Funções

MMA12CAD © Porto Editora

Vamos recordar

Ficha 1

pág. 8

1. $a=5 \wedge c=-2$, logo $f(x)=5+\frac{b}{x+2}$.

Como $(0,\ 3)$ pertence ao gráfico da função f, então $f(0)=3$ e

$5+\frac{b}{0+2}=3 \iff \frac{b}{2}=-2 \iff b=-4$, logo, $f(x)=5-\frac{4}{x+2}$.

2. Por exemplo, considerando $x_1<c<x_2$, tem-se que $f(x_1)<f(x_2)$, logo f não pode ser decrescente em $\mathbb{R}\setminus\{c\}$.

f é decrescente em $]-\infty,\ c[$ e em $]c,\ +\infty[$.

3. $f(x)=\frac{120x+18\,000}{x+300}=120-\frac{18\,000}{x+300}$

$$\begin{array}{r|l} 120x+18\,000 & x+300 \\ \hline -120x-36\,000 & 120 \\ \hline -18\,000 & \end{array}$$

Como $y=120$ é a equação da assíntota horizontal ao gráfico de A, tem-se que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=120$.

Atendendo ao contexto do problema, isso significa que, quando o número de visitantes aumenta muito, o consumo médio diário de água por visitante tende a aproximar-se de 120 litros.

pág. 9

4.1. $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}=2+\frac{3}{x-1}$

$$\begin{array}{r|l} 2x+1 & x-1 \\ \hline -2x+2 & 2 \\ \hline 3 & \end{array}$$

4.2. **a)** $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x-1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$x-1=0 \iff x=1$

b) $x=1$ é a equação da assíntota vertical ao gráfico de f;

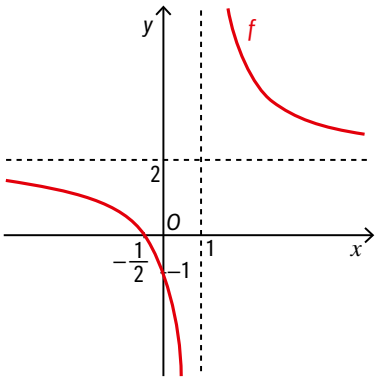
$y=2$ é a equação da assíntota horizontal ao gráfico de f.

c) Eixo Ox: $f(x)=0 \iff \frac{2x+1}{x-1}=0 \iff 2x+1=0 \wedge x\neq 1 \iff x=-\frac{1}{2} \to \left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$

Eixo Oy: $f(0)=\frac{2\times 0+1}{0-1}=-1 \to (0,\ -1)$

4.3. O zero de f é $-\frac{1}{2}$.

4.4.



4.5. $D_f'=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

4.6. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=-1$

MMA12CAD © Porto Editora

4.7. f é estritamente decrescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$.

4.8.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
f	+	0	−	N.D.	+

f é positiva em $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup]1, +\infty[$ e é negativa em $\left]-\frac{1}{2}, 1\right[$.

Ficha 2 Continuidade de uma função

pág. 10

1.1. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

1.2. **a)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1$

c) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 5$

d) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = 2^2 - 1 = 3$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x - 1) = 2 \times 2 - 1 = 3$

Como $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ e é igual a 3.

3.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + 2g(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + 2 \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \frac{1}{+\infty} + 2 \times (-1) = 0 - 2 = -2$

3.2. $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{g(x)}{(2-2x) f(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)}{-\lim\limits_{x \to 1^+} (2x-2) \frac{1}{2x-2}} = \frac{+\infty}{-1} = -\infty$

pág. 11

4.1.
- $f(2) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3 \times 2 - 1 = 5$
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5$
- Como $f(2) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, f é contínua em $x = 2$.

4.2.
- $f(0) = 2$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + 1) = 0^2 + 1 = 1$
- Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq f(0)$, f não é contínua em $x = 0$.

5.1.
- $g(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = 1^2 - 4 = -3$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (kx - 2) = k - 2$
- Para g ser contínua em $x = 1$, quer-se que $k - 2 = -3 \Leftrightarrow k = -1$.

5.2.
- $g(k) = \lim\limits_{x \to k^+} g(x) = \lim\limits_{x \to k^+} (x^2 - x + 3) = k^2 - k + 3$
- $\lim\limits_{x \to k^-} g(x) = \lim\limits_{x \to k^-} (x^2 - 1) = k^2 - 1$
- Para g ser contínua em $x = k$, quer-se que $k^2 - k + 3 = k^2 - 1 \Leftrightarrow k = 4$.

6. $-1 \notin D_f$, o que exclui a opção **(A)**. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x = 1$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} [\cos(x-1) - 1] = \cos(0) - 1 = 0$.

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, f não é contínua em $x = 1$, o que exclui as opções **(C)** e **(D)**.

Como f é contínua em todos os pontos de $]-\infty, -1[$, a opção correta é a **(B)**.

MMA12CAD © Porto Editora

Ficha 3 Operações com funções contínuas e função composta

pág. 12

1.
- Em $]-\infty, 0[$, a função f é contínua por ser, neste intervalo, definida por uma função racional e $x - 1 \neq 0$ para todo $x < 0$.
- Em $]0, +\infty[$, a função f é contínua por ser, neste intervalo, definida por uma função polinomial.
- Em $x = 0$:
  - $f(0) = -2$
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} (3x - 2) = 3 \times 0 - 2 = -2$
  - $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \dfrac{0+2}{0-1} = -2$

Como $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, f é contínua em $x = 0$.

Logo, f é contínua.

2.
- Em $]-\infty, 2[$ e em $]2, +\infty[$, a função f é contínua por ser, nestes intervalos, definida por uma função racional e $x - 2 \neq 0$ para todo $x \neq 2$.
- Em $x = 2$:
  - $f(2) = a$
  - $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$
  - Para que f seja contínua:
    $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

Então, $a = 4$.

3. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$x - 2 = 0 \iff x = 2$

$D_g = \mathbb{R}$

$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$

$g(x) = 2 \iff x^2 - 3x + 2 = 2 \iff x^2 - 3x = 0 \iff x(x-3) = 0 \iff x = 0 \vee x = 3$

$D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$

Logo, a função $f \circ g$ não está definida para $x \in \{1, 3\}$.

pág. 13

4.1. $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(3 \times 0 + 2) = f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$

$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(2 \times 0 + 1) = g(1) = 3 \times 1 + 2 = 5$

4.2. Como as funções f e g são polinomiais, $D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2) = 2(3x + 2) + 1 = 6x + 4 + 1 = 6x + 5$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = 3(2x + 1) + 2 = 6x + 3 + 2 = 6x + 5$

Assim, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e, como também $D_{f \circ g} = D_{g \circ f}$, as funções f e g são assim permutáveis.

MMA12CAD © Porto Editora

5.1. $g(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$

Para que g seja contínua em $x=1$, f terá de ser contínua em $x=1$ e em $x=f(1)=2$.

- Em $x=1$:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}+1\right)=2=f(1)$

f é contínua em $x=1$.

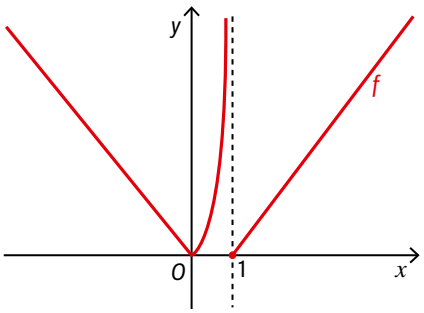
- Em $x=2$, f é contínua por ser aí definida por uma função racional e $x\neq 0$.

Logo, g é contínua em $x=1$.

5.2. $f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x+1-2}{x-1}=1$ e $f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}+1-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1}=-\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}=-1$

Logo, f não é derivável em $x=1$.

6.1. Por exemplo:



6.2. Como a função f não é contínua em $x=1$, então não é derivável nesse ponto.

Ficha 4 Derivadas

pág. 14

1.1. $f'(x)=\left(\sqrt{x^2-1}\right)'=\left[(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right]'=\frac{1}{2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}-1}(x^2-1)'=\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\times 2x=\frac{2x}{2(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

1.2. $f'(x)=\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)'=\left[(2x+1)^{\frac{1}{3}}\right]'=\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{1}{3}-1}\times(2x+1)'=\frac{1}{3}(2x+1)^{-\frac{2}{3}}\times 2=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$

1.3. $f'(x)=[\sin(2x-3)]'=(2x-3)'\cos(2x-3)=2\cos(2x-3)$

1.4. $f'(x)=[\cos(x^2)]'=-(x^2)'\sin(x^2)=-2x\sin(x^2)$

1.5. $f'(x)=[\tan(\sqrt{x})]'=\frac{(\sqrt{x})'}{\cos^2(\sqrt{x})}=\frac{\left[x^{\frac{1}{2}}\right]'}{\cos^2(\sqrt{x})}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos^2(\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2(\sqrt{x})}$

1.6. $f'(x)=[\sin^2(x)]'=2\sin^{2-1}(x)\times[\sin(x)]'=2\sin(x)\cos(x)$

2. $f'(x)=\left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]'=\frac{2\cos(2x)}{2}=\cos(2x)$

Como $f'(0)=\cos(2\times 0)=1$, o declive da reta tangente é 1, o que faz com que a reta seja paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, que é definida pela equação $y=x$.

3.1. $g'(x)=f'(2x-1)\times(2x-1)'=[3(2x-1)-1]\times 2=(6x-4)\times 2=12x-8$

3.2. $g'(x)=0 \iff 12x-8=0 \iff x=\frac{8}{12} \iff x=\frac{2}{3}$

A reta tangente ao gráfico de f é horizontal em $x=\frac{2}{3}$.

MMA12CAD © Porto Editora

pág. 15

4. $g'(x)=(-x^2+k)'=-2x$. $m=\tan 120°=-\sqrt{3}$

$g'(x)=-\sqrt{3} \iff -2x=-\sqrt{3} \iff x=\frac{\sqrt{3}}{2}$. A abcissa do ponto P é $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Se o mínimo de f é 0, então $k=1$. Assim, $f(x)=\sin x+1$ e $g(x)=-x^2+1$.

Como $(f\circ g)'(x)=g'(x)\times f'(g(x))$ e tem-se $g'(x)=(-x^2+1)'=-2x$ e $f'(-x^2+1)=\cos(-x^2+1)$, então $(f\circ g)'(x)=-2x\times\cos(-x^2+1)$.

Em alternativa, podia-se calcular $(f\circ g)'(x)$ da seguinte forma:

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-x^2+1)=\sin(-x^2+1)+1$

e $(f\circ g)'(x)=(\sin(-x^2+1)+1)'=(-x^2+1)'\cos(-x^2+1)=-2x\cos(-x^2+1)$.

O declive da reta pedido é igual a $(f\circ g)'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1\right)=-\sqrt{3}\cos\left(\frac{1}{4}\right)$.

5.1. $f'(x)=(x+\sin x)'=1+\cos x$

$f'(x)=1 \iff 1+\cos x=1 \iff \cos x=0 \underset{x\in[0,\,2\pi]}{\iff} x=\frac{\pi}{2}\vee x=\frac{3\pi}{2}$

As retas tangentes ao gráfico de f em $x=\frac{\pi}{2}$ e em $x=\frac{3\pi}{2}$ são paralelas à bissetriz dos quadrantes ímpares de equação $y=x$.

5.2. $f'(x)=0 \iff 1+\cos x=0 \iff \cos x=-1 \underset{x\in[0,\,2\pi]}{\iff} x=\pi$. Em $x=\pi$, a reta tangente ao gráfico de f é horizontal e f' não muda de sinal, logo, como é sugerido na figura, não existe um extremo relativo nesse ponto.

