}{2}=\frac{3\times 8}{2}=12$$

$$u_4=\frac{4(3\times 4-1)}{2}=\frac{4\times 11}{2}=22$$

Então, a expressão é compatível com os termos indicados.

2.2. $u_{n+1}=\frac{(n+1)[3(n+1)-1]}{2}=\frac{(n+1)(3n+2)}{2}=$

$$=\frac{3n^2+2n+3n+2}{2}=\frac{3n^2-n+6n+2}{2}=$$

$$=\frac{3n^2-n}{2}+\frac{6n+2}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}+3n+1=u_n+3n+1$$

$$\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=u_n+3n+1,\ n\geq 1 \end{cases}$$

2.3. $v_n=u_{n+1}-u_n=3n+1$

(v_n) é uma progressão geométrica de razão 3.

a) $v_1=3\times 1+1=4$; $v_{10}=3\times 10+1=31$

$$S_{10}=\frac{v_1+v_{10}}{2}\times 10=\frac{4+31}{2}\times 10=35\times 5=175$$

b) $v_{2n}=3\times 2n+1=6n+1$

$$S_{2n}=\frac{v_1+v_{2n}}{2}\times 2n=\frac{4+6n+1}{2}\times 2n=(6n+5)\times n=$$

$$=6n^2+5n$$

3.1. $l_1=4$;

$$l_2=4\times\frac{4}{5}=\frac{16}{5}$$

$$l_3=\frac{16}{5}\times\frac{4}{25}=\frac{64}{25};$$

$$l_4=\frac{64}{25}\times\frac{4}{5}=\frac{256}{125}$$

$$S=4+\frac{16}{5}+\frac{64}{25}+\frac{256}{125}=\frac{500+400+320+256}{125}=$$

$$=\frac{1476}{125}=11{,}808 \text{ cm}$$

3.2. Seja (a_n) a sucessão das áreas dos quadrados.

$a_n = l_n^2$

$a_{n+1} = (l_{n+1})^2 = \left(\frac{4}{5}l_n\right)^2 = \frac{16}{25}l_n^2 = \frac{16}{25}a_n$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão

$r = \frac{16}{25}$ e $a_1 = 4^2 = 16$; $r = \frac{16}{25}$ e $\left|\frac{16}{25}\right| < 1$

$s = \frac{a_1}{1-r} = \frac{16}{1-\frac{16}{25}} = \frac{16}{\frac{9}{25}} = \frac{400}{9}$ cm^2

Pág. 157

4.1. $A_6 = \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{4} = \frac{1}{32}$; $A_7 = \frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{64}$

4.2. (A_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e

$A_1 = 1^2 = 1$

$S_n = A_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 1\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} =$

$= 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$ então $2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] < 2$, para todo

$n \geq 1$, ou seja, $S_n < 2$.

5. $a_{n+1} = a_n + 0{,}04a_n = a_n(1+0{,}04) = a_n \times 1{,}04$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão 1,04

e $a_1 = 120\,000 \times 1{,}04$

$a_n = a_1 \times r^{n-1} = 120\,000 \times 1{,}04 \times 1{,}04^{n-1} =$

$= 120\,000 \times 1{,}04^n$

I – b)

$b_{n+1} = b_n - 0{,}02b_n = b_n(1-0{,}02) = b_n \times 0{,}98$

(b_n) é uma progressão geométrica de razão 0,98

e $b_n = b_1 = 120\,000 \times 0{,}98$

$b_n = b_1 \times r^{n-1} = 120\,000 \times 0{,}98 \times 0{,}98^{n-1} = 120\,000 \times 0{,}98^n$

II – c)

$a_5 - 120\,000 = 120\,000 \times 1{,}04^5 - 120\,000 \approx 25\,998$

$120\,000 - b_5 = 120\,000 - 120\,000 \times 0{,}98^5 \approx 11\,530$

$2 \times 11\,530 = 23\,060$

III – a)

6.

