Sucessões

Vamos recordar

Ficha 29 Sequências e sucessões

pág. 70

1.1. $1 , 4 , 7 , 10 , 13 , 16 , \ldots 19 , 22 , 25 , 28 , 31$

1.2. $1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , \ldots 64 , 128 , 256 , 512 , 1024$

1.3. $1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , \ldots 13 , 21 , 34 , 55 , 89$

1.4. $1 , 2 , 4 , 7 , 11 , 16 , \ldots 22 , 29 , 37 , 46 , 56$

1.5. $1 , 1 , 2 , 6 , 24 , 120 , \ldots 720 , 5040 , 40\,320 , 362\,880$

2.1. $10 , 8 , 6 , 4 , 2$

2.2. $10 ; 1 ; 0{,}1 ; 0{,}01 ; 0{,}001$

3.1. $2 \times 1 + 5 = 7 ; \ 2 \times 2 + 5 = 9 ; \ 2 \times 3 + 5 = 11 ; \ 2 \times 4 + 5 = 13$ $7 , 9 , 11$ e 13

3.2. $2 \times 99 + 5 = 203$

3.3. $2n + 5 = 59 \Leftrightarrow 2n = 54 \Leftrightarrow n = 27$ O termo de ordem 27 .

4.1. A 6.ª figura tem $6 \times 6 = 36$ quadrados, sendo 6 pretos (na diagonal). Logo, tem $36 - 6 = 30$ quadrados brancos.

4.2. Em cada figura, o número de quadrados brancos é igual à diferença entre o número total de quadrados e o número de quadrados pretos da diagonal:

$1^2 - 1 = 0 ; \ 2^2 - 2 = 2 ; \ 3^2 - 3 = 6 ; \ 4^2 - 4 = 12 ; \ \ldots$

Uma expressão do termo geral da sequência é $n^2 - n$.

pág. 71

5.1. Em cada figura, há dois discos vermelhos e um número de discos azuis múltiplo de 3 .

Para construir a figura 8 são necessários $8 \times 3 = 24$ discos azuis.

5.2. **a)** O número total de discos em cada figura excede em 2 um múltiplo de 3 .

Como $74 - 2 = 72$ e $\frac{72}{3} = 24$, conclui-se que a figura que tem 74 discos é a figura 24.

b) Como $375 - 2 = 373$ e 373 não é múltiplo de 3 $(3 + 7 + 3 = 13)$, conclui-se que na sequência não há qualquer figura com 375 discos.

5.3. $3 , 6 , 9 , 12 , 15 , 18 , \ldots , 3n \longleftarrow$ Representa o número de discos azuis da figura n

O número de discos vermelhos é constante: 2 .

A expressão que permite calcular o número total de discos utilizados em função do número (n) da figura é $3n + 2$.

6.1. O termo geral da sequência é da forma $6n + k$, pois qualquer termo a partir do segundo obtém-se adicionando 6 ao termo anterior. Como o primeiro termo é -8 , $6 \times 1 + k = -8 \Leftrightarrow k = -14$.

Logo, o termo geral da sequência é $6n - 14$.

6.2. $6 \times 20 - 14 = 120 - 14 = 106$

O termo de ordem 20 é igual a 106 .

6.3. 724 é termo da sequência se existir uma ordem n , tal que, $6n - 14 = 724$.

$6n - 14 = 724 \Leftrightarrow 6n = 738 \Leftrightarrow n = 123$

Logo, 724 é o termo de ordem 123 .

Ficha 30 Representações de uma sucessão

pág. 72

1.1. **a)** $a_5 = \dfrac{3 \times 5 + 1}{5 + 2} = \dfrac{16}{7}$

b) $a_3 - a_2 = \dfrac{10}{5} - \dfrac{7}{4} = 2 - \dfrac{7}{4} = \dfrac{8 - 7}{4} = \dfrac{1}{4}$

c) $a_{p-1} = \dfrac{3(p-1)+1}{p-1+2} = \dfrac{3p-3+1}{p+1} = \dfrac{3p-2}{p+1}$

d) $a_{2p} = \dfrac{3 \times 2p + 1}{2p+2} = \dfrac{6p+1}{2p+2}$

e) $a_{n+1} = \dfrac{3(n+1)+1}{n+1+2} = \dfrac{3n+3+1}{n+3} = \dfrac{3n+4}{n+3}$

f) $a_n + 1 = \dfrac{3n+1}{n+2} + 1 = \dfrac{4n+3}{n+2}$

1.2. $a_n = \dfrac{14}{5} \Leftrightarrow \dfrac{3n+1}{n+2} = \dfrac{14}{5} \Leftrightarrow 5(3n+1) = 14(n+2) \Leftrightarrow 15n + 5 = 14n + 28 \Leftrightarrow n = 23 \in \mathbb{N}$

$\dfrac{14}{5}$ é o 23.º termo da sucessão.