Ficha 5 Segunda derivada

pág. 16

1.1. $f'(x)=(x^3-x^2+\pi x)'=3x^2-2x+\pi$

$f''(x)=(3x^2-2x+\pi)'=6x-2$

1.2. $g'(x)=\left(\frac{3x}{x-1}\right)'=\frac{(3x)'\times(x-1)-3x\times(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{3\times(x-1)-3x\times1}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}$

$g''(x)=\left(\frac{-3}{(x-1)^2}\right)'=\frac{3\times2\times(x-1)\times(x-1)'}{(x-1)^4}=\frac{6(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{6}{(x-1)^3}$

1.3. $h'(x)=\left((2x-1)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{1}{2}}(2x-1)'=\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

$h''(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\right)'=\frac{1'\times\sqrt{2x-1}-1\times\left[(2x-1)^{\frac{1}{2}}\right]'}{2x-1}=-\frac{(2x-1)^{-\frac{1}{2}}}{2x-1}=-(2x-1)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{(2x-1)^3}}$

1.4. $i'(x)=[\sin(2x+1)]'=(2x+1)'\cos(2x+1)=2\cos(2x+1)$

$i''(x)=[2\cos(2x+1)]'=-2(2x+1)'\sin(2x+1)=-4\sin(2x+1)$

1.5. $j'(x)=[x\cos(x)]'=\cos(x)-x\sin(x)$

$j''(x)=[\cos(x)-x\sin(x)]'=-\sin(x)-(\sin(x)+x\cos(x))=-2\sin(x)-x\cos(x)$

1.6. $k'(x)=[\tan^2(x)]'=2\tan(x)[\tan(x)]'=\frac{2\tan(x)}{\cos^2(x)}=\frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}$

$k''(x)=\left[\frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}\right]'=\frac{2\cos(x)\cos^3(x)-2\sin(x)[\cos^3(x)]'}{\cos^6(x)}=\frac{2\cos^4(x)+6\sin^2(x)\cos^2(x)}{\cos^6(x)}=$

$=\frac{2\cos^2(x)+6\sin^2(x)}{\cos^4(x)}$

MMA12CAD © Porto Editora

1.7. $l'(x)=\left[x^2\sin(x)\right]'=2x\sin(x)+x^2\cos(x)$

$l''(x)=\left[2x\sin(x)+x^2\cos(x)\right]'=2\sin(x)+2x\cos(x)+2x\cos(x)-x^2\sin(x)=2\sin(x)+4x\cos(x)-x^2\sin(x)$

1.8. $m'(x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$

$m''(x)=-2\cos(x)\sin(x)-2\sin(x)\cos(x)=-4\sin(x)\cos(x)$

pág. 17

2. $g'(x)=\left(x^4-4x^3+6x^2-5x-\pi\right)'=4x^3-12x^2+12x-5$

$g''(x)=\left(4x^3-12x^2+12x-5\right)'=12x^2-24x+12$

$g''(x)=0 \iff 12x^2-24x+12=0 \iff$

$\iff x=\dfrac{24\pm\sqrt{(-24)^2-4\times12\times12}}{2\times12} \iff x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g''	+	0	+
g	⌣	$g(1)$	⌣

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty,1[$ e em $]1,+\infty[$, não tendo nenhum ponto de inflexão.

3. Como f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, tem-se $f'(x)\geqslant0$, o que exclui as opções **(B)** e **(D)**.

Além disso, $f''(x)<0$ se $x<0$ e $f''(x)>0$ se $x>0$, logo f' é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^-$ e estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$.

Opção **(C)**

Avaliação intercalar 1

Ficha 6 Avaliação intercalar 1

pág. 18

1.1. $h(0)=f(g(0))=f(0^3-0)=f(0)=0^2=0$

$\lim\limits_{x\to0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(f(g(x))\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(f(x^3-x)\right)\underset{\left(\substack{x^3-x>0,\\ \text{se } x\to0^-}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0^-}\left(2\left(x^3-x\right)^2\right)=2\left(0^3-0\right)^2=0$

$\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(f(g(x))\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(f(x^3-x)\right)\underset{\left(\substack{x^3-x<0,\\ \text{se } x\to0^+}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\left(\left(x^3-x\right)^2\right)=\left(0^3-0\right)^2=0$

Como $h(0)=\lim\limits_{x\to0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to0^+}h(x)$, h é contínua em $x=0$.

1.2. As coordenadas do ponto de tangência são:

$(2,h(2))=\left(2,f(g(2))\right)=\left(2,f(2^3-2)\right)=(2,f(6))=\left(2,2\times6^2\right)=(2,72)$

Como $h'(x)=g'(x)f'(g(x))$ e $g'(x)=3x^2-1$, tem-se que $g'(2)=3\times2^2-1=11$

e $f'(g(2))=f'(2^3-2)=f'(6)=4\times6=24$, porque, para $x>0$, $f'(x)=\left(2x^2\right)'=4x$.

Assim, $h'(2)=11\times24=264$.

A equação reduzida é da forma $y=264x+b$. Daqui resulta que $72=264\times2+b \iff b=-456$ e a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de h em $x=2$ é $y=264x-456$.

2. $f'(x)=\cos(x)-\sin(x)$

$f'(x)=0 \iff \cos(x)-\sin(x)=0 \iff \cos(x)=\sin(x) \iff x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

3. Como $f'(x)=f''(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, em cada ponto as duas derivadas têm o mesmo valor, logo o mesmo sinal, ou ambas nulas.

Na opção **(D)**, a função é estritamente crescente e o seu gráfico tem a concavidade voltada para cima, pelo que $f'(x)>0$ e $f''(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Nas restantes opções existem valores de x para os quais $f'(x)$ e $f''(x)$ têm sinais diferentes, ou até apenas uma delas se anula, pelo que não se pode verificar $f'(x)=f''(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Opção **(D)**

MMA12CAD © Porto Editora

pág. 19

4. $f'(x) = 4x^3 + 2x$

$f''(x) = 12x^2 + 2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Então, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$.

5. O gráfico de f tem de ser uma parábola com a concavidade voltada para baixo.

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 1[$ e em $]2, +\infty[$ e voltada para baixo em $]1, 2[$.

Existem dois pontos de inflexão, com abcissas $x = 1$ e $x = 2$.

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
f	–	0	+	0	–
f"	–	–	–	–	–
g"	+	0	–	0	+
g	⌣	$g(1)$	⌢	$g(2)$	⌣
		P.I.		P.I.	

6. Tem-se $h'(x) = g'(x)\, f'(g(x))$.

Como o gráfico de g é uma reta que passa nos pontos de coordenadas $(0, 0)$ e $(1, 2)$, tem-se que $g(x) = 2x$ e $g'(x) = 2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Assim, o sinal de $h'(x)$ coincide com o de $f'(g(x))$.

Os zeros de f' são -1 e 2,

logo $f'(g(x)) = 0 \iff g(x) = -1 \vee g(x) = 2 \iff 2x = -1 \vee 2x = 2 \iff x = -\frac{1}{2} \vee x = 1$.

Assim, $h'(x) > 0$ em $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ e em $]1, +\infty[$.

Entre os intervalos dados, isto verifica-se em dois intervalos, $]-\infty, -1[$ e em $]2, +\infty[$, que estão contidos nos intervalos referidos.

Opção **(C)**

Ficha 7 Regra de L'Hôpital

pág. 20

1.1. $\lim\limits_{x \to 3} (2x - 1) = 2 \times 3 - 1 = 5$

1.2. $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

1.3. $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{2}{1-x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

1.4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{+\infty} = 0$

1.5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{1-x} = \frac{3}{-\infty} = 0$

1.6. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{2026} = (-\infty)^{2026} = +\infty$

1.7. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + x^2) = +\infty + \infty = +\infty$

1.8. $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-x^2}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

1.9. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + x) \overset{\infty - \infty}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = (-\infty)^2 = +\infty$

1.10. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{x}{\cos(x)} = \frac{\frac{\pi}{2}}{0^+} = +\infty$

MMA12CAD © Porto Editora

2.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x}{2x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{2}=+\infty$

2.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{1+x}=\dfrac{4}{+\infty}=0$

2.3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}-\lim\limits_{x\to-\infty}x\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2x}-\lim\limits_{x\to-\infty}x=\dfrac{1}{-\infty}-(-\infty)=0+\infty=+\infty$

2.4. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x)^{\infty-\infty}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=(-\infty)^2=+\infty$

2.5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-2}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2}{2x}=1$

2.6. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{0}{-4}=0$

2.7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-4}}{x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x-4}}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{4x\sqrt{x-4}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

2.8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2}}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$

2.9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(1-x)}{x^2}=\dfrac{\sin 1}{0^+}=+\infty$

2.10. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2(x)}{(x-\pi)^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{2\sin(x)\cos(x)}{2(x-\pi)}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{2\cos^2(x)-2\sin^2(x)}{2}=\dfrac{2\times(-1)^2-2\times0}{2}=1$

2.11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\sin(x)}-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}[1+\sin(x)]^{-\frac{1}{2}}\times\cos(x)}{1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{1+\sin(x)}}=\dfrac{1}{2}$

3. O Tiago aplicou incorretamente a regra de L'Hôpital, pois derivou o quociente.
Pela regra de L'Hôpital deve derivar-se o numerador e o denominador separadamente e não o quociente.

4. $f(0)=k-1$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{6x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x}{6}=\dfrac{1}{6}$

Para f ser contínua em $x=0$, $k-1=\dfrac{1}{6}\iff k=\dfrac{7}{6}$.

5.1. $f(3)=\dfrac{14{,}5\times3+22{,}5}{3+1}=16{,}5$; $f(0)=\dfrac{14{,}5\times0+22{,}5}{0+1}=22{,}5$

$f(3)-f(0)=16{,}5-22{,}5=-6$. Nas três primeiras semanas houve uma redução de 6 mil coelhos.

5.2. $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{14{,}5t+22{,}5}{t+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{14{,}5}{1}=14{,}5$

Com o passar do tempo, o número de coelhos tende a aproximar-se de $14\,500$.

MMA12CAD © Porto Editora

Ficha 8 Assíntotas

pág. 22

1. • $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

f é contínua em $]-\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$ por ser uma função racional cujo denominador não se anula no respetivo intervalo.

Se existir assíntota vertical, é a reta de equação $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{1} = 2 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x+1} = \frac{2}{2} = 1 \in \mathbb{R}$$

Logo, não existem assíntotas verticais ao gráfico de f.

• $$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-1}{x-1} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{x+1} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{1} = 2 \in \mathbb{R}$$

$y = 2$ é a equação da única assíntota horizontal ao gráfico de f.

2. • $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ por ser uma função racional.

Se existir assíntota vertical, é a reta de equação $x = 1$.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2-x+3}{x-1} = \frac{4}{0^-} = -\infty$, logo a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

• $$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{\frac{2x^2-x+3}{x-1}}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{2x^2-x+3}{x(x-1)} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to \pm\infty} \frac{4x-1}{2x-1} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \frac{4}{2} = 2$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x\to \pm\infty} \left(\frac{2x^2-x+3}{x-1} - 2x\right) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{2x^2-x+3-2x^2+2x}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x+3}{x-1} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{1} = 1$$

A reta de equação $y = 2x + 1$ é assíntota não vertical ao gráfico de f quando $x \longrightarrow \pm\infty$.

3. $$\lim_{x\to \pm\infty} (f(x) - (2x-1)) = \lim_{x\to \pm\infty} \left(2x - 1 + \frac{x+1}{x} - 2x + 1\right) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

Como $\lim_{x\to \pm\infty} (f(x) - (2x-1)) \neq 0$, a reta de equação $y = 2x - 1$ não é assíntota ao gráfico de f.

pág. 23

4. $m = \frac{3-2}{1-0} = 1$;

Opção **(D)**

5. $\lim_{x\to +\infty} (f(x) - 2x + 1) = 2 \iff \lim_{x\to +\infty} (f(x) - 2x) = 1$, logo a reta de equação $y = 2x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \longrightarrow +\infty$.

As coordenadas dos pontos de interseção com os eixos são $(0, 1)$ e $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Opção **(B)**

Ficha 9 Estudo de uma função

MMA12CAD © Porto Editora

1.1. a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

b) É contínua no seu domínio por ser racional.

c) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$, logo $x = 1$ é a equação da única assíntota vertical ao gráfico de f.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\infty}{\underset{\infty}{=}}} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{2x-1} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\infty}{\underset{\infty}{=}}} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{2} = 1$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + x}{x-1}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x}{x-1}\right) \underset{\text{RL'H}}{\overset{\infty}{\underset{\infty}{=}}} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1} = 1$$

A reta de equação $y = x + 1$ é a equação da única assíntota não vertical ao gráfico de f.

d) $f(0) = \dfrac{0}{-1} = 0$, logo o gráfico interseta os eixos coordenados na origem do referencial.

e) $f'(x) = \dfrac{2x(x-1) - x^2 \times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

$$f'(x) = 0 \iff \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \iff x^2 - 2x = 0 \wedge x - 1 \neq 0 \iff x(x-2) = 0 \wedge x \neq 1 \iff$$

$$\iff (x = 0 \vee x = 2) \wedge x \neq 1$$

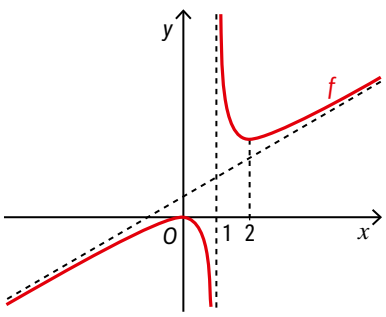
x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
f'	+	0	–	N.D.	–	0	+
f	↗	$f(0)$	↘	N.D.	↘	$f(2)$	↗
		Máx.				Mín.	