$u_{n+1} - u_n = 1 - 2(n+1) - (1-2n) =$

$= \cancel{1} - \cancel{2n} - 2 - \cancel{1} + \cancel{2n} = -2$

logo (u_n) é uma progressão aritmética com primeiro termo $u_1 = 1-2 = -1$ e razão $r = -2$.

Os termos de ordem par de (u_n) são aqueles cuja ordem é da forma $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$u_{2k} = 1 - 2(2k) = 1 - 4k$$

Quer-se a soma dos cem primeiros termos da sucessão (u_n) definida por $v_n = 1-4n$, que é uma progressão aritmética com primeiro termo $v_1 = u_2 = -3$ e razão $r = 2\times(-2) = -4$

$S_{100} = \frac{v_1 + v_{100}}{2} \times 100 = \frac{-3+(-399)}{2} \times 100 = -20\,100$

C.A.: $v_{100} = 1 - 4 \times 100 = -399$

Questões tipo exame

Pág. 158

1.1. O produto dos números das bolas retiradas é igual a 9 em dois casos distintos: quando se retiram duas bolas com o número 3 ou quando se retira uma bola com o número 1 e uma bola com o número 9.

Portanto, o número pedido é ${}^{4}C_2 + {}^{3}C_2 \times 1 = 9$.

1.2. $\underbrace{{}^{9}C_3 \times {}^{6}C_4 \times {}^{2}C_1}_{1} - 2\times\underbrace{\left({}^{8}C_3 \times {}^{5}C_4\right)}_{2} = 1960$

1 Todas as sequências
2 Sequências em que a primeira bola ou a última tem o número 0

Ou $\dfrac{9!}{3!\times 4!} - 2\times\dfrac{8!}{3!\times 4!} = 1960$

2. **1.ª resposta:**
Para que a comissão seja mista temos duas hipóteses, em alternativa:

- Um rapaz e duas raparigas

$\underset{1}{3}\times\underset{2}{12}\times\underset{3}{{}^{16}A_2}$

1 número de maneiras de escolher o cargo que vai ser ocupado pelo rapaz
2 número opções para a escolha do rapaz
3 número de maneiras de escolher ordenadamente duas das 16 raparigas, para preencherem os cargos não ocupados pelo rapaz

- Uma rapariga e dois rapazes

$\underset{1}{3}\times\underset{2}{16}\times\underset{3}{{}^{12}A_2}$

1 número de maneiras de escolher o cargo que vai se ocupado pela rapariga
2 número opções para a escolha da rapariga
3 número de maneiras de escolher ordenadamente dois dos 12 rapazes, para preencher os cargos não ocupados pela rapariga

Portanto, o número pedido é
$3\times 12\times {}^{16}A_2 + 3\times 16\times {}^{12}A_2$.

2.ª resposta:

$\underset{1}{{}^{28}A_3} - \left(\underset{2}{{}^{16}A_3} + \underset{3}{{}^{12}A_3}\right)$

1 número de comissões diferentes que se podem formar, escolhendo-se ordenadamente 3 dos 28 alunos para preencherem os três cargos ordenadamente;
2 número de maneiras de escolher ordenadamente três das 16 raparigas para preencheram os três cargos.
3 número de maneiras de escolher ordenadamente três dos 12 rapazes para preencherem os três cargos.

Portanto, a expressão ${}^{28}A_3 - \left({}^{16}A_3 + {}^{12}A_3\right)$, sendo a diferença entre o número total de comissões e o número total de comissões só com raparigas e só com rapazes, designa o número de comissões mistas distintas que se podem formar.

3.1. O Pedro tem 12 livros na estante do seu quarto, pelo que pretende selecionar 6.
Por outro lado, tem quatro livros de Francisco José Viegas e como pretende levar, pelo menos, três destes livros, pode levar três ou quatro.
Assim, o número de maneiras diferentes de o Pedro fazer a sua escolha é
${}^{4}C_3 \times {}^{8}C_3 + {}^{4}C_4 \times {}^{8}C_2 = 252$

3.2. A sequência dos dois livros Miguel Sousa Tavares pode ser estabelecida de 2! maneiras diferentes. A ordem de leitura dos restantes 4 livros juntamente com o bloco dos dois livros Miguel Sousa Tavares pode ser definida de 5! maneiras diferentes.
Há, portanto, $2!\times 5! = 240$ maneiras de fixar a sequência de leitura dos seis livros de forma que os dois livros de Miguel Sousa Tavares fiquem um a seguir ao outro.