$a_n = 2{,}54 \Leftrightarrow \dfrac{3n+1}{n+2} = 2{,}54 \Leftrightarrow 3n+1 = 2{,}54(n+2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3n+1 = 2{,}54n + 5{,}08 \Leftrightarrow 0{,}46n = 4{,}08 \Leftrightarrow n = \dfrac{408}{46} \notin \mathbb{N}$

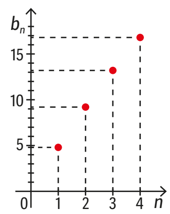
$2{,}54$ não é termo da sucessão.

2.1. $b_1 = -0{,}2 \times 1^2 + 5 \times 1 = -0{,}2 + 5 = 4{,}8$

$b_2 = -0{,}2 \times 2^2 + 5 \times 2 = -0{,}8 + 10 = 9{,}2$

$b_3 = -0{,}2 \times 3^2 + 5 \times 3 = -1{,}8 + 15 = 13{,}2$

$b_4 = -0{,}2 \times 4^2 + 5 \times 4 = -3{,}2 + 20 = 16{,}8$

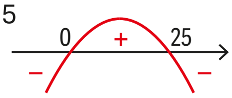


2.2. $b_n = 20 \Leftrightarrow -0{,}2n^2 + 5n = 20 \Leftrightarrow n^2 - 25n + 100 = 0 \Leftrightarrow n = 5 \vee n = 20$.

20 é 5.º e 20.º termos da sucessão.

2.3. $b_n < 0 \Leftrightarrow -0{,}2n^2 + 5n < 0$

$-0{,}2n^2 + 5n = 0 \Leftrightarrow n(-0{,}2n + 5) = 0 \Leftrightarrow n = 0 \vee -0{,}2n + 5 = 0 \Leftrightarrow n = 0 \vee n = 25$



Como $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $b_n < 0 \Leftrightarrow n > 25$. Logo, os termos da sucessão são negativos a partir do termo de ordem 26.

3.1. $u_1 = -3$

$u_2 = u_1 + 2 = -3 + 2 = -1$

$u_3 = u_2 + 2 = -1 + 2 = 1$

$u_4 = u_3 + 2 = 1 + 2 = 3$

$u_5 = u_4 + 2 = 3 + 2 = 5$

3.2. $v_1 = -1$

$v_2 = 1$

$v_3 = v_1 + v_2 = -1 + 1 = 0$

$v_4 = v_2 + v_3 = 1 + 0 = 1$

$v_5 = v_3 + v_4 = 0 + 1 = 1$

3.3. $w_1 = 20$; $w_2 = \dfrac{w_1}{2} = \dfrac{20}{2} = 10$

$w_3 = \dfrac{w_2}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$

$w_4 = \dfrac{w_3}{2} = \dfrac{5}{2}$

$w_5 = \dfrac{w_4}{2} = \dfrac{5}{4}$

pág. 73

4.1. $a_1 = 3$; $a_2 = 2 - \dfrac{1}{a_1} = 2 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{3}$; $a_3 = 2 - \dfrac{1}{a_2} = 2 - \dfrac{3}{5} = \dfrac{7}{5}$; $a_4 = 2 - \dfrac{1}{a_3} = 2 - \dfrac{5}{7} = \dfrac{9}{7}$

4.2. Os quatro primeiros termos da sucessão são: $\dfrac{3}{1}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{7}{5}$ e $\dfrac{9}{7}$.

Como $3, 5, 7, 9, \ldots, 2n+1$ e $1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1$, vem $a_n = \dfrac{2n+1}{2n-1}$.

5.1. O primeiro termo da sucessão é -5 e qualquer termo a partir do segundo é igual à soma de 4 com o termo anterior. A sucessão pode ser definida por recorrência por $\begin{cases} u_1 = -5 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$, para todo $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ e pelo termo geral $u_n = 4n - 9$.

5.2. O primeiro termo da sucessão é 1 e cada um dos termos seguintes obtém-se multiplicando o anterior por 2.

(u_n) pode ser definida por recorrência por $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$, para todo $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

e pelo termo geral $u_n = 2^{n-1}$.

6.1. $u_1 = 1$; $u_2 = 2u_1 + 3 = 2 \times 1 + 3 = 5$; $u_3 = 2u_2 + 3 = 2 \times 5 + 3 = 13$; $u_4 = 2u_3 + 3 = 2 \times 13 + 3 = 29$

6.2. $u_{11} = 2u_{10} + 3 = 4093$; $u_{12} = 2u_{11} + 3 = 8189$

7. $u_1 = -2$; $u_2 = 3u_1 + 4 = 3 \times (-2) + 4 = -2$; $u_3 = 3u_2 + 4 = 3 \times (-2) + 4 = -2$

A sucessão (u_n) é constante, sendo $u_n = -2$ o termo geral.