A função f é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e em $[2, +\infty[$ e estritamente decrescente em $[0, 1[$ e em $]1, 2]$. Existe um máximo relativo igual a 0 para $x = 0$ e um mínimo relativo igual a 4 para $x = 2$.

f) $f''(x) = \left(\dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}\right)' = \dfrac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x^2 - 2x)(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{2}{(x-1)^3} \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

Se $x > 1$, $f''(x) > 0$ e, se $x < 1$, $f''(x) < 0$, pelo que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]1, +\infty[$ e voltada para baixo em $]-\infty, 1[$, não tendo pontos de inflexão.

1.2.



MMA12CAD © Porto Editora

2.1. $f''(x)=\dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=0 \iff \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}=0 \underset{(x^2+1\neq 0)}{\iff} -x^2+1=0 \iff x=-1 \vee x=1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f'	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$
		Mín.		Máx.	

O mínimo relativo de f' tem abcissa $x=-1$ e o máximo relativo tem abcissa $x=1$.

2.2. Equação da reta r, tangente ao gráfico de f em $x=2$:

$y=f'(2)x-1 \iff y=\dfrac{2}{5}x-1$, porque $f'(2)=\dfrac{2}{2^2+1}=\dfrac{2}{5}$.

Como $m_s=\dfrac{1}{m_a}=-\dfrac{1}{\frac{2}{5}}=-\dfrac{5}{2}$ e $f(2)=\dfrac{2}{5}\times 2-1=-\dfrac{1}{5}$, a equação da reta perpendicular s, é da forma $y=-\dfrac{5}{2}x+b$, com: $-\dfrac{1}{5}=-\dfrac{5}{2}\times 2+b \iff \dfrac{24}{5}=b$

Logo, a equação da reta s é $y=-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{24}{5}$.

Como $-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{24}{5}=0 \iff -25x+48=0 \iff x=\dfrac{48}{25}$, o ponto de interseção pedido tem coordenadas $\left(\dfrac{48}{25},\ 0\right)$.

3. $f'(x)=\cos x-\sin x$

$f''(x)=-\sin x-\cos x=-f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, logo, se $f(x)=0$, então $f''(x)=0$.

Nos pontos em que o gráfico de f interseta o eixo Ox, verifica-se $f''(x)=0$. Nesses pontos, a segunda derivada anula-se e, como $f''(x)=-f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, e f muda de sinal nos seus zeros, como se observa na figura, também f' muda de sinal. Logo, nesses pontos, os zeros de f correspondem aos pontos de inflexão do gráfico de f.

MMA12CAD © Porto Editora

Ficha 10 Função inversa

pág. 26

1. Apenas as funções g e h, porque "passam" no teste da reta horizontal.

2. Pretende-se determinar x tal que $f(x) = -10$.

$x^3 - 2 = -10 \iff x^3 = -8 \iff x = \sqrt[3]{-8} \iff x = -2$, logo $f^{-1}(-10) = -2$

3. $(f + f^{-1})(4) + (f^{-1} \circ f)(1) = f(4) + f^{-1}(4) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

4. $A(-1, -3)$, $B(-3, -1)$, $C(2, 5)$ e $D(5, 2)$

pág. 27

5.1. $D_f = \mathbb{R} = D'_{f^{-1}}$

$y = 3x - 1 \iff 3x = y + 1 \iff x = \dfrac{y+1}{3}$

Logo, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3}$ e $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \curvearrowright \dfrac{x+1}{3}$

5.2. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\} = D'_{f^{-1}}$

$y = \dfrac{1}{x} \iff x = \dfrac{1}{y}$

Logo, $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$ e $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$f^{-1}: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$x \curvearrowright \dfrac{1}{x}$

5.3. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\} = D'_{f^{-1}}$

$y = \dfrac{x-1}{x+2} \iff y(x+2) = x - 1 \iff yx + 2y = x - 1 \iff$

$\iff yx - x = -1 - 2y \iff x(y-1) = -1 - 2y \iff x = \dfrac{-1-2y}{y-1}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{-1-2x}{x-1}$ e $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$f^{-1}: \mathbb{R}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$x \curvearrowright \dfrac{-1-2x}{x-1}$

6.1. $g(2) = f^{-1}(f(2) + 1) = f^{-1}(3 + 1) = f^{-1}(4) = 3$

6.2. $f(g(x)) = f\left(f^{-1}(f(x) + 1)\right) = f(x) + 1$

Aplicando a derivada da função composta, tem-se: $[f(g(x))]' = g'(x)\, f'(g(x))$

Por outro lado: $[f(x) + 1]' = f'(x)$

Então: $g'(x)\, f'(g(x)) = f'(x) \iff g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f'(g(x))}$

Avaliação intercalar 2

Ficha 11 Avaliação intercalar 2

MMA12CAD © Porto Editora

pág. 28

1.1. f é contínua em $x=0$ se $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cos(x^2)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos(x^2)=1$
- $f(0)=2k$
- $2k=1 \iff k=\dfrac{1}{2}$

1.2. $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)+x=\dfrac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}+x=x^2\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)+x$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)+x}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)+1\right]=$$

$$=1+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}1+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-2}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=1+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x}=1+0=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[g(x)-1x]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)+x-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\right]\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-\frac{2}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{2}{x^3}}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)=\cos(0)=1$$

A equação da única assíntota não vertical ao gráfico de g é $y=x+1$.

2. $\lim\limits_{t\to+\infty} a(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{8t+1}{t+4}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{8}{1}=8$

A altura da árvore tende a aproximar-se de 8 metros com o passar do tempo.

pág. 29

3. Por exemplo:

I. $f(x)=x$; $f^{-1}(x)=x$; $f^{-1}(2)=2$ e $\dfrac{1}{f(2)}=\dfrac{1}{2}$

II. $f(x)=2x-1$ e $g(x)=x-1$;

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x-1}{x-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty \text{ e } \lim_{x\to 1^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(2x-1)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{1}=2$$

4. Opção **(D)**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=f''(0)<0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-x-1]=0$.

5. $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{ax^2+bx+1}{x+1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^2+bx+1}{x(x+1)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2ax+b}{2x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2a}{2}=a$$

Como o declive da assíntota não vertical é 2, $a=2$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2+bx+1}{x+1}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+bx+1-2x^2-2x}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(b-2)x+1}{x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}(b-2)=b-2$$

Como a ordenada na origem da assíntota não vertical é -1, $b-2=-1 \iff b=1$.

Logo, $a+b=3$.

Ficha 12 Funções exponenciais

MMA12CAD © Porto Editora

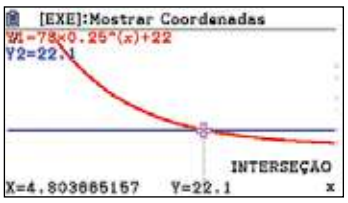
pág. 30

1. **1** $\longrightarrow f$ **2** $\longrightarrow h$ **3** $\longrightarrow g$

2.1. **a)** 100 °C

b) 24,4 °C

2.2. Com a calculadora, obtivemos o valor aproximado de 4,8 h.



$0{,}8 \times 60 \text{ min} = 48 \text{ min}$

Então, 4,8 h = 4 h 48 min

2.3. Dado que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 22$, vem $y = 22$.

3. $m(0) = 10 \iff a \times 4^{-k \times 0} = 10 \iff a \times 1 = 10 \iff a = 10$

$m(t+1) = 0{,}125 \times m(t) \iff a \times 4^{-k(t+1)} = 0{,}125 \times a \times 4^{-kt} \iff \dfrac{4^{-kt-k}}{4^{-kt}} = \dfrac{125}{1000} \iff$

$\iff 4^{-kt-k+kt} = \dfrac{1}{8} \iff 4^{-k} = \dfrac{1}{2^3} \iff (2^2)^{-k} = 2^{-3} \iff 2^{-2k} = 2^{-3} \iff -2k = -3 \iff k = \dfrac{3}{2}$

pág. 31

4.1. $15\,000 \times \left(1 + \dfrac{0{,}021}{4}\right)^4 \approx 15\,317{,}49$; 15 317,49 €

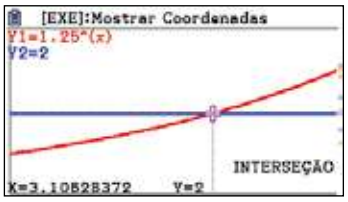
4.2. $15\,000 \times \left(1 + \dfrac{0{,}021}{2}\right)^4 \approx 15\,639{,}99$; 15 639,99 €

5. $f(0) = 30\,000 \times 1{,}25^0 = 30\,000$

$f(x) = 2 \times f(0) \iff 30\,000 \times 1{,}25^x = 60\,000 \iff 1{,}25^x = 2$

Recorrendo à calculadora, obtemos:

$x \approx 3{,}106 \text{ h} \approx 3 \text{ h } 6 \text{ min}$



6.1. $T(0) = 65e^{-0{,}1 \times 0} + 25 = 65 \times 1 + 25 = 90$; 90 °C

6.2. Recorrendo à calculadora, resolvemos a equação $T(t) = 35$, tendo obtido $t \approx 18{,}72$ min.



A temperatura do chá atingiu 35 °C cerca das 17:19.

6.3. $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(65e^{-0{,}1t} + 25\right) = 65 \times 0 + 25 = 25$

A temperatura ambiente era 25 °C.

Ficha 13 Funções logarítmicas

MMA12CAD © Porto Editora

pág. 32

1. $\log_{10}\sqrt{10}+2\log_2 16-\frac{1}{2}\log_5\left(\frac{1}{5}\right)=\log_{10}10^{\frac{1}{2}}+2\log_2 2^4-\frac{1}{2}\log_5 5^{-1}=$

$=\frac{1}{2}+2\times 4-\frac{1}{2}\times(-1)=9$

2.1. $\log_2(x-3)=1 \iff x-3=2^1 \iff x=5$

2.2. $\log_2(\log x)=1 \iff \log x=2^1 \iff x=10^2 \iff x=100$

3. $\ln\left(\frac{1}{x}\right)-10^{\log x+\log 2}=\ln x^{-1}-10^{\log(2x)}=-\ln x-2x$

4. Opção **(C)**

5. $2^x-1=20\times 2^{-x} \iff 2^x-\frac{20}{2^x}-1=0 \iff \frac{(2^x)^2-20-2^x}{2^x}=0 \iff$

$\iff (2^x)^2-2^x-20=0 \iff 2^x=\frac{1\pm\sqrt{1+80}}{2} \iff 2^x=5 \vee \underbrace{2^x=-4}_{\text{impossível}} \iff x=\log_2 5$

6. $a^{\ln b}-b^{\ln a}=0 \iff a^{\ln b}=b^{\ln a} \iff \ln\left(a^{\ln b}\right)=\ln\left(b^{\ln a}\right) \iff \ln b\times\ln a=\ln a\times\ln b$

pág. 33

7. $\log 50=\log(2\times 25)=\log 2+\log 5^2=\log 2+2\log 5$

$D_g=\mathbb{R}^+$. A função g é crescente em $]0,+\infty[$.

$\ln(5x-3)=0 \iff 5x-3=1\wedge 5x-3>0 \iff x=\frac{4}{5}$

$2e^x-4=0 \iff 2e^x=4 \iff e^x=2 \iff x=\ln 2\notin\mathbb{Z}$

$f(3)=3-4\ln 3\approx -1{,}4<0$

Afirmações verdadeiras.

$\log 50=\log 2+2\log 5$

$\ln(5x-3)=0 \iff x=\frac{4}{5}$

A função f definida por $f(x)=3-4\ln x$ é negativa para $x=3$.