Pág. 159

4.1. Existem duas hipóteses, em alternativa ou dois dos pontos pertencem à reta r e um à reta s ou dois pontos pertencem à reta s e um à reta r.
O número pedido é, portanto
${}^{6}C_2 \times 4 + {}^{4}C_2 \times 6 = 96$.

4.2. Para além do ponto A, escolhem-se, em alternativa, um ponto pertencente à reta r e um à reta s ou dois pertencentes à reta s:
$5\times 4 + {}^{4}C_2 = 26$

5.1. ${}^{8}C_2 - 12 = 16$

5.2. $\underset{1}{{}^{5}C_2}\times\underset{2}{3} = 30$

1 número de maneiras de escolher duas cores das cinco disponíveis
2 número de maneiras pintar o prisma com as duas cores (A e B) escolhidas
Há três maneiras para pintar as bases (as duas com a cor A, as duas com a cor B ou uma de cada cor) e apenas uma maneira de pintar as faces laterais (repare-se o prisma com as faces A-B-A-B é igual ao prisma com as faces B-A-B-A).
Portanto, o prisma pode ser pintado de $3\times 1 = 3$ maneiras diferentes.

6. $\underset{1}{(4!)^3}\times\underset{2}{3!} = 82\,944$

1 4! maneiras de dispor os reis, 4! maneiras de dispor os valetes e 4! maneiras de dispor as damas
2 número de maneiras de dispor ordenadamente os três grupos de cartas –reais, valetes e damas

7.1. $\underset{1}{5}\times\underset{2}{8!} = 201\,600$

1 número de maneiras de escolher os oito lugares seguidos (pode começar no lugar 1, 2, 3, 4 ou 5)
2 número de maneiras de ordenar as oito pessoas

7.2. E E E E $\boxed{C:1}\boxed{C:2}\boxed{C:3}\boxed{C:4}$ (8)

$\underset{1}{2^4} \times \underset{2}{4!} \times \underset{3}{{}^8C_4} = 26\,880$

1 Escolha da ordem de cada casal
2 Maneiras de ordenar os quatro casais
3 Escolha da posição dos espaços vazios (E)

Pág. 160

8. Atendendo às condições enunciadas, temos que
- o último algarismo (o das unidades) tem de ser 1, 3 ou 5 (os números são ímpares);
- o primeiro algarismo (o das centenas de milhar) tem de ser 5 ou 6 (são superiores a 500 mil);
- os algarismos 3 e 5 aparecem sempre um ao lado do outro;
- os algarismos são diferentes e selecionados entre 1, 2, 3, 4, 5 e 6

Podemos, assim, considerar quatro tipos de números
- 6 _ _ _ 3 5
  Os três algarismos em falta podem ser selecionados de $3 \times 2 \times 1 = 6$ modos diferentes.
- 6 _ _ _ 5 3
  Como no caso anterior, há $3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades.
- 6 _ _ _ _ 1
  Os quatro espaços têm de ser preenchidos com os algarismos 2 e 4 bem como com o par 3 5 ou 5 3.
  O número de possibilidades é dado por
  $\underset{1}{2} \times \underset{2}{2} \times \underset{3}{3} = 12$
  1 Pode ser 2 4 ou 4 2
  2 Pode ser 35 ou 53
  3 Número de maneiras de inserir o bloco $\boxed{35}$ ou $\boxed{53}$ entre os números 2 e 4: |2|4|
- 5 3 _ _ _ 1
  Os três algarismos em falta podem ser selecionados de $3 \times 2 \times 1 = 6$ modos diferentes.

Portanto, há $6 + 6 + 12 + 6 = 30$ números nas condições do enunciado.