Ficha 31 Variação de uma sucessão

pág. 74

1.1. $u_{n+1} - u_n = \frac{5-(n+1)}{3} - \frac{5-n}{3} = \frac{5-n-1-5+n}{3} = -\frac{1}{3} < 0$, para todo $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$; (u_n) é decrescente.

1.2. $u_{n+1} - u_n = \frac{4(n+1)+1}{n+1+4} - \frac{4n+1}{n+4} = \frac{(4n+5)(n+4)-(4n+1)(n+5)}{(n+5)(n+4)} =$

$= \frac{15}{(n+5)(n+4)} > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$; (u_n) é crescente.

1.3. $u_{n+1} - u_n = \frac{3(n+1)}{3(n+1)-1} - \frac{3n}{3n-1} = \frac{(3n+3)(3n-1)-3n(3n+2)}{(3n+2)(3n-1)} =$

$= \frac{-3}{(3n+2)(3n-1)} < 0$, para todo $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$; (u_n) é decrescente.

1.4. $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n = 2 \times 2^n - 2^n = 2^n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$; (u_n) é crescente.

1.5. $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n < 0$, para todo $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$; (u_n) é decrescente.

1.6. $u_1 = \frac{1}{1} = 1$, $u_2 = 2$ e $u_3 = \frac{5}{3}$

Como $u_2 > u_1$ e $u_3 < u_2$, (u_n) é não monótona.

1.7. Se $n < 10$, (u_n) é constante. Se $n \geqslant 10$, (u_n) é crescente $(u_{n+1} - u_n = 1)$

Como $u_9 = 2$ e $u_{10} = 2$, então (u_n) é crescente em sentido lato.

1.8. Como $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = -1$, $u_2 > u_1$ e $u_3 < u_2$, então (u_n) é não monótona.

1.9. $u_5 = -5 + 5 = 0$, $u_6 = \frac{1}{6}$ e $u_7 = \frac{1}{7}$. Como $u_6 > u_5$ e $u_7 < u_6$, então (u_n) é não monótona.

1.10. $u_n = n^2 - 8n = n(n-8)$

$u_3 = -15$; $u_4 = -16$; $u_5 = -15$

Como $u_4 < u_3$ e $u_5 > u_4$, (u_n) não é monótona.

pág. 75

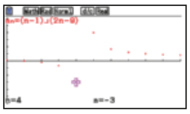
2.1. $a_{n+1} - a_n = \frac{-5(n+1)-2}{n+1+1} - \frac{-5n-2}{n+1} = \frac{-5n-7}{n+2} - \frac{-5n-2}{n+1} = \frac{-3}{(n+2)(n+1)} < 0$, para todo $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Logo, (a_n) é decrescente.

2.2. $a_n = -4{,}7 \iff \dfrac{-5n-2}{n+1} = -4{,}7 \iff -5n-2 = -4{,}7n - 4{,}7 \iff -0{,}3n = -2{,}7 \iff n = 9$;
$-4{,}7$ é o 9.º termo de (a_n).

2.3. $a_n > -4{,}8 \iff \dfrac{-5n-2}{n+1} > -4{,}8 \iff -5n-2 > -4{,}8n - 4{,}8 \iff -0{,}2n > -2{,}8 \iff n < 14$
A sucessão tem 13 termos superiores a $-4{,}8$.

3. $u_4 = -3$; $u_5 = 4$; $u_6 = \dfrac{5}{3}$
Como $u_5 > u_4$ e $u_6 < u_5$, (u_n) não é monótona.



4.1. $n^2 - 7n + 10 = 0 \iff n = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} \iff n = 5 \vee n = 2$
Em $\mathbb{R}$, a função f definida por $f(x) = x^2 - 7x + 10$ é negativa em $]2, 5[$ e positiva em $]-\infty, 2[\,\cup\,]5, +\infty[$, pelo que $u_{n+1} - u_n < 0 \iff n \in \{3, 4\}$ e $u_{n+1} - u_n > 0 \iff n = 1 \vee n > 5$.
Portanto, a sucessão não é monótona.

4.2. $-n^2 - 2n + 3 = 0 \iff n = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} \iff n = -3 \vee n = 1$
Em $\mathbb{R}$, a função f definida por $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ é positiva em $]-3, 1[$ e negativa em $]-\infty, -3[\,\cup\,]1, +\infty[$, pelo que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, para todo $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Portanto, a sucessão é decrescente em sentido lato.