8.1. $y=f(x) \iff y=\log_3 x-1 \iff y+1=\log_3 x \iff x=3^{y+1}$; $f^{-1}(x)=3^{x+1}$ e $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

8.2. $f(x)=0 \iff \log_3 x-1=0 \iff \log_3 x=1 \iff x=3$

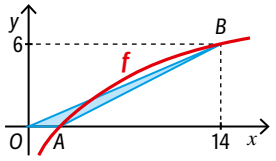
8.3. $(f\circ g)(x)=0 \iff f(g(x))=0 \underset{\text{8.2.}}{\iff} g(x)=3 \iff \log_2 x=3 \iff x=2^3 \iff x=8$

9.1. $f(x)=0 \iff 3\log_2(2x+4)-9=0 \iff \log_2(2x+4)=3 \iff$

$\iff 2x+4=2^3 \iff 2x=4 \iff x=2$

$f(14)=3\log_2(2\times 14+4)-9=3\log_2 32-9=3\times 5-9=6$

$A(2,0)$ e $B(14,6)$; $A_{[AOB]}=\frac{\overline{OA}\times\text{ordenada de }B}{2}=\frac{2\times 6}{2}=6$ u. a.



9.2. A função g tal que $(f\circ g)(x)=x$, $\forall x\in D_g$ é a função inversa de f.

$y=f(x) \iff y=3\log_2(2x+4)-9 \iff \frac{y+9}{3}=\log_2(2x+4) \iff 2x+4=2^{\frac{y+9}{3}} \iff$

$\iff 2x=2^{\frac{y}{3}+3}-4 \iff x=2^{\frac{y}{3}+2}-2$.

Logo, $g(x)=2^{\frac{x}{3}+2}-2$ e $D_g=\mathbb{R}$.

Ficha 14 Derivadas de funções exponenciais e logarítmicas

MMA12CAD © Porto Editora

pág. 34

1.1. $f'(x)=\left(-2+5e^{-2x}\right)'=0+5\times(-2)e^{-2x}=-10e^{-2x}$

1.2. $g'(x)=\left(-2e^{-x+1}+e^{3x}\right)'=-2\times(-1)\,e^{-x+1}+3e^{3x}=2e^{-x+1}+3e^{3x}$

1.3. $h'(x)=\left(5-\frac{1}{2}\ln(x)\right)'=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}=-\frac{1}{2x}$

1.4. $i'(x)=(1-\ln 10\log x)'=-\ln 10\times\frac{1}{x\ln 10}=-\frac{1}{x}$

2. $f'(x)=\left(e^{kx}+x\right)'=k\,e^{kx}+1$;

$f'(0)=2 \iff ke^{0}+1=2 \iff k=1$

3.1. $f'(x)=\left(2xe^{\frac{x}{2}}\right)'=(2x)'e^{\frac{x}{2}}+2x\left(e^{\frac{x}{2}}\right)'=2e^{\frac{x}{2}}+2x\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}=(2+x)e^{\frac{x}{2}}$

$f'(x)=0 \iff (2+x)e^{\frac{x}{2}}=0 \iff x=-2$

	$-\infty$	-2	$+\infty$
f'	+	0	−
f	↘	$f(-2)$	↗
		Mín.	

$f(-2)=2\times(-2)e^{-\frac{2}{2}}=-\frac{4}{e}$

f é estritamente decrescente em $]-\infty,\,-2]$ e estritamente crescente em $[-2,\,+\infty[$.

f tem um máximo relativo igual a $-\frac{4}{e}$, para $x=-2$.

3.2. $f(0)=0$ e $m_{OA}=f'(0)=(2+0)e^{0}=2$. Logo, $OA\colon y=2x$ e $A(1,\,2)$.

$f(1)=2\sqrt{e}$, pelo que $B(1,\,2\sqrt{e})$. $A_{[OAB]}=\frac{\overline{AB}\times\text{abcissa de }A}{2}=\frac{2\sqrt{e}-2}{2}=\sqrt{e}-1$.

A medida da área do triângulo $[OAB]$ é $(\sqrt{e}-1)$ u. a.

pág. 35

4. $f'(x)=\left(\frac{x^2}{e^x}\right)'=\frac{(x^2)'e^x-x^2(e^x)'}{e^{2x}}=\frac{2xe^x-x^2e^x}{e^{2x}}=\frac{xe^x(2-x)}{e^{2x}}=\frac{x(2-x)}{e^x}$

$f'(x)=0 \iff \frac{x(2-x)}{e^x}=0 \iff x(2-x)=0 \iff x=0\vee x=2$

$P(0,\,0)$ ou $P(2,\,4e^{-2})$

5.1. $g'(x)=\left(2^x+4^x\right)'=2^x\ln 2+4^x\ln 4=2^x\ln 2+4^x\ln 2^2=\left(2^x+2\times4^x\right)\ln 2$

Como $g'(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, g é estritamente crescente.

5.2. Como g é estritamente crescente, passa no teste da reta horizontal, logo admite inversa.

5.3. $g^{-1}(2)=y \iff 2=g(y) \iff 2=2^y+4^y \iff 2^y+2^{2y}-2=0 \iff \left(2^y\right)^2+2^y-2=0 \iff$

$\iff 2^y=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} \iff \underbrace{2^y=-2}_{\text{impossível}}\vee 2^y=1 \iff y=0$. Logo, $g^{-1}(2)=0$.

5.4. $m=g'(-1)=\left(2^{-1}+2\times4^{-1}\right)\ln 2=\ln 2$

6.1. $f(x)=0 \iff \log_2(25-x^2)-4=0 \iff \log_2(25-x^2)=4 \iff$

$\iff 25-x^2=2^4\wedge x\in]-5,\,5[\iff x=-3\vee x=3$

MMA12CAD © Porto Editora

6.2. $f'(x)=\left[\log_2(25-x^2)-4\right]'=\dfrac{-2x}{(25-x^2)\ln 2}$

$f'(-3)=\dfrac{3}{8\ln 2}$ e $f'(3)=\dfrac{-3}{8\ln 2}$

6.3. $f'(x)=0 \iff \dfrac{-2x}{(25-x^2)\ln 2}=0 \wedge x\in\,]-5\,,\,5[\iff x=0$

	-5		0		5
f'	N. D.	+	0	–	N. D.
f	N. D.	↗	$f(0)$	↘	N. D.
			Máx.		

f é estritamente crescente em $]-5\,,\,0]$ e estritamente decrescente em $[0\,,\,5[$.

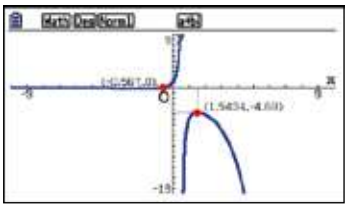
Ficha 15 Estudo de funções exponenciais e de funções logarítmicas

pág. 36

1. **(A)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+x}{e^{-x}-x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+1}{-e^{-x}-1}=-\infty$

(B) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+x}{e^{-x}-x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+1}{-e^{-x}-1}=\dfrac{1}{-\infty}=0$

(C)



(D) Opção **(A)**

2.1. $f(1)=\dfrac{e-1}{1}=e-1$, logo $(1\,,\,e-1)$ são coordenadas do ponto de tangência.

$\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)'=\dfrac{e^x x-e^x+1}{x^2}$, logo $f'(1)=1$.

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 é:

$y-(e-1)=1\,(x-1) \iff y-e+1=x-1 \iff y=x-1-1+e \iff y=x+e-2$

2.2. Como o domínio de f é $\mathbb{R}$ e, para $x<0$ e $x>0$, a função é contínua por ser o resultado de operações entre funções contínuas nos seus domínios, a única possível assíntota vertical ao gráfico de f é a reta de equação $x=0$.

- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1}{x}=1\in\mathbb{R}$, porque $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ é um limite notável.
- $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} e^{2x+1}=e\in\mathbb{R}$

Logo, não existem assíntotas verticais ao gráfico de f .

Como $D_f=\mathbb{R}$, podem existir assíntotas não verticais ao gráfico de f quando $x\longrightarrow-\infty$ e quando $x\longrightarrow+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x+1}}{x}=\dfrac{0}{-\infty}=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x+1}=0$

Deste modo, a reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x\longrightarrow-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2}=+\infty$

Então, não existe assíntota não vertical ao gráfico de f quando $x\longrightarrow+\infty$.

MMA12CAD © Porto Editora

pág. 37

3.1. • Se $x \longrightarrow +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x+1)}{x}\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{e^x+1}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(e^x+1)-x\right]\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(e^x+1)-\ln(e^x)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{e^x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(1+e^{-x})\right]=\ln 1=0$$

Logo, a reta de equação $y=x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \longrightarrow +\infty$.

• Se $x \longrightarrow -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln(e^x+1)=\ln 1=0$$

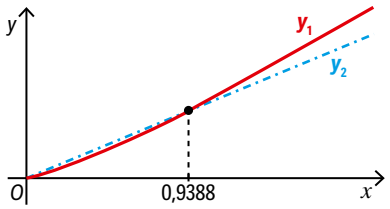
Logo, a reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \longrightarrow -\infty$.

3.2. $f'(x)=\left[\ln(e^x+1)\right]'=\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}=\frac{e^x}{e^x+1}$

Como $e^x>0$ e $e^x+1>0$, para todo o número real, $f'(x)>0$ em $\mathbb{R}$, pelo que f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

3.3. $f''(x)=\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)'=\frac{e^x(e^x+1)-(e^x)^2}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x(e^x+1-e^x)}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, pelo que se conclui que o gráfico de f não tem pontos de inflexão.

3.4. Pretende-se resolver a equação $g(2x)-g(x)=0{,}8x$.
Designando $g(2x)-g(x)$ por y_1 e $0{,}8x$ por y_2, obtêm-se os gráficos e a abcissa do ponto de interseção desses gráficos, de onde se conclui que $x\approx 0{,}94$, ou seja, a condição é verificada quando são produzidas, aproximadamente, 94 unidades.



Avaliação intercalar 3

Ficha 16 Avaliação intercalar 3

pág. 38

1. $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+e^{-x}}{x+1}\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2-e^{-x}}{1}=2$,
logo a reta de equação $y=2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f.

$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{2x+e^{-x}}{x+1}=\frac{-2+e^1}{0^+}=+\infty$,
logo a reta de equação $x=-1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f.

Como **(A)** é verdadeira, $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2]=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x+e^{-x}}{x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+e^{-x}}{x^2+x}\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2-e^{-x}}{2x+1}=\frac{2}{+\infty}=0$$

Opção **(C)**

2.1. Como o domínio de f é $\mathbb{R}^+$ e f é uma função contínua, por ser o resultado de operações entre funções contínuas nesse domínio, a única possível assíntota vertical é a reta de equação $x=0$.

$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(2x+\ln x)=0-\infty=-\infty$

Logo, a reta de equação $x=0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f.

MMA12CAD © Porto Editora

2.2. $D_f = \mathbb{R}^+$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x+\ln x}{x}\right) = 2 + \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 2 + 0 = 2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - 2x] = \lim\limits_{x\to+\infty} (2x + \ln x - 2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

Logo, não existem assíntotas não verticais ao gráfico de f.

2.3. $f'(x) = (2x + \ln x)' = 2 + \dfrac{1}{x}$

$f''(x) = \left(2 + \dfrac{1}{x}\right)' = 0 - \dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2} < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, pelo que se conclui que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}^+$.

pág. 39

3.

- $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 > 0 \wedge x - 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 > 0\} =]1, +\infty[$
- $\log(x^2 - 1) - \log(x - 1) = 1 \iff \log(x^2 - 1) = \log 10 + \log(x - 1) \wedge x > 1 \iff$
  $\iff \log(x^2 - 1) = \log(10x - 10) \wedge x > 1 \iff x^2 - 1 = 10x - 10 \wedge x > 1 \iff$
  $\iff x^2 - 10x + 9 = 0 \wedge x > 1 \iff x = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 9}}{2} \wedge x > 1 \iff$
  $\iff (x = 1 \vee x = 9) \wedge x > 1 \iff x = 9$
- $S = \{9\}$

4. $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{e^{kx} - 1 - kx}{x^2} \underset{\text{R L'H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{ke^{kx} - k}{2x} \underset{\text{R L'H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{k^2e^{kx}}{2} = \dfrac{k^2}{2}$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \left(-\dfrac{\ln(x+1) - x}{x^2}\right) \underset{\text{R L'H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} - \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\frac{1}{x+1} - 1}{2x} \underset{\text{R L'H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} - \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\frac{-1}{(x+1)^2}}{2} = \dfrac{1}{2}$

$f(0) = a$

Como f é contínua em $x = 0$:

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = f(0)$

Então, $a = \dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{k^2}{2} = \dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{k^2}{2} = \dfrac{1}{2} \iff k^2 = 1 \iff k = 1 \vee k = -1$

A função f é contínua em $x = 0$ para $a = \dfrac{1}{2}$ e $k \in \{-1, 1\}$.