9. Excluindo o delegado, temos 17 raparigas e 10 rapazes
Para além da delegada, vão fazer parte da comissão duas raparigas e um rapaz, uma rapariga e dois rapazes ou três rapazes.
O número de maneiras de fazer a escolha é dado por:

${}^{17}C_2 \times {}^{10}C_1 + {}^{17}C_1 \times {}^{10}C_2 + {}^{10}C_3 =$

$= 1360 + 765 + 120 = 2245$

Também poderíamos fazer ${}^{27}C_3 - {}^{17}C_3 = 2245$
(Todos os casos menos os que envolvem a escolha de três raparigas)

10. $2 \times {}^{10}C_6 \times {}^{14}C_6 + 2 \times {}^{10}C_8 \times {}^{14}C_4 = 1\,351\,350$

11. $\underset{1}{{}^3C_2 \times {}^{20}A_2} + \underset{2}{3 \times {}^{20}C_2} = 1710$

1 Duas fichas de cores diferentes
2 Duas fichas da mesma cor

12. ${}^9C_2 \times {}^7C_3$

Há ${}^9C_2$ modos de selecionar um grupo de 2 pessoas. Depois disso, há ${}^7C_3$ maneiras de selecionar um grupo de 3 pessoas, escolhidas entre as 7 restantes. Finalmente, só há um modo de escolher o grupo de 4.

$\frac{9!}{2! \times 3! \times 4!}$

Há $9!$ maneiras de formar uma fila com as 9 pessoas.
Fica, assim, feita a divisão por grupos: os primeiros 2 para o 1.º grupo, os 3 seguintes para o 2.º grupo e os 4 restantes para o 3.º grupo.
Entretanto, se dentro de cada grupo for alterada ordem dos elementos, a composição dos grupos não é alterada. Esta ordem pode ser alterada de $2! \times 3! \times 4!$ maneiras diferentes pelo que é necessário dividir $9!$ por $2! \times 3! \times 4!$

Pág. 161

1. $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = 2u_n + 3, \; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$

$u_2 = 2u_1 + 3 = 2a + 3$

$u_3 = 2u_2 + 3 = 2 \times (2a+3) + 3 = 4a + 6 + 3 = 4a + 9$

$u_2 + u_3 = 2a + 3 + 4a + 9 = 6a + 12$

$u_2 + u_3 = 14 \Leftrightarrow 6a + 12 = 14 \Leftrightarrow 6a = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \frac{2}{6} \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$; $\quad u_1 = \frac{1}{3}$

2. $\begin{cases} u_5 + u_{11} = 120 \\ u_{15} = 109 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4r + u_1 + 10r = 120 \\ u_1 + 14r = 109 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 14r = 120 \\ u_1 = 109 - 14r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 7r = 60 \\ u_1 = 109 - 14r \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 109 - 14r + 7r = 60 \\ u_1 = 109 - 14r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7r = 49 \\ u_1 = 109 - 14r \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 7 \\ u_1 = 11 \end{cases}$

$u_n = 11 + (n-1) \times 7$

$u_n = 333 \Leftrightarrow 11 + 7n - 7 = 333 \Leftrightarrow 7n = 329 \Leftrightarrow n = 47$

$u_{47} = 333$

3. $u_{20} = 16$; $u_{22} \Leftrightarrow u_1 \times r^{19} = 16\, u_1 \times r^{21} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 = 16 \times \frac{u_1 \times r^{21}}{u_1 \times r^{19}} \Leftrightarrow \frac{1}{16} = \frac{r^{21}}{r^{19}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{1}{16} \underset{r>0}{\Leftrightarrow} r = \frac{1}{4}$$

$$u_3 = \frac{1}{48} \Leftrightarrow u_1 \times r^2 = \frac{1}{48} \Leftrightarrow u_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{48} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{(\times 3)}{\frac{u_1}{16}} = \frac{1}{48} \Leftrightarrow 3u_1 = 1 \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{3}$$