5. $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1 \iff u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 1$
Como, para todo $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $u_n^2 + 1 > 0$, vem que $u_{n+1} - u_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.
Logo, (u_n) é crescente.

Ficha 32 Progressões aritméticas

pág. 76

1.1. $-3, -1, 1, 3, \ldots$ $-1-(-3) = 1-(-1) = 3-1 = 2$; Progressão aritmética de razão 2.

1.2. $1, 3, 6, 10, \ldots$ $3 - 1 \neq 6 - 3$; Não é uma progressão aritmética.

1.3. $2, \dfrac{3}{2}, 1, \dfrac{1}{2}, \ldots$ $\dfrac{3}{2} - 2 = 1 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2}$; Progressão aritmética de razão $-\dfrac{1}{2}$.

2.1. $u_{n+1} - u_n = 3 - 2(n+1) - (3-2n) = 3 - 2n - 2 - 3 + 2n = -2$;
(u_n) é uma progressão aritmética de razão -2.

2.2. $v_{n+1} - v_n = \dfrac{5(n+1)}{3} + 4 - \left(\dfrac{5n}{3} + 4\right) = \dfrac{5n+5}{3} + 4 - \dfrac{5n}{3} - 4 = \dfrac{5}{3}$;
(v_n) é uma progressão aritmética de razão $\dfrac{5}{3}$

2.3. $w_1 = 5$; $w_2 = 4$; $w_3 = \dfrac{11}{3}$.
Como $w_2 - w_1 \neq w_3 - w_2$, (w_n) não é uma progressão aritmética.

3.1. $0, 2, 4$ e 6; $u_n = 0 + (n-1) \times 2 = 2n - 2$; $u_1 = 0 \wedge u_{n+1} = u_n + 2$

3.2. $u_6 = u_1 + 5r \iff 16 = 1 + 5r \iff r = 3$; $1, 4, 7$ e 10; $u_n = 3n - 2$; $u_1 = 1 \wedge u_{n+1} = u_n + 3$

3.3. $u_5 = u_1 + 4r \wedge u_{20} = u_1 + 19r \iff 30 = u_1 + 4r \wedge 45 = u_1 + 19r \iff r = 1 \wedge u_1 = 26$
$26, 27, 28,$ e 29; $u_n = n + 25$; $u_1 = 26 \wedge u_{n+1} = u_n + 1$

3.4. $u_8 = u_1 + 7r \wedge u_{12} = u_1 + 11r \iff 10 = u_1 + 7r \wedge -2 = u_1 + 11r \iff r = -3 \wedge u_1 = 31$
$31, 28, 25$ e 22; $u_n = 34 - 3n$; $u_1 = 31 \wedge u_{n+1} = u_n - 3$

4.1. $u_4 = u_1 + 3r \wedge u_7 = u_1 + 6r \Leftrightarrow 8 = u_1 + 3r \wedge 10 = u_1 + 6r \Leftrightarrow u_1 = 6 \wedge r = \frac{2}{3}$

$u_{12} = u_1 + 11 \times r = 6 + 11 \times \frac{2}{3} = \frac{40}{3}$

4.2. $u_3 = u_1 + 2r \wedge u_6 = u_1 + 5r \Leftrightarrow 2 = u_1 + 2r \wedge -4 = u_1 + 5r \Leftrightarrow u_1 = 6 \wedge r = -2$

$u_{12} = u_1 + 11r = 6 + 11 \times (-2) = -16$

5. $u_{n+1} - u_{n-1} = 5 \Leftrightarrow u_n + r - (u_n - r) = 5 \Leftrightarrow 2r = 5 \Leftrightarrow r = \frac{5}{2}$

6. $u_3 = u_1 + 2r \wedge u_7 = u_1 + 6r \Leftrightarrow 14 = u_1 + 2r \wedge 30 = u_1 + 6r \Leftrightarrow r = 4 \wedge u_1 = 6$

7.1. (u_n) é uma progressão aritmética de razão 5.

$u_n = u_1 + (n-1)r = -3 + (n-1) \times 5 = 5n - 8$

7.2. $u_{10} - u_{30} = 5 \times 10 - 8 - (5 \times 30 - 8) = 42 - 142 = -100$

8.1. **a)** $u_3 = u_1 + 2r \Leftrightarrow 15 = u_1 + 8 \Leftrightarrow u_1 = 7$

$u_8 = u_1 + 7r = 7 + 7 \times 4 = 35$

b) $u_{k-1} = u_1 + (k - 1 - 1)r = 7 + (k - 12) \times 4 = 4k - 1$

8.2. $u_n = u_1 + (n-1)r = 7 + (n-1) \times 4 = 4n + 3$

$4n + 3 = 139 \Leftrightarrow 4n = 136 \Leftrightarrow n = 34$ 139 é o 34.º termo da sucessão.