5. $f'(x) = \left[\ln(e^x + 1) - \dfrac{x}{2}\right]' = \dfrac{e^x}{e^x + 1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2e^x - e^x - 1}{2(e^x + 1)} = \dfrac{e^x - 1}{2(e^x + 1)}$

$f'(x) = 0 \iff \dfrac{e^x - 1}{2(e^x + 1)} = 0 \iff e^x - 1 = 0 \wedge \underbrace{2(e^x + 1) \neq 0}_{\text{condição universal}} \iff e^x = 1 \iff x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$
		Mín.	

f é estritamente crescente em $[0, +\infty[$ e estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$.

Tem um mínimo absoluto em $x = 0$ que é $f(0) = \ln(e^0 + 1) - \dfrac{0}{2} = \ln 2$.

MMA12CAD © Porto Editora

Ficha 17 Teorema dos valores intermédios (Bolzano-Cauchy)

pág. 40

1. $f(0)=1-0+\ln(0+1)^2=1$; $f(x)=f(0) \iff 1-x+\ln(x+1)^2=1 \iff -x+\ln(x+1)^2=0$

Seja h a função definida por $h(x)=-x+\ln(x+1)^2$.

h é contínua em $[2\,,\,3]\subset\mathbb{R}^+$, por ser o resultado de operações entre funções contínuas nesse intervalo.

$h(2)\approx 0{,}20$ e $h(3)\approx -0{,}23$

Como h é contínua em $[2\,,\,3]$ e $h(3)<0<h(2)$, podemos concluir, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, que a equação $f(x)=f(0)$ admite pelo menos uma solução no intervalo $]2\,,\,3[$.

2.1. f é contínua em $[-1\,,\,0]\subset\mathbb{R}$, por ser o resultado de operações entre funções contínuas nesse intervalo.

$f(-1)\approx -0{,}86$ e $f(0)=1$

Como f é contínua em $[-1\,,\,0]$ e $f(-1)<0<f(0)$, podemos concluir, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, que a função f admite pelo menos um zero em $]-1\,,\,0[$.

2.2. $f'(x)=\left(e^{2x}+x\right)'=2e^{2x}+1>0\,,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Dado que $f'(x)>0\,,\ \forall x\in\mathbb{R}$, f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, pelo que tem, no máximo, um zero.

Logo, o zero que se provou existir é único.

3. Temos de garantir que f é contínua em $[0\,,\,2]$ e, em particular, em $x=1$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x-1}{e^{1-x}-1}+2\right)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{e^{1-x}-1}+2\overset{\substack{\frac{0}{0}\\ \text{R L'H}}}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{-e^{1-x}}+2=-1+2=1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\ln x}{x+1}+k\right)=0+k=k$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(0) \iff 1=k\wedge e^{k-1}=1 \iff k=1$$

f é contínua em $[0\,,\,1[$ e em $]1\,,\,2]$, por ser o resultado de operações com funções contínuas nesses intervalos.

g é contínua em $[0\,,\,2]$, por ser uma função polinomial.

Para $k=1$, f é contínua, pelo que h, com $h(x)=f(x)-g(x) \iff h(x)=f(x)-x^2$, é contínua em $[0\,,\,2]$, sendo $h(0)\approx 1{,}42$ e $h(2)\approx -2{,}77$, pelo que $h(2)<0<h(0)$. Logo, se $k=1$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, o gráfico da função f interseta o gráfico da função g num ponto cuja abcissa pertence ao intervalo $[0\,,\,2]$.

pág. 41

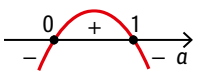
4. Pretendemos provar que a equação $f(x)=-x \iff f(x)+x=0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[0\,,\,1]$. Seja h definida por $h(x)=f(x)+x$.

h é contínua em $[0\,,\,1]\subset\mathbb{R}$, por ser o resultado de operações entre funções contínuas nesse intervalo, e, como $D'_f=[-1\,,\,0]$, $-1+x\leqslant h(x)\leqslant x\,,\ \forall x\in[0\,,\,1]$.

$h(0)=f(0)+0\leqslant 0$ e $h(1)=f(1)+1\geqslant -1+1\geqslant 0$

- Se $h(0)=0$ ou $h(1)=0$, 0 ou 1 é uma solução da equação.
- Se $h(0)\neq 0$ e $h(1)\neq 0$, então $h(0)<0<h(1)$, pelo que, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, h admite pelo menos um zero em $]0\,,\,1[$. Então, a equação $f(x)=-x$ tem pelo menos uma solução em $[0\,,\,1]$.

5. f é contínua em $[0\,,\,1]\subset\mathbb{R}$, por ser polinomial;



$f(0)=-a$ e $f(1)=a-1$

$f(0)\times f(1)<0 \iff -a(a-1)<0 \iff a<0\vee a>1$

Logo, como f é contínua em $[0\,,\,1]$ e, para $a\in]-\infty\,,\,0[\cup]1\,,\,+\infty[$, $f(0)\times f(1)<0$, podemos concluir, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, que, para estes valores de a, a função f admite pelo menos um zero em $]0\,,\,1[$.

MMA12CAD © Porto Editora

6. $f(x)=0 \iff 2x\ln x=0 \iff x=0 \vee x=1$

$O(0,\ 0)$, $A(x,\ 2x\ln x)$, $B(1,\ 0)$; $\overrightarrow{AO}=(-x,\ -2x\ln x)$; $\overrightarrow{AB}=(1-x,\ -2x\ln x)$.

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \iff -x+x^2+(-2x\ln x)^2=0$

Pretendemos provar que a função h definida por $h(x)=-x+x^2+(-2x\ln x)^2$ tem pelo menos um zero no intervalo $]0{,}5\ ;\ 0{,}9[$.

h é contínua em $[0{,}5\ ;\ 0{,}9]\subset\mathbb{R}^+$, por ser o resultado de operações entre funções contínuas nesse intervalo. $h(0{,}5)\approx 0{,}23$ e $h(0{,}9)\approx -0{,}05$.

Logo, como $h(0{,}5)\times h(0{,}9)<0$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a função h admite pelo menos um zero em $]0{,}5\ ;\ 0{,}9[$. Assim, podemos concluir que existe pelo menos um valor de x pertencente ao intervalo $]0{,}5\ ;\ 0{,}9[$ para o qual o triângulo $[OAB]$ é retângulo em A.

Ficha 18 Método da bisseção

pág. 42

1. Usando uma folha de cálculo, foi obtido o resultado parcialmente apresentado na tabela ao lado.

A solução da equação no intervalo $[1,\ 2]$ é, aproximadamente, igual a $1{,}44$.

	a	f(a)	b	f(b)	m	f(m)
1	1,000000	-	2,000000	+	1,500000	+
2	1,000000	-	1,500000	+	1,250000	-
			...			
9	1,437500	-	1,441406	+	1,439453	-
10	1,439453	-	1,441406	+	1,440430	-

2.1. Seja f a função definida por $f(x)=e^{-x}-x$. f é contínua em $[0,\ 1]\subset\mathbb{R}$, por ser o resultado de operações entre funções contínuas nesse intervalo.

$f(0)=1$ e $f(1)\approx -0{,}63$. Logo, como $f(0)\times f(1)<0$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a função f admite pelo menos um zero em $]0,\ 1[$.

Dado que $f'(x)=-e^{-x}-1<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, f é estritamente decrescente.

Logo, a solução da equação que existe em $]0,\ 1[$ é única.

2.2. O intervalo inicial é $I_0=[0,\ 1]$.

$\frac{1-0}{2^n}=\frac{1}{2^n}$

Pretende-se que $\frac{1}{2^n}<10^{-2} \iff 2^n>100$

Como $2^6=64$ e $2^7=128$, temos $n\geqslant 7$.

Em alternativa, como $2^n>100 \iff n=\log_2 100$ e $\log_2 100\approx 6{,}64$, então $n\geqslant 7$.

São necessárias sete iterações que se apresentam na tabela ao lado.

A solução da equação é, aproximadamente, igual a $0{,}57$.

	a	f(a)	b	f(b)	m	f(m)
1	0,000000	+	1,000000	-	0,500000	+
2	0,500000	+	1,000000	-	0,750000	-
3	0,500000	+	0,750000	-	0,625000	-
4	0,500000	+	0,625000	-	0,562500	+
5	0,562500	+	0,625000	-	0,593750	-
6	0,562500	+	0,593750	-	0,578125	-
7	0,562500	+	0,578125	-	0,570313	-

3. O erro cometido quando se aproxima a solução da equação, com intervalo inicial $[-3, 5]$, pelo método da bisseção, ao fim de 20 iterações, é inferior ou igual a $\frac{5-(-3)}{2^{20}}=\frac{8}{2^{20}}\leqslant\delta$, logo o valor mínimo de δ é $\frac{8}{2^{20}}=\frac{1}{131\,072}$.

pág. 43

4. Seja f a função definida por $f(x)=e^x-2$. $\ln 2$ é o único zero de f.

f é contínua em $[0,\ 1]\subset\mathbb{R}$, por ser a diferença entre uma função exponencial e uma constante.

$f(0)=-1$ e $f(1)\approx 0{,}7$.

Logo, como $f(0)\times f(1)<0$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a solução da equação $f(x)=0$ pertence ao intervalo $]0,\ 1[$.

$\frac{1-0}{2^n} < 10^{-8} \iff 2^n > 10^8$

Como $2^n = 10^{-8} \iff n > \log_2(10^8)$ e $\log_2(10^8) \approx 26{,}6$, pretende-se que $n \geqslant 27$, ou seja, são necessárias 27 iterações, pelo menos.

Usando uma folha de cálculo, foi obtido o resultado parcialmente apresentado na tabela ao lado. Podemos concluir que a solução da equação no intervalo $[1, 2]$ é $\ln 2 \approx 0{,}693\,147\,18$.

	a	f(a)	b	f(b)	m	f(m)
1	0,00000000	-	1,00000000	+	0,50000000	-
2	0,50000000	-	1,00000000	+	0,75000000	+
			...			
26	0,69314715	-	0,69314718	+	0,69314717	-
27	0,69314717	-	0,69314718	+	0,69314718	-

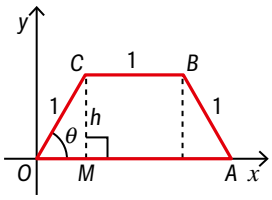
MMA12CAD © Porto Editora

5.1. $\sin\theta = \frac{\overline{CM}}{1}$, logo $h = \overline{CM} = \sin\theta$ e $\cos\theta = \frac{\overline{OM}}{1}$, logo $\overline{OM} = \cos\theta$,

pelo que $\overline{OA} = 1 + 2\cos\theta$.

$A(\theta) = \frac{\overline{OA} + \overline{CB}}{2} \times h \iff A(\theta) = \frac{1 + 2\cos\theta + 1}{2} \times \sin\theta \iff$

$\iff A(\theta) = (1 + \cos\theta)\sin\theta$



5.2. Seja $S(\theta) = A(\theta) - 1 = (1 + \cos\theta)\sin\theta - 1$. S é contínua em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, por ser o resultado de operações entre funções contínuas nesse intervalo.

$S\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx -0{,}07$ e $S\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0{,}21$, logo $S\left(\frac{\pi}{6}\right) \times S\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$.

Pretende-se que $\frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}}{2^n} < 10^{-3} \iff \frac{2^n}{\frac{\pi}{12}} > \frac{1}{10^{-3}} \iff 2^n > \frac{250\pi}{3}$.

Como $2^n = \frac{250\pi}{3} \iff n = \log_2\left(\frac{250\pi}{3}\right)$ e $\log_2\left(\frac{250\pi}{3}\right) \approx 8{,}03$, então $n \geqslant 9$.

Para obter a aproximação pedida são necessárias nove iterações que se apresentam na tabela ao lado.

$\theta \approx 0{,}575$ rad

	a	f(a)	b	f(b)	m	f(m)
1	0,5236	-	0,7854	+	0,6545	+
2	0,5236	-	0,6545	+	0,5890	+
3	0,5236	-	0,5890	+	0,5563	-
4	0,5563	-	0,5890	+	0,5727	-
5	0,5727	-	0,5890	+	0,5809	+
6	0,5727	-	0,5809	+	0,5768	+
7	0,5727	-	0,5768	+	0,5747	-
8	0,5747	-	0,5768	+	0,5758	+
9	0,5747	-	0,5758	+	0,5752	+

Ficha 19 Método de Newton-Raphson

pág. 44

1.1. $f(0) = -1$ e $f(1) \approx 0{,}63$. Como f é contínua em $[0, 1]$, por ser o resultado de operações entre funções contínuas, e $f(0) \times f(1) < 0$, f admite pelo menos um zero em $[0, 1]$.