$$u_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

4. $\begin{cases} u_{25} = 4u_5 \\ S_9 = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 24r = 4(u_1 + 4r) \\ \frac{u_1 + u_9}{2} \times 9 = 90 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 24r = 4u_1 + 16r \\ \frac{u_1 + u_1 + 8r}{2} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 = 8r \\ 2u_1 + 8r = 20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(10 - 4r) = 8r \\ u_1 = 10 - 4r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30 - 12r = 8r \\ u_1 = 10 - 4r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{3}{2} \\ u_1 = 10 - 4 \times \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{3}{2} \\ u_1 = 4 \end{cases}$$

$$u_n = u_1 + (n-1) \times r \Leftrightarrow u_n = 4 + (n-1) \times \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{3}{2}n + \frac{5}{2}$$

$$u_n = 700 \Leftrightarrow \frac{3}{2}n + \frac{5}{2} = 700 \Leftrightarrow 3n + 5 = 1400 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3n = 1395 \Leftrightarrow n = 465$$

Trata-se do termo de ordem 465.

5. u_n : -97 , $\mathbf{-94}$, -91 , $\mathbf{-88}$, -85 , $\mathbf{-82}$, -79 , …

Designemos por (a_n) a sucessão dos termos de ordem par da sucessão (u_n).

(a_n) é uma progressão aritmética de primeiro termo igual a -94 e razão igual a 6.

$$a_n = -94 + (n-1) \times 6 \Leftrightarrow a_n = 6n - 100$$

$$S_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \times 100 = \frac{-94 + 600 - 100}{2} \times 100 =$$

$$= 203 \times 100 = 20\,300$$

6.1. Sabe-se que $v_7 = 9$ e que $v_{10} = 243$.

$$\begin{cases} v_7 = 9 \\ v_{10} = 243 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 \times r^6 = 9 \\ v_1 \times r^9 = 243 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{9}{r^6} \\ \frac{9}{r^6} \times r^9 = 243 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{9}{r^6} \\ 9r^3 = 243 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{9}{r^6} \\ r^3 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{9}{3^6} \\ r = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{1}{81} \\ r = 3 \end{cases} \qquad v_1 = \frac{1}{81}$$

6.2. $v_5 + v_6 + v_7 + \ldots + v_{12} = S_{12} - S_4 =$

$$= v_1 \times \frac{1 - r^{12}}{1 - r} - v_1 \times \frac{1 - r^4}{1 - r} =$$

$$= \frac{1}{81} \times \frac{1 - 3^{12}}{1 - 3} - \frac{1}{81} \times \frac{1 - 3^4}{1 - 3} =$$

$$= \frac{1}{81} \times \left(\frac{1 - 3^{12}}{-2} - \frac{1 - 3^4}{-2}\right) =$$

$$= \frac{1}{81}(265\,720 - 40) = 3280$$

7. O comprimento total da linha poligonal é a soma dos primeiros 75 termos de uma progressão aritmética (u_n) de razão $r = 2$ cm e cujo primeiro termo é $u_1 = \overline{AB}$.

Sabemos que $S_{75} = 63 \text{ m} = 6300 \text{ cm}$

$$S_{75} = 6300 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{75}}{2} \times 75 = 6300 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_1 + u_1 + 74 \times 2}{2} = \frac{6300}{75} \Leftrightarrow \frac{2u_1 + 2 \times 74}{2} = 84 \Leftrightarrow$$

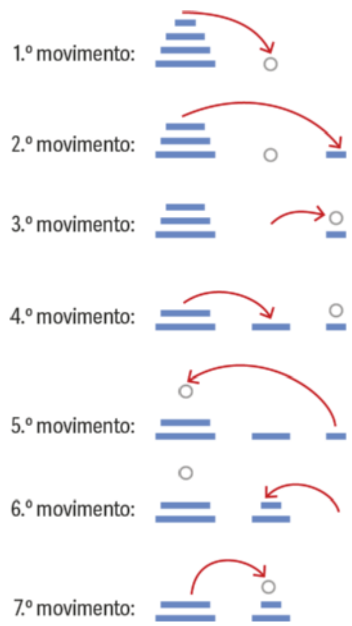
$$u_1 + 74 = 84 \Leftrightarrow u_1 = 10 \; ; \quad \overline{AB} = u_1 = 10 \text{ cm}$$

Comunicação oral

Pág. 162

1.1. 1 movimento **1.2.** 3 movimentos

2.