$4n + 3 = 150 \Leftrightarrow 4n = 147 \Leftrightarrow n = \frac{147}{4} \notin \mathbb{N} \backslash \{0\}$ 150 não é termo da sucessão.

9. $n^2 - (n-3) = n + 7 - n^2 \Leftrightarrow n^2 - n + 3 = n + 7 - n^2 \Leftrightarrow 2n^2 - 2n - 4 = 0 \underset{n \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} n = 2$

Os termos pedidos são -1, 4 e 9.

10. $a_4 = 2 \wedge a_{11} = 2a_8 \Leftrightarrow a_1 + 3r = 2 \wedge a_1 + 10r = 2(a_1 + 7r) \Leftrightarrow r = -2 \wedge a_1 = 8$

$a_n = -30 \Leftrightarrow a_1 + (n-1)r = -30 \Leftrightarrow 8 + (n-1) \times (-2) = -30 \Leftrightarrow n = 20$

Logo, -30 é o 20.º termo da progressão aritmética.

11. Os tempos de treino de cada semana correspondem a uma progressão aritmética de razão $r = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$.

$u_{28} \leqslant 8 \Leftrightarrow u_1 + 27r \leqslant 8 \Leftrightarrow u_1 + 27 \times \frac{1}{5} \leqslant 8 \Leftrightarrow u_1 \leqslant 8 - \frac{27}{5} \Leftrightarrow u_1 \leqslant \frac{13}{5} \Leftrightarrow u_1 \leqslant 2{,}6$; $2{,}6$ h $= 2$ h 36 min $(0{,}6 \times 60 = 36)$ Logo, a duração do treino da primeira semana não pode ser superior a 2 horas e 36 minutos.

Ficha 33 Progressões geométricas

1.1. $2, 8, 32, 128, \ldots$	$\frac{8}{2} = \frac{32}{8} = \frac{128}{32} = 4$	Progressão geométrica de razão 4.
1.2. $-1, 3, -9, 12, \ldots$	$\frac{3}{-1} = \frac{-9}{3} \neq \frac{12}{-9}$	Não é uma progressão geométrica.
1.3. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \ldots$	$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{27}}{\frac{2}{9}} = \frac{2}{3}$	Progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$.
1.4. $1, \sqrt{2}, 2, \sqrt{8}, \ldots$	$\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$	Progressão geométrica de razão $\sqrt{2}$.

2.1. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\frac{4^{n+1}}{3}}{\frac{4^n}{3}}=\dfrac{4^{n+1}}{4^n}=4$ (constante) $\quad (u_n)$ é uma progressão geométrica de razão 4 .

2.2. $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{\frac{3^{n+1}}{5^{n+2}}}{\frac{3^n}{5^{n+1}}}=\dfrac{3^{n+1}\times 5^{n+1}}{3^n\times 5^{n+2}}=\dfrac{3}{5}$ (constante) $\quad (v_n)$ é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{3}{5}$.

2.3. $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}=\dfrac{(n+1)\times 3^{n+1}}{n\times 3^n}=\dfrac{3(n+1)}{n}$ (não é constante) (w_n) não é uma progressão geométrica.

3.1. $u_2=\dfrac{9}{3}=3$, $u_3=\dfrac{3}{3}=1$ e $u_4=\dfrac{1}{3}$. Logo, $u_4=\dfrac{1}{3}$

3.2. $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{3} \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1}{3}$, para todo $n\in \mathbb{N}\setminus\{0\}$; Logo, (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{3}$.

$u_n=u_1\times r^{n-1}=9\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=3^2\times 3^{1-n}=3^{3-n}$

4.1. $u_1=u_2 : r=\dfrac{1}{8}:2=\dfrac{1}{16}$; $u_5=u_1\times r^4=\dfrac{1}{6}\times 2^4=1$

4.2. $u_3=u_1\times r^2 \Leftrightarrow 0{,}02=2\times r^2 \Leftrightarrow r^2=0{,}01$. Logo, $u_5=u_1\times r^4=2\times(0{,}01)^2=0{,}0002$

5. $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{x} \Leftrightarrow x^2=3y$ e $y-(x-3)=3-y \Leftrightarrow x=2y$. Logo, $(2y)^2=3y \Leftrightarrow 4y^2-3y=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y(4y-3)=0 \Leftrightarrow y=0 \vee y=\dfrac{3}{4}$. Como $x\neq 0$ e $y\neq 0$, $y=\dfrac{3}{4}$ e $x=2\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2}$.