1.2. $f'(x) = (x^2 - e^{-x}) = 2x + e^{-x}$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1 - e^{-1}}{2 + e^{-1}} \approx 0{,}733\,043\,6$; $|f(x_1)| \approx 0{,}056\,908 > 10^{-4}$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 0{,}733\,043\,6 - \frac{f(0{,}733\,043\,6)}{f'(0{,}733\,043\,6)} \approx 0{,}703\,807\,8$; $|f(x_2)| \approx 0{,}000\,647 > 10^{-4}$

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx 0{,}703\,807\,8 - \frac{f(0{,}7038078)}{f'(0{,}7038078)} \approx 0{,}703\,467\,5$; $|f(x_3)| \approx 0{,}000\,000\,15 < 10^{-4}$

O zero de f é, aproximadamente, igual a 0,7035.

2.1. Seja f a função definida por $f(x) = x^5 - 5x + 1$.

$f'(x) = 5x^4 - 5$

$f'(1) = 0$

Deste modo, o método não converge para $x_0 = 1$.

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ não está definido se $f'(x_0) = 0$.

MMA12CAD © Porto Editora

2.2. Observe-se a aplicação do método de Newton-Raphson numa folha de cálculo:

	x(n)	f(x(n))	f'(x(n))	x(n+1)
1	1,500000	1,09375	20,3125	1,446154
2	1,446154	0,094405	16,86895	1,440557

Ao fim de uma iteração, obtém-se $x_1 \approx 1{,}45$.

Ao fim de duas iterações, obtém-se $x_2 \approx 1{,}44$.

Assim, foram precisas apenas duas iterações deste método para se encontrar o mesmo valor aproximado que o obtido com dez iterações pelo método da bisseção.

3. Se $f(x) = x^3 - 2$, o único zero de f é $\sqrt[3]{2}$.

$f(1) = -1$ e $f(2) = 6$. Logo, o zero de f pertence ao intervalo $[1, 2]$.

$f'(x) = 3x^2$, pelo que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [1, 2]$.

Tomando para valor inicial $x_0 = 1$, obtemos, após três iterações, $x_3 \approx 1{,}259\,93$.

	x(n)	f(x(n))	f'(x(n))	x(n+1)	xi^3<10^(-4)?
1	1,0	-1,0	3	1,33333	FALSO
2	1,33333	0,37037	5,33333	1,26389	FALSO
3	1,26389	0,01896	4,79225	1,25993	VERDADEIRO

Este valor satisfaz o critério indicado: $|x_3{}^3 - 2| \approx |1{,}259\,93^3 - 2| \approx 0{,}000\,043 < 10^{-4}$

Logo, $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}259\,93$.

4.1. $f(1) = -1$ e $f(2) \approx 1{,}47$

Como f é contínua em $[1, 2]$, por ser o resultado de operações entre funções contínuas nesse intervalo, e $f(1) \times f(2) < 0$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, f admite pelo menos um zero em $[1, 2]$.

$f'(x) = 5 \times \frac{1}{x} - 1 = \frac{5 - x}{x}$

$f'(x) = 0 \iff 5 - x = 0 \wedge x \neq 0 \iff x = 5$

Dado que $f'(x) > 0$, $\forall x \in [1, 5]$, f é estritamente crescente em $[1, 2]$.

Logo, o zero de f em $[1, 2]$ é único.

4.2.

	x(n)	f(x(n))	f'(x(n))	x(n+1)	|x(n+1)-x(n)| <10^-6 ?	|f(x(n+1))| <10^-6?
1	2,0000000	1,465736	1,500000	1,0228427	FALSO	FALSO
2	1,0228427	-0,909914	3,888337	1,2568538	FALSO	FALSO
3	1,2568538	-0,113796	2,978187	1,2950635	FALSO	FALSO
4	1,2950635	-0,002265	2,860814	1,2958552	FALSO	VERDADEIRO
5	1,2958552	-0,000001	2,858456	1,2958555	VERDADEIRO	VERDADEIRO

Após cinco iterações, obtemos o valor $x_5 \approx 1{,}295\,855\,5$ que cumpre as condições de paragens definidas:

$|x_5 - x_4| \approx 3 \times 10^{-7} < 10^{-6}$ e $|f(x_5)| \approx 2{,}6 \times 10^{-8} < 10^{-6}$

Avaliação global do tema a pensar no Exame

Ficha 20 Avaliação global do tema a pensar no Exame

MMA12CAD © Porto Editora

pág. 46

1.1. $f'(x)=\left(\dfrac{1}{1+3e^{-x}}\right)'=\dfrac{3e^{-x}}{(1+3e^{-x})^2}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, pelo que f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

f não tem extremos relativos.

1.2. $f''(x)=\left(\dfrac{3e^{-x}}{(1+3e^{-x})^2}\right)'=\dfrac{-3e^{-x}(1+3e^{-x})^2-3e^{-x}\left[(1+3e^{-x})^2\right]'}{(1+3e^{-x})^4}=$

$=\dfrac{-3e^{-x}(1+3e^{-x})^2-3e^{-x}\times 2(1+3e^{-x})\times(-3e^{-x})}{(1+3e^{-x})^4}=\dfrac{(1+3e^{-x})\left[-3e^{-x}(1+3e^{-x})+18e^{-2x}\right]}{(1+3e^{-x})^4}=$

$=\dfrac{-3e^{-x}-9e^{-2x}+18e^{-2x}}{(1+3e^{-x})^3}=\dfrac{-3e^{-x}+9e^{-2x}}{(1+3e^{-x})^3}$

$f''(x)=0 \iff \dfrac{-3e^{-x}+9e^{-2x}}{(1+3e^{-x})^3}=0 \iff -3e^{-x}+9e^{-2x}=0 \wedge \underbrace{(1+3e^{-x})^3\neq 0}_{\text{condição universal}} \iff$

$\iff -3e^{-x}(1-3e^{-x})=0 \iff \underbrace{-3e^{-x}=0}_{\text{impossível}} \vee 1-3e^{-x}=0 \iff$

$\iff e^{-x}=\dfrac{1}{3} \iff -x=\ln\left(\dfrac{1}{3}\right) \iff x=-\ln\left(\dfrac{1}{3}\right) \iff x=\ln 3$

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
f''	+	0	−
f	⌣	$f(\ln 3)$	⌢

P. I.

$f(\ln 3)=\dfrac{1}{1+3e^{-\ln 3}}=\dfrac{1}{1+3\times 3^{-1}}=\dfrac{1}{2}$

O gráfico de f tem um único ponto de inflexão que é o ponto de coordenadas $\left(\ln 3, \dfrac{1}{2}\right)$.

2.1. **a)** $D_f=\{x\in\mathbb{R}: |x|>0\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

b) Se $x<0$, $|x|=-x$ e $f'(x)=[\ln(-x)]'=\dfrac{-1}{-x}=\dfrac{1}{x}<0$, logo f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$.

Se $x>0$, $|x|=x$ e $f'(x)=[\ln(x)]'=\dfrac{1}{x}>0$, logo f é estritamente crescente em $]0, +\infty[$.

2.2. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{+\infty}=0$, pelo que a reta de equação $y=0$ é assíntota ao gráfico de g, provando que o eixo Ox é uma assíntota ao gráfico de g.

MMA12CAD © Porto Editora

3. $g''(x) = f''(x) + 2$

(A) $g''(1) = 2 \times 1 - 2 + 2 = 2 \neq 0$

(B) $g''(1) = 2 - 2 \times 1 + 2 = 2 \neq 0$

(C) $g''(1) = -2 \times 1 + 2 = 0$, no entanto, g'' é positiva em $]-\infty, 1[$ e negativa em $]1, +\infty[$, porque $g''(x) = -2x + 2$.

(D) $g''(1) = 2 \times 1 - 4 + 2 = 0$ e g'' é negativa em $]-\infty, 1[$ e positiva em $]1, +\infty[$, porque $g''(x) = 2x - 4 + 2 = 2x - 2$.

Opção **(D)**

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g''	$-$	0	$+$
g'	$\searrow$	$g'(1)$	$\nearrow$
		Mín.	

4. Ordenada de P: $\sin\alpha$. Ordenada de Q: $f(\alpha) = e^{-\alpha}$.

Pretende-se determinar uma solução aproximada da equação

$\sin\alpha = e^{-\alpha} \iff \sin\alpha - e^{-\alpha} = 0 \iff g(\alpha) = 0$, em $[0{,}5\ ;\ 0{,}6] \subset \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, com $g(\alpha) = \sin\alpha - e^{-\alpha}$.

Como g é contínua em $[0{,}5\ ;\ 0{,}6]$, por ser o resultado de operações entre funções contínuas no seu domínio, e $g(0{,}5) \approx -0{,}13 < 0$ e $g(0{,}6) \approx 0{,}02 > 0$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe solução da equação no intervalo dado.

Como $g\left(\frac{0{,}5 + 0{,}6}{2}\right) = g(0{,}55) \approx -0{,}05 < 0$, o novo intervalo no início da segunda iteração é $[0{,}55\ ;\ 0{,}6]$.

A solução aproximada procurada é $\alpha \approx \frac{0{,}6 + 0{,}55}{2} = 0{,}575$.

Probabilidade

MMA12CAD © Porto Editora

Vamos recordar

Ficha 21 Geometria analítica

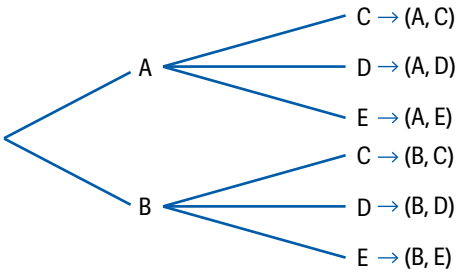
pág. 50

1.1. determinista

1.2. aleatório

2.1. $S = \{\text{sol, nuvens, chuva, trovoada}\}$

2.2. $S = \{(A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E)\}$



	C	D	E
A	(A , C)	(A , D)	(A , E)
B	(B , C)	(B , D)	(B , E)

3.1. $B = \{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 6\}$

3.2. $B = \{1\ ,\ 4\ ,\ 6\ ,\ 8\}$

4. **A:** Acontecimento composto
B: Acontecimento elementar
C: Acontecimento impossível

pág. 51

5.1. **a)** $M \cup A \cup R = S$
Significa que a reunião dos temas estudados pelos três é o conjunto de todos os temas a concurso.

b) $M \cap A = \{\text{Geografia}\}$
Significa que a Mariana e a Ana estudaram ambas apenas o tema "Geografia".

c) $\overline{R} = \{\text{História, Geografia, Ciência, Arte}\}$
Significa que o Rafael não estudou os temas "História", "Geografia", "Ciência" e "Arte".

5.2. M e R são disjuntos porque $M \cap R = \varnothing$. Não são complementares porque $M \cup R \neq S$.

6. $\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + p = 1 \Leftrightarrow p = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow p = \frac{3}{10}$

	Menos de 10 minutos	Entre 10 e 20 minutos	Mais de 20 minutos
Probabilidade	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$

MMA12CAD © Porto Editora

Ficha 22 Definição frequencista e propriedades da probabilidade

pág. 52

1.1. $f(\text{“Concretização da Ana”}) = \frac{56}{160} = 0{,}35$

$f(\text{“Concretização da Beatriz”}) = \frac{72}{225} = 0{,}32$

1.2. A frequência relativa de concretização das duas jogadoras foi muito próxima no treino, no entanto, como a probabilidade de concretização é maior para a Ana, é mais provável ter sido ela a concretizar o lançamento por apresentar maior frequência relativa.

2.1. Não é possível porque não sabemos quantas peças Lego existem na caixa. Designando por N esse valor, uma estimativa do número de peças vermelhas é $0{,}28N$.

2.2. $f(\overline{V}) = 1 - f(V) = 1 - 0{,}28 = 0{,}72$

2.3. $\frac{216}{N} = 0{,}72 \iff N = \frac{216}{0{,}72} \iff N = 300$ $\quad 300 - 216 = 84$ peças vermelhas

2.4. A frequência relativa oscila porque cada repetição é influenciada pelo acaso, produzindo pequenas variações nos resultados. Mesmo com muitas repetições, essas flutuações não desaparecem totalmente, apenas se tornam menores.

pág. 53

3. $\overline{A}$: “Sair um número ímpar.”