Assim, tivemos de deslocar o bloco formado pelos dois círculos com menor raio duas vezes e deslocamos uma vez o de raio maior, pelo que $u_3 = 2 \times u_2 + 1 = 7$.

3. $u_{n+1} = 2u_n + 1$

4. $v_1 = u_1 + 1 = 1 + 1 = 2$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}+1}{u_n+1} = \frac{2u_n+1+1}{u_n+1} = \frac{2u_n+2}{u_n+1} = \frac{2\cancel{(u_n+1)}}{\cancel{u_n+1}} = 2$$

(v_n) é uma progressão geométrica de razão 2 cujo primeiro termo é 2.

5. $v_n = 2 \times 2^{n-1} \Leftrightarrow v_n = 2^n$

$v_n = u_n + 1 \Leftrightarrow 2^n = u_n + 1 \Leftrightarrow u_n = 2^n - 1$

6. $u_7 = 2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$

O número mínimo de movimentos para transportar 7 discos para um outro suporte é 127.

Comunicação escrita

Pág. 163

1.1. As duas bolas amarelas poderão ficar nos extremos da fila ou entre duas bolas azuis.
Assim, é possível formar 8 sequências diferentes.

1.2. Resposta I)

Existem ${}^9C_2$ formas diferentes de selecionar dois dos nove espaços para colocar as bolas amarelas que são iguais. Para cada uma destas formas, existem ${}^7C_2$ maneiras diferentes de escolher dois dos sete espaços restantes para colocar as duas bolas com número 1 e, para cada uma destas maneiras, existem 5! formas de ordenar as restantes 5 bolas diferentes nos restantes 5 lugares.

Assim, é possível formar ${}^9C_2 \times {}^7C_2 \times 5!$ sequências diferentes com as nove bolas.

Resposta II)

Existem 9! maneiras de colocar ordenadamente as 9 bolas nos nove lugares disponíveis. No entanto, se as bolas amarelas, que são iguais, trocarem entre si, a disposição das bolas fica igual, pelo que, temos que dividir por 2! O mesmo acontece com as bolas numeradas com número 1, que também são iguais.

2. Assim, é possível formar $\frac{9!}{2! \times 2!}$ sequências diferentes com as nove bolas.

Algarismos disponíveis: 1, 1, 2, 3, 5, 8.

Se o número é par tem de terminar em 2 ou 8.

Para cada uma dessas possibilidades, temos as seguintes hipóteses:

- ou o número tem dois algarismos 1;
- ou o número tem apenas um algarismo 1;
- ou o número não tem nenhum algarismo 1.

$2 \times \left({}^3C_2 \times 3 + 3 \times {}^3A_2 + 3!\right) = 66$ números possíveis.

Trabalho de projeto

Pág. 166

1. Sabe-se que $f_{12} = 89$ e $f_{14} = 233$.

$f_{14} = f_{12} + f_{13} \Leftrightarrow f_{13} = f_{14} - f_{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f_{13} = 233 - 89 \Leftrightarrow f_{13} = 233 - 89 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f_{13} = 144$

O 13.º termo da sucessão é 144.