---

6. $a_3=a_1\times r^2 \wedge a_5=a_1\times r^4 \Leftrightarrow 4=a_1\times r^2 \wedge 1=a_1\times r^4 \Leftrightarrow \dfrac{a_1\times r^4}{a_1\times r^2}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow r^2=\dfrac{1}{4}$.

Sendo (a_n) não monótona, $r=-\dfrac{1}{2}$ e, como $4=a_1\times r^2$, vem $a_1=\dfrac{4}{r^2}=16$. Logo, $a_n=16\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

7.1. **a)** $u_4=u_1\times r^3 \Leftrightarrow 81=u_1\times 3^3 \Leftrightarrow u_1=3$

b) $u_{k-2}=u_1\times r^{k-2-1}=3\times 3^{k-3}=3^{k-2}$

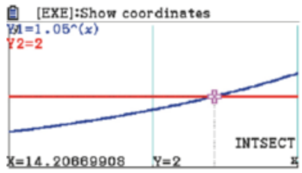
7.2. $u_n=u_1\times r^{n-1}=3\times 3^{n-1}=3^n$; $u_n=729 \Leftrightarrow 3^n=729 \Leftrightarrow 3^n=3^6 \Leftrightarrow n=6$; 729 é o 6.º termo de (u_n) .

8.1. Crescente **8.2.** Decrescente **8.3.** Crescente **8.4.** Decrescente

9.1. O investimento cresce 5% do seu valor a cada ano. Isso significa que, após cada ano, o valor é $105\%=\dfrac{105}{100}=1{,}05$ do valor acumulado no ano anterior. Trata-se, portanto, de uma progressão geométrica de razão $1{,}05$. O valor acumulado passado um ano é $1{,}05\times v_0$, pelo que o primeiro termo da progressão geométrica é $v_1=1{,}05\times v_0$.
Assim, $v_n=v_1\times r^{n-1}=1{,}05\times v_0\times(1{,}05)^{n-1}=v_0\times(1{,}05)^n$

9.2. Pretende-se determinar n tal que $v_n=2\times v_0 \Leftrightarrow v_0\times(1{,}05)^n=2\times v_0 \Leftrightarrow (1{,}05)^n=2$.

Fazendo $y1=(1{,}05)^x$ e $y2=2$ verificou-se que os gráficos de $y1$ e $y2$ se intersetam no ponto de abcissa $14{,}2$, aproximadamente. Conclui-se daqui que o valor acumulado duplica no 15.º ano.



10. $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{3^{2u_{n+1}}}{3^{2u_n}}=\dfrac{3^{2(u_n+2)}}{3^{2u_n}}=3^{2(u_n+2)-2u_n}=3^{2u_n+4-2u_n}=3^4=81$.

Como, para todo $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=81$, então (v_n) é uma progressão geométrica de razão 81 .

11. $u_{10} = 9u_{12} \Leftrightarrow u_1 \times r^9 = 9u_1 \times r^{11} \Leftrightarrow \frac{u_1 \times r^{11}}{u_1 \times r^9} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow r^2 = \frac{1}{9}$. Como $r > 0$, vem $r = \frac{1}{3}$.

$u_3 = u_1 \times r^2 \Leftrightarrow 1 = u_1 \times \frac{1}{9} \Leftrightarrow u_1 = 9$. Temos, assim, $u_n = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3^2 \times 3^{-n+1} = 3^{3-n}$.

Ficha 34 Soma de termos de uma progressão

1.1. $u_{15} = -51 \wedge u_{30} = -111 \Leftrightarrow u_1 + 14r = -51 \wedge u_1 + 29r = -111 \Leftrightarrow r = -4 \wedge u_1 = 5$

$u_n = u_1 + (n-1)r \Leftrightarrow u_n = 5 + (n-1) \times (-4) \Leftrightarrow u_n = -4n + 9$

1.2. $u_1 = -4 \times 1 + 9 = 5$; $u_{35} = -4 \times 35 + 9 = -131$

$s_{35} = \frac{u_1 + u_{35}}{2} \times 35 = \frac{5 + (-131)}{2} \times 35 = \frac{-126}{2} \times 35 = -2205$

1.3. $S = u_{10} + u_{11} + \ldots + u_{35} = s_{35} - s_9$; $u_9 = -4 \times 9 + 9 = -27$

$s_{35} = -2205$, $s_9 = \frac{u_1 + u_9}{2} \times 9 = \frac{5 + (-27)}{2} \times 9 = \frac{-22}{2} \times 9 = -99$.

Logo, a soma pedida é igual a $S = -2205 - (-99) = -2106$.