$A \cup B$: “Sair um número par ou maior que 5.”

$A \cap B$: “Sair um número par maior que 5.”

$A \cap \overline{B}$: “Sair um número par menor ou igual a 5.”

4.1. $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}61 = 0{,}39$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \iff P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}46 + 0{,}39 - 0{,}70 = 0{,}15$

4.2. $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}46 - 0{,}15 = 0{,}31$

4.3. Como $P(A \cup C) = P(\overline{A \cup C})$ e $A \cup C$ e $\overline{A \cup C}$ são acontecimentos complementares, então $P(A \cup C) = P(\overline{A \cup C}) = 0{,}5$. Como A e C são disjuntos, $P(A \cap C) = 0$, pelo que, de $P(A \cup C) = P(A) + P(C)$, tem-se $P(C) = P(A \cup C) - P(A) = 0{,}5 - 0{,}46 = 0{,}04$.

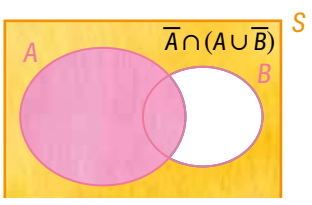
5. $P(\overline{\overline{A}}) = P(A) = 0{,}6$;

$6P(A \cap B) = 0{,}6 \iff P(A \cap B) = 0{,}1$;

$P(B) = \frac{P(A)}{2} = \frac{0{,}6}{2} = 0{,}3$;

$P(\overline{A} \cap (A \cup \overline{B})) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) =$

$= 1 - (0{,}6 + 0{,}3 - 0{,}1) = 0{,}2$



MMA12CAD © Porto Editora

Ficha 23 Regra de Laplace

pág. 54

1.1. $P(A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

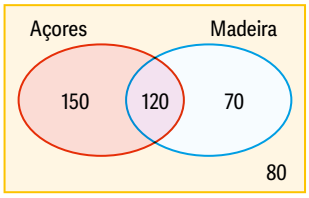
1.2. $P\left(A\cup\overline{B}\right)=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$

1.3. $P\left(\overline{A}\cap B\right)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

2. $P\left((A\cap B)\cup\overline{C}\right)=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$

pág. 55

3.1. N.º de alunos que vão aos Açores ou à Madeira: $420-80=340$
N.º de alunos que disseram ir aos Açores e à Madeira:
$270+190-340=120$
N.º de alunos que só vão aos Açores: $270-120=150$
N.º de alunos que só vão à Madeira: $190-120=70$



3.2. $P=\frac{120}{190}=\frac{12}{19}$

4. n: soma de lanternas verdes e roxas
$A\cap B=A$
$P(A\cap B)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{1500+n}{1200+900+1500+n}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow 3(1500+n)=2(3600+n)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4500+3n=7200+2n\Leftrightarrow 3n-2n=7200-4500\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n=2700$
A soma do número de lanternas verdes e roxas é 2700.

Ficha 24 Regra de Laplace com combinatória

MMA12CAD © Porto Editora

pág. 56

1. $P=\frac{5\times 4}{5+5\times 4}=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$

2.1. $P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

2.2. $P=\frac{2\times 2\times 2\times 3!}{{}^{6}A_{3}}=\frac{2}{5}$

2.3. $P=\frac{{}^{3}C_{1}\times {}^{4}C_{1}\times 3!}{{}^{6}A_{3}}=\frac{72}{120}=\frac{3}{5}$

3.1. $P=\frac{1\times {}^{6}A_{3}}{{}^{7}A_{4}}=\frac{120}{840}=\frac{1}{7}$

3.2. $P=\frac{{}^{5}C_{2}\times 4!}{{}^{7}A_{4}}=\frac{240}{840}=\frac{2}{7}$

3.3. $P=1-P(\text{“nenhuma de comunicação”})=1-\frac{4!}{{}^{7}A_{4}}=\frac{34}{35}$

pág. 57

4. $P=\frac{{}^{8}C_{1}\times {}^{3}C_{1}\times {}^{2}C_{1}}{{}^{8}A_{3}}=\frac{1}{7}$ ou $P=\frac{{}^{12}C_{1}\times 2!\times {}^{2}C_{1}}{{}^{8}A_{3}}=\frac{1}{7}$

5.1. N.º de arranjos clássicos: dos 6 tipos de flores escolhe 3, sem interessar a ordem, por isso, ${}^{6}C_{3}$.
N.º de arranjos compactos: podem ter ou só 1 tipo de flores, ou só 2 tipos de flores, ou só 3 tipos de flores ou 4 tipos de flores.
Só com 1 tipo de flores: ${}^{6}C_{1}$.
Com 2 tipos de flores: dos 6 tipos de flores escolhemos dois, sem interessar a ordem, e depois há três formas de as distribuir, $3+1$, $2+2$ ou $1+3$: ${}^{6}C_{2}\times 3$.
Com 3 tipos de flores: dos 6 tipos de flores escolhemos três, sem interessar a ordem e depois há três formas de as distribuir, $2+1+1$, $1+2+1$ ou $1+1+3$: ${}^{6}C_{3}\times 3$.
Com 4 tipos de flores: dos 6 tipos de flores escolhemos quatro, sem interessar a ordem, ${}^{6}C_{4}$.

5.2. **a)** $P=\frac{{}^{6}C_{3}}{{}^{6}C_{3}+{}^{6}C_{1}+{}^{6}C_{2}\times 3+{}^{6}C_{3}\times 3+{}^{6}C_{4}}=\frac{20}{146}=\frac{10}{73}$

b) $P=\frac{{}^{6}C_{2}\times 3}{146}=\frac{45}{146}$

MMA12CAD © Porto Editora

Ficha 25 Probabilidade condicionada. Tabelas de contingência

pág. 58

1.1. $P(D)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$

1.2. $P(\overline{D})=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}=1-P(D)$

1.3. $P(M)=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$

1.4. $P(\overline{M})=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}=1-P(M)$

1.5. $P(D\cup M)=\frac{18+22+32}{100}=\frac{18}{25}$

1.6. $P(\overline{D}\cup M)=\frac{32+28+18}{100}=\frac{39}{50}$

1.7. $P(D\cup\overline{M})=\frac{18+22+28}{100}=\frac{17}{25}$

1.8. $P(\overline{D}\cup\overline{M})=\frac{32+28+22}{100}=\frac{41}{50}$

1.9. $P(D\cap M)=\frac{18}{100}=\frac{9}{50}$

1.10. $P(\overline{D}\cap M)=\frac{32}{100}=\frac{8}{25}$

1.11. $P(D\cap\overline{M})=\frac{22}{100}=\frac{11}{50}$

1.12. $P(\overline{D}\cap\overline{M})=\frac{28}{100}=\frac{7}{25}$

1.13. $P(D|M)=\frac{18}{50}=\frac{9}{25}$

1.14. $P(\overline{D}|M)=\frac{32}{50}=\frac{16}{25}=1-P(D|M)$

1.15. $P(D|\overline{M})=\frac{22}{50}=\frac{11}{25}$

1.16. $P(\overline{D}|\overline{M})=\frac{28}{50}=\frac{14}{25}=1-P(D|\overline{M})$

1.17. $P(M|D)=\frac{18}{40}=\frac{9}{20}$

1.18. $P(\overline{M}|D)=\frac{22}{40}=\frac{11}{20}=1-P(M|D)$

1.19. $P(M|\overline{D})=\frac{32}{60}=\frac{8}{15}$

1.20. $P(\overline{M}|\overline{D})=\frac{28}{60}=\frac{7}{15}=1-P(M|\overline{D})$

pág. 59

2. Quer-se determinar a probabilidade de o segundo cartão não ter um número primo sabendo que o primeiro cartão foi amarelo e com o número 1 por ser o menor divisor da idade do Mário (1 é o menor divisor de todos os números naturais).
Assim, depois da primeira extração, restam $20-1=19$ cartões – número de casos possíveis – dos quais 3 vermelhos (números 1, 4 e 6) e 7 amarelos (números 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14) não têm um número primo – número de casos favoráveis é $3+7=10$.
Assim, $P(\overline{C}|A\cap B)=\frac{10}{19}$.

3.1. $P(R)=3P(\overline{R})$; $P(T|R)=0{,}25$; $P(T|\overline{R})=\frac{2}{5}$

$P(R)+P(\overline{R})=1 \iff 3P(\overline{R})+P(\overline{R})=1 \iff P(\overline{R})=\frac{1}{4} \implies P(R)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$P(R\cap T)=0{,}25\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$

$P(R\cap\overline{T})=\frac{3}{4}-\frac{3}{16}=\frac{9}{16}$

$P(\overline{R}\cap T)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$

$P(\overline{R}\cap\overline{T})=\frac{1}{4}-\frac{1}{10}=\frac{3}{20}$

	R	$\overline{R}$	Total
T	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{23}{80}$
$\overline{T}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{57}{80}$
Total	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

3.2. $P(\overline{R}|T)=\frac{P(\overline{R}\cap T)}{P(T)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{23}{80}}=\frac{8}{23}$

MMA12CAD © Porto Editora

Ficha 26 Probabilidade condicionada. Árvore de probabilidade

pág. 60

1.1. Problema I: $P(A \cap B) = 0{,}2$

Problema II: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

1.2. Problema I: $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}2}{0{,}3} = \frac{2}{3}$

Problema II: $P(B|A) = \frac{1}{2}$

1.3. Problema I: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3}$

Problema II: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3}$

2.1. $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) = 0{,}2 \times (1 - 0{,}8) = 0{,}04 = 4\%$

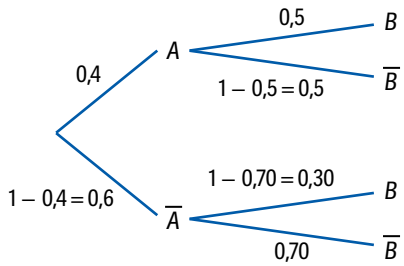
2.2. De um saco com bolas amarelas e brancas, indistinguíveis ao tato, tiram-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas.

Sabe-se que a probabilidade de a primeira bola ser amarela é 20%, a da segunda bola ser branca, sabendo que a primeira foi amarela, é 80% e a da segunda bola ser branca se a primeira também foi branca é 25%.

Calcule a probabilidade de as duas bolas retiradas serem amarelas.

pág. 61

3.



$P(\overline{B}) = P(\overline{B} \cap A) + P(\overline{B} \cap \overline{A}) =$

$= 0{,}4 \times 0{,}5 + 0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}62$

4. $P(B) = 0{,}36$; $P(\overline{B}|A) = 0{,}4$; $P(B \cap \overline{A}) = 0{,}1$; $P(\overline{B}|\overline{A}) = ?$

$P(\overline{B}|A) = 0{,}4 \iff P(\overline{B} \cap A) = 0{,}4P(A) = 0{,}4k$

$P(A \cap B) = 0{,}36 - 0{,}1 = 0{,}26$

$k = 0{,}4k + 0{,}26 \iff 0{,}6k = 0{,}26 \iff k = \frac{13}{30} = P(A)$

$P(\overline{A}) = 1 - k = 1 - \frac{13}{30} = \frac{17}{30}$ e $P(\overline{B} \cap \overline{A}) = \frac{17}{30} - 0{,}1 = \frac{7}{15}$

$P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{7}{15}}{\frac{17}{30}} = \frac{14}{17}$

	B	$\overline{B}$	Total
A	0,26	$0{,}4k$	k
$\overline{A}$	**0,1**		
Total	**0,36**		**1**

Ficha 27 Acontecimentos independentes

MMA12CAD © Porto Editora

pág. 62

1.1. Como há reposição da primeira bola, a composição do saco mantém-se inalterada na segunda extração. Assim, a probabilidade de a segunda bola ser vermelha não depende do resultado da primeira extração.

1.2. **a)** $P(\overline{B}|A) = P(\overline{B}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

b) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{1}{4}$

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{10} + \frac{5}{10} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

2.1. $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \times P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A) \times P(\overline{B})$

2.2. Como A e B são independentes, $P(A|B) = P(A)$ e $P(A|\overline{B}) = P(A)$, logo:

$P(A|B) + P(A|\overline{B}) = 1 \iff P(A) + P(A) = 1 \iff 2P(A) = 1 \iff P(A) = \frac{1}{2}$

2.3. $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} + P(A \cap \overline{B}) = \frac{P(A) \times \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} + P(A \cap \overline{B}) = P(A) + P(A) \times P(\overline{B}) = P(A)[1 + P(\overline{B})] =$

$= P(A)[1 + 1 - P(B)] = P(A)[2 - P(B)]$

pág. 63

3.1. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}85 \times 0{,}70 = 0{,}595$

3.2. $P(A|\overline{B}) = P(A) = 0{,}85$

3.3. $P(C|A) = P(\overline{B}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$ e $P(C) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}595 = 0{,}405$.