2.1. Recorrendo à folha de cálculo, obtêm-se os primeiros 30 termos das sucessões (f_n) e (q_n).

	A	B	C
1	n	f_n	q_n
2	1	1	1
3	2	1	1
4	3	2	2
5	4	3	1,5
6	5	5	1,666667
7	6	8	1,6
8	7	13	1,625
9	8	21	1,615385
10	9	34	1,619048
11	10	55	1,617647
12	11	89	1,618182
13	12	144	1,617978
14	13	233	1,618056
15	14	377	1,618026
16	15	610	1,618037
17	16	987	1,618033
18	17	1597	1,618034
19	18	2584	1,618034
20	19	4181	1,618034
21	20	6765	1,618034
22	21	10946	1,618034
23	22	17711	1,618034
24	23	28657	1,618034
25	24	46368	1,618034
26	25	75025	1,618034
27	26	121393	1,618034
28	27	196418	1,618034
29	28	317811	1,618034
30	29	514229	1,618034
31	30	832040	1,618034

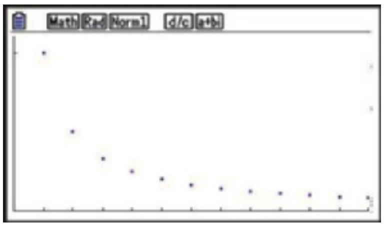
2.2.

À medida que n aumenta os termos da sucessão tendem a aproximar-se do número $1{,}618034$.
Usando o mesmo número de casas decimais, obtém-se uma aproximação do número de ouro na folha de cálculo. Numa célula, insere-se a fórmula: =(1+RAIZQ(5))/2.
Conclui-se que à medida que n aumenta, os termos da sucessão (q_n) tendem para o número de ouro.

Tarefas de aprofundamento

Pág. 168

1.1. Podemos conjeturar que (u_n) é uma sucessão decrescente.



1.2. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} =$

$= \frac{n-n-1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)}$

Como n e $n+1$ são números positivos, temos que $-\frac{1}{n(n+1)} < 0$, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Logo, (u_n) é uma sucessão monótona decrescente.

1.3.

	A	B
1	n	1/n
2	1	1
3	2	0,5
4	3	0,333333333
5	4	0,25
6	5	0,2
7	6	0,166666667
8	7	0,142857143
9	8	0,125
10	9	0,111111111
11	10	0,1
12	11	0,090909091
13	12	0,083333333
14	13	0,076923077
15	14	0,071428571
16	15	0,066666667
17	16	0,0625
18	...	...
19	100	0,01
20	101	0,00990099
21	102	0,009803922
22	...	...
23	1000	0,001
24	1001	0,000999001
25	1002	0,000998004
26	...	...
27	1000000	0,000001

2. A série diverge, embora a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n}$ seja convergente.

	A	B	C
1	n	1/n	Soma
2	1	1	1
3	2	0,5	1,5
4	3	0,333333333	1,833333333
5	4	0,25	2,083333333
6	5	0,2	2,283333333
7	6	0,166666667	2,45
8	7	0,142857143	2,592857143
9	8	0,125	2,717857143
10	9	0,111111111	2,828968254
11	10	0,1	2,928968254
12	11	0,090909091	3,019877345
13	12	0,083333333	3,103210678
14	13	0,076923077	3,180133755
15	14	0,071428571	3,251562327
16	15	0,066666667	3,318228993
17	16	0,0625	3,380728993
18	17	0,058823529	3,439552523
19	18	0,055555556	3,495108078
20	19	0,052631579	3,547739657
21	20	0,05	3,597739657
22	21	0,047619048	3,645358705
23	22	0,045454545	3,69081325
24	23	0,043478261	3,734291511
25	24	0,041666667	3,775958178
26	25	0,04	3,815958178
27	26	0,038461538	3,854419716
28	27	0,037037037	3,891456753

Pág. 169

3.1. a) $u_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25$

Com capitalizações semestrais, ao fim de um ano, o capital acumulado é $2{,}25$ €.

b) $u_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 \approx 2{,}44$

Com capitalizações trimestrais, ao fim de um ano, o capital acumulado é, aproximadamente, $2{,}44$ €.

c) $u_{12} = \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2{,}61$

Com capitalizações mensais, ao fim de um ano, o capital acumulado é, aproximadamente, $2{,}61$ €.

d) $u_{365} = \left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} \approx 2{,}71$

Com capitalizações diárias, ao fim de um ano, o capital acumulado é, aproximadamente, $2{,}71$ €.

3.2. Podemos conjeturar que nunca se obtém 3 €.