2.1. $v_9 = v_1 \times r^8 \wedge v_{11} = v_1 \times r^{10} \Leftrightarrow 9 = v_1 \times r^8 \wedge 1 = v_1 \times r^{10} \Leftrightarrow \frac{v_1 \times r^{10}}{v_1 \times r^8} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow r^2 = \frac{1}{9}$

Sendo (v_n) monótona, $r = \frac{1}{3}$ e, como $9 = v_1 \times r^8$, vem $v_1 = \frac{9}{r^8} = 9 \times 3^8 = 3^{10}$.

Logo, $v_n = 3^{10} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3^{11-n}$.

2.2. $s_{11} = v_1 \times \frac{1 - r^{11}}{1 - r} = 3^{10} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{3}} = 88\,573$

2.3. $S = v_{12} + v_{13} + v_{14} + v_{15} + v_{16} = S_{16} - S_{11} = 3^{10} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{16}}{1 - \frac{1}{3}} - 88\,573 = \frac{121}{243}$

3.1. $u_{n+1} - u_n = \frac{3 - 6(n+1)}{2} - \frac{3 - 6n}{2} = -3$, (u_n) é uma progressão aritmética de razão -3.

3.2. $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3 \times 2^{1-(n+1)}}{3 \times 2^{1-n}} = \frac{2^{-n}}{2^{1-n}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$. (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

3.3. $S = u_{15} + u_{16} + \ldots + u_{54} = \frac{u_{15} + u_{54}}{2} \times 40 = \frac{-43{,}5 - 160{,}5}{2} \times 40 = -4080$ $(15 + 40 - 1 = 54)$

3.4. $v_8 = 3 \times 2^{1-8} = \frac{3}{2^7}$; $S = v_8 \times \frac{1 - r^6}{1 - r} = \frac{3}{2^7} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{189}{4096}$

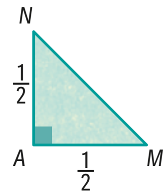
4. $u_6 = 2u_2 \Leftrightarrow u_1 + 5r = 2(u_1 + r) \Leftrightarrow u_1 + 5r = 2u_1 + 2r \Leftrightarrow u_1 = 3r$

$S_{10} = 25 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{10}}{2} \times 10 = 25 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + 9r = 5 \Leftrightarrow 3r + 3r + 9r = 5 \Leftrightarrow r = \frac{1}{3}$ e, portanto,

$u_1 = 3 \times \frac{1}{3} = 1$.

$u_k = 110 \Leftrightarrow u_1 + (k-1)r = 110 \Leftrightarrow 1 + (k-1) \times \frac{1}{3} = 110 \Leftrightarrow k = 328$

5. O perímetro do primeiro quadrado, $[ABCD]$, é $P_1 = 4$.
O lado do segundo quadrado, $[MN]$, como se pode observar no esquema ao lado, é tal que
$\overline{MN} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Portanto, $P_2 = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.
De forma análoga, obter-se-ia a medida do perímetro do terceiro quadrado: $P_3 = 2$ e poderíamos concluir que o perímetro de cada quadrado é igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ do perímetro do quadrado anterior:
$P_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} P_n$.



Portanto, a sucessão dos perímetros dos quadrados é uma progressão geométrica de razão $\frac{\sqrt{2}}{2}$, cujo primeiro termo é 4.
$P_n = P_1 \times r^{n-1} = 4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$; $P_{11} = 4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10} = 4 \times \frac{1}{32} = \frac{1}{8}$
Logo, o 11.º quadrado da sequência tem perímetro igual a $\frac{1}{8}$.

6. Os termos de ordem par da sucessão (u_n) são aqueles cuja ordem é da forma $2k$ $(k \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$, sendo $v_k = u_{2k} = 3 \times 2k - 2 = 6k - 2$.
$v_1 = 6 \times 1 - 2 = 4$; $v_{100} = 6 \times 100 - 2 = 598$; $S_{100} = \frac{v_1 + v_{100}}{2} \times 100 = \frac{4 + 598}{2} \times 100 = 602 \times 50 = 30\,100$

7. $\frac{u_6}{u_4} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{u_1 \times r^5}{u_1 \times r^3} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow r^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow r = \pm\frac{3}{2}$. Como a sucessão não é monótona, $r < 0$ e, portanto, $r = -\frac{3}{2}$.
$u_4 = u_1 \times r^3 \Leftrightarrow 4 = u_1 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^3 \Leftrightarrow u_1 = -\frac{32}{27}$; $S_{10} = u_1 \times \frac{1 - r^{10}}{1 - r} = -\frac{32}{27} \times \frac{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)^{10}}{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{11\,605}{432}$

Avaliação global do tema

Ficha 35

pág. 82

1. **(B)** -31
$v_1 = -3$; $v_2 = 2v_1 - 1 = 2 \times (-3) - 1 = -7$; $v_3 = 2 \times (-7) - 1 = -15$; $v_4 = 2 \times (-15) - 1 = -31$

2. **(D)** $u_n = n^2 - n$
(A) Por exemplo: $u_4 = 1$; $u_5 = 0$; $u_6 = 1$. $u_5 < u_4$ e $u_6 > u_5$. Logo, (u_n) não é monótona.
(B) Como se trata de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$ e com o primeiro termo positivo, (u_n) é decrescente.
(C) $u_3 = 2$ e $u_4 = -2$ Logo, (u_n) não é crescente.
(D) Para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - \left(n^2 - n\right) = 2n > 0$. Logo, (u_n) é crescente.

3. **(B)** 5
$u_{64} + u_{170} = 10 \Leftrightarrow u_1 + 63r + u_1 + 169r = 10 \Leftrightarrow 2u_1 + 232r = 10 \Leftrightarrow u_1 + 116r = 5 \Leftrightarrow u_{117} = 5$

4. **(A)** 10
$\frac{w_7}{w_4} = \frac{40}{5} \Leftrightarrow \frac{w_1 \times r^6}{w_1 \times r^3} = 8 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = 2$ Portanto, $w_5 = 5 \times 2 = 10$.

5. **(D)** 797 040
Pretende-se calcular a soma $3^5 + 3^6 + 3^7 + \ldots + 3^{12}$, ou seja, a soma de oito termos consecutivos da progressão geométrica definida por $u_n = 3^n$ a partir do 5.º termo
$S = u_5 \times \frac{1 - r^8}{1 - r} = 3^5 \times \frac{1 - 3^8}{1 - 3} = 797\,040$.

6.1. $a_n = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3n-2}{n+1} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 6n-4 = -n-1 \Leftrightarrow 7n = 3 \Leftrightarrow n = \frac{3}{7}$

Como $\frac{3}{7} \notin \mathbb{N}$, então $-\frac{1}{2}$ não é termo da sucessão (a_n).

6.2. $a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)-2}{n+1+1} - \frac{3n-2}{n+1} = \frac{3n+1}{n+2} - \frac{3n-2}{n+1} = \frac{5}{(n+2)(n+1)} > 0$, para todo $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$

Logo, (a_n) é crescente.

pág. 83

6.3. $a_n < 2{,}9 \Leftrightarrow \frac{3n-2}{n+1} < 2{,}9 \Leftrightarrow 3n-2 < 2{,}9n + 2{,}9 \Leftrightarrow 0{,}1n < 4{,}9 \Leftrightarrow n < 49$

Na sucessão (a_n) há 48 termos inferiores a $2{,}9$.

7.1. $x + 18 - x^2 = x^2 - (x+6) \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -3$

Se $x = 4$, os termos seriam 10, 16 e 22. Se $x = -3$, os termos seriam 3, 9 e 15.

Para $x = -3$, o 4.º termo não poderia ser igual a 4. Logo, os termos pedidos são: 10, 16 e 22.

7.2. $r = 16 - 10 = 22 - 16 = 6$; $u_4 = 4 \Leftrightarrow u_1 + 3r = 4 \Leftrightarrow u_1 + 18 = 4 \Leftrightarrow u_1 = -14$

$u_n = -14 + (n-1) \times 6 = 6n - 20$

7.3. $u_{100} = 6 \times 100 - 20 = 580$; $u_{199} = 6 \times 199 - 20 = 1174$

$u_{100} + u_{101} + \ldots + u_{199} = \frac{u_{100} + u_{199}}{2} \times 100 = (580 + 1174) \times 50 = 87\,700$

8. $v_n = -1 \Leftrightarrow 1 - 2\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 2 + 8k,\ k \in \mathbb{Z}$

Como $n \in \mathbb{N}$, então $n = 2 + 8k$, $k \in \mathbb{N}$, ou seja, a sucessão tem uma infinidade de termos iguais a -1.

9. Seja (g_n) e (a_n) as sucessões que representam os valores em carteira nos fundos de investimento *GEO* e *ARIT*, respetivamente. O valor no fundo *GEO* aumenta, anualmente, em progressão geométrica $(g_n = 3000 \times 1{,}05^n)$ e o investimento no fundo *ARIT* aumenta em progressão aritmética $(a_n = 200n + 3000)$. Na calculadora gráfica, considerando $y_1 = 3000 \times 1{,}05^x$ e $y_2 = 200x + 3000$, verifica-se que o gráfico de y_1 fica acima do gráfico de y_2, para $x > 12{,}9$ (aprox.).

Logo, o investimento no fundo *GEO* supera o investimento no fundo *ARIT* passados 13 anos.