Como $P(C|A) \neq P(C)$, os acontecimentos A e C não são independentes.

4. $P(A \cap B) = \frac{{}^4C_1 + {}^4C_2 \times {}^2C_1}{{}^6C_3} = \frac{4}{5}$ e $P(A) \times P(B) = 1 \times \frac{{}^4C_2 \times {}^2C_1 + {}^4C_1}{{}^6C_3} = \frac{4}{5}$,

logo, como $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, os acontecimentos A e B são independentes.

5. n é par $\iff (A \cap B)$ ou $(\overline{A} \cap \overline{B})$

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$ e $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$P(n \text{ é par}) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$

Ficha 28 Modelos de probabilidade em espaços finitos

MMA12CAD © Porto Editora

pág. 64

1.

x_i	-1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$	$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

		Dado azul					
		1	2	3	4	5	6
Dado vermelho	1	-1	2	-1	-1	2	-1
	2	2	-1	-1	2	-1	-1
	3	-1	-1	2	-1	-1	2
	4	-1	2	-1	-1	2	-1
	5	2	-1	-1	2	-1	-1
	6	-1	-1	2	-1	-1	2

2.1. $P(X=3)=1-0{,}15-0{,}45-0{,}30=0{,}10$.

Significa que a probabilidade de receber 3 chamadas nesse intervalo de tempo é $0{,}10$.

2.2. **a)** $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-0{,}15=0{,}85$

b) $P(X\leqslant 2)=1-P(X=3)=1-0{,}10=0{,}90$

3. $\begin{cases}0{,}2+a+b+0{,}1=1\\ a+2b+3\times 0{,}1=1{,}2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0{,}7-b\\ 0{,}7-b+2b=0{,}9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0{,}7-0{,}2\\ b=0{,}2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0{,}5\\ b=0{,}2\end{cases}$

$P(X>1{,}2)=P(X=2)+P(X=3)=0{,}2+0{,}1=0{,}3$

pág. 65

4.1. $x_i\in\{1\,,\,2\,,\,3\}$

4.2.

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,2	0,6	0,2

$P(X=1)=\frac{4\times 3!}{{}^6A_3}=0{,}2$;

$P(X=2)=\frac{{}^4C_2\times{}^2C_1\times 3!}{{}^6A_3}=0{,}6$;

$P(X=3)=1-0{,}2-0{,}6=0{,}2$

5.1. Processo A: $0\times 0{,}25+1\times 0{,}50+2\times 0{,}25=1$

Processo B: $0\times 0{,}10+1\times 0{,}80+2\times 0{,}10=1$

5.2. Processo A: $\sqrt{(0-1)^2\times 0{,}25+(1-1)^2\times 0{,}50+(2-1)^2\times 0{,}25}\approx 0{,}71$

Processo B: $\sqrt{(0-1)^2\times 0{,}10+(1-1)^2\times 0{,}80+(2-1)^2\times 0{,}10}\approx 0{,}45$

Como o desvio-padrão é inferior no processo B, conclui-se que este é mais regular, isto é, apresenta menor variabilidade no número de defeitos, por semana.

6. $x_i\in\{-2\,,\,-1\,,\,1\,,\,2\,,\,4\}$

Como $X>0$, só são possíveis os produtos positivos, isto é, 1, 2 e 4.

Há $2\times 3=6$ pares com produto 2 $(=2\times 1)$ e ${}^5C_2+{}^2C_2+6+{}^3C_2=20$ pares com produto positivo,

logo, $P(X=2\,|\,X>0)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$.

${}^5C_2$ → produto 1; ${}^2C_2+6$ → produto 2; ${}^3C_2$ → produto 4

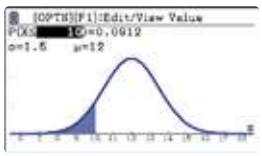
Ficha 29 Modelo Normal

MMA12CAD © Porto Editora

pág. 66

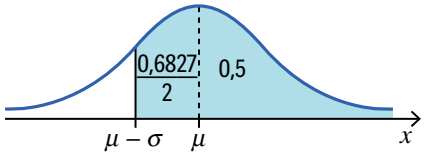
1. $X \sim N(12\,;\,1{,}5)$

$P(X<10) \approx 0{,}091$



2. $X \sim N(\mu\,;\,\sigma)$

$P(X>\mu-\sigma) = \frac{0{,}6827}{2} + 0{,}5 \approx 0{,}841$



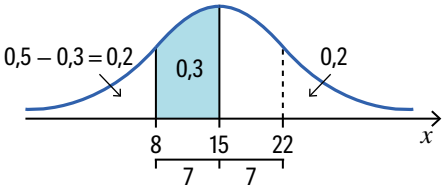
3. $X \sim N(15\,;\,\sigma)$

$8 = 15 - 7$

$22 = 15 + 7$

$P(X<8 \vee X>22) = 2P(X<8) = 2\times(0{,}5-0{,}3) = 0{,}4$

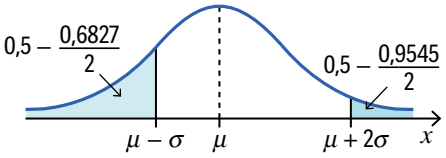
↳ pela simetria da curva



4.1. $X \sim N(\mu\,;\,\sigma)$

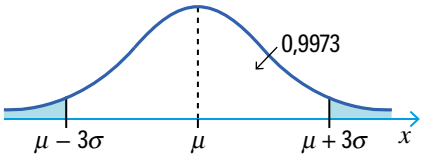
$P(X \notin [\mu-\sigma, \mu+2\sigma]) = P(X<\mu-\sigma \vee X>\mu+2\sigma) =$

$= 0{,}5 - \frac{0{,}6827}{2} + 0{,}5 - \frac{0{,}9545}{2} \approx 0{,}182$



4.2. $P(|X-\mu|>3\sigma) = P(X-\mu>3\sigma \vee X-\mu<-3\sigma) =$

$= P(X>\mu+3\sigma \vee X<\mu-3\sigma) = 1 - 0{,}9973 \approx 0{,}003$



5. Como $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma) \approx 0{,}9545$, tem-se que

$P(X>\mu+\sigma) \approx \frac{1-0{,}9545}{2} = 0{,}02275 = 2{,}275\%$, por exemplo.

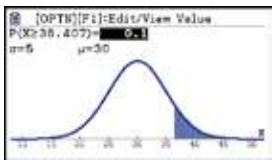
Logo, o intervalo pedido pode ser $]\mu+\sigma, +\infty[$ (ou $]-\infty, \mu-\sigma[$, por exemplo).

pág. 67

6. $X \sim N(30\,;\,5)$

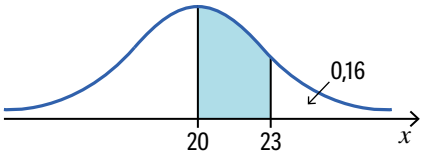
Quer-se determinar o valor de k tal que $P(X \geqslant k) = 0{,}1$.

Recorrendo à calculadora gráfica, verifica-se que $k \approx 36$ minutos.



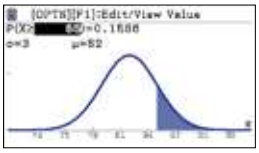
7. $X \sim N(20\,;\,\sigma)$

$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(20<X<23)}{P(X>20)} = \frac{0{,}5-0{,}16}{0{,}5} = \frac{0{,}34}{0{,}5} = 0{,}68$

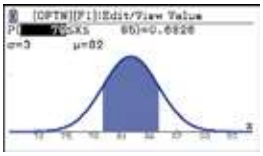


8.1. **a)** $X \sim N(82\,;\,3)$

$P(X>85) \approx 0{,}159$



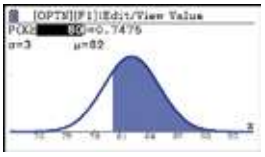
b) $P(79 \leqslant X \leqslant 85) \approx 0{,}683$



8.2. $P(X \geqslant 80) \approx 0{,}7475$

$0{,}7475 \times 500 \approx 374$

Prevê-se que cerca de 374 habitantes da região vivam pelo menos 80 anos com boa saúde.



Avaliação global do tema a pensar no Exame

Ficha 30 Avaliação global do tema a pensar no Exame

MMA12CAD © Porto Editora

pág. 68

1. A partir do gráfico, conclui-se que $P(C) \approx 0{,}25$, logo, a face 4 é a face com maior probabilidade de sair. A probabilidade de sair qualquer outra face é, aproximadamente, $\frac{1-0{,}25}{5} = 0{,}15$, logo, a probabilidade de sair um número superior a 4 é, aproximadamente, $0{,}15 \times 2 = 0{,}30$.

Opção **(C)**.

2. $2P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A \cap \overline{B}) - 2P(B) =$
$= 2(P(A) + P(B) - P(A \cap B)) + P(A \cap B) - (P(A) - P(A \cap B)) - 2P(B) =$
$= 2P(A) + 2P(B) - 2P(A \cap B) + P(A \cap B) - P(A) + P(A \cap B) - 2P(B) =$
$= P(A)$

3. $X \sim N(\mu, \sigma)$

Como $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$, então, por simetria da curva Normal, a probabilidade nas suas duas caudas é $1 - 0{,}9545 = 0{,}0455$ e, por simetria, $P(X > \mu + 2\sigma) \approx \frac{0{,}0455}{2} = 0{,}022\,75$, logo $a = \mu + 2\sigma$.

Opção **(D)**.

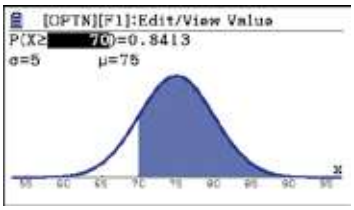
4. $\sigma^2 = 25$, logo, $\sigma = \sqrt{25} = 5$

$X \sim N(75\,;\,5)$

$P(X \geqslant 70) \approx 0{,}8413$

$600 \times 0{,}8413 \approx 505$

Estima-se que cerca de 505 utentes do centro de saúde, de entre os 600 vacinados, apresentem um nível de imunidade de pelo menos 70 no índice padronizado.



pág. 69

5.1. $P(A) = 0{,}7$; $P(\overline{B}) = 0{,}5$; $P(A \mid \overline{B}) = 0{,}8$

$P(A \mid \overline{B}) = 0{,}8 \iff \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = 0{,}8 \iff$

$\iff P(A \cap \overline{B}) = 0{,}8 \times 0{,}5 \iff P(A \cap \overline{B}) = 0{,}4$

$P(A \cap B) = 0{,}7 - 0{,}4 = 0{,}3$

	B	$\overline{B}$	Total
A	0,3	0,4	**0,7**
$\overline{A}$	0,2	0,1	0,3
Total	**0,5**	0,5	**1**

Como $P(A) \times P(B) = 0{,}7 \times 0{,}5 = 0{,}35 \neq P(A \cap B)$, os acontecimentos A e B não são independentes.

5.2. $P(B \mid \overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}2}{0{,}3} = \frac{2}{3}$

6. Como $\overrightarrow{AB} = B - A = (2\,,1\,,0) - (1\,,-1\,,-2) = (1\,,2\,,2)$ e $A \in \alpha$ porque $1 + 2 \times (-1) + 2 \times (-2) + 5 = 0$, α coincide com o plano ADE, logo, são quatro os vértices do cubo que pertencem ao plano dado.

$x_i \in \{0\,,\,1\,,\,2\}$

$P(X=0) = \frac{{}^4C_2}{{}^8C_2} = \frac{3}{14}$, $P(X=1) = \frac{{}^4C_1 \times {}^4C_1}{{}^8C_2} = \frac{4}{7}$ e $P(X=2) = \frac{{}^4C_2}{{}^8C_2} = \frac{3}{14}$

$\mu = 0 \times \frac{3}{14} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{3}{14} = 1$.

O valor médio de X é 1.

Números complexos

Ficha 31 Forma algébrica de um número complexo

MMA12CAD © Porto Editora

pág. 72

1. $z \longrightarrow C$, $\bar{z} - 2\mathrm{i} \longrightarrow A$, $-z - 2\mathrm{i} \longrightarrow D$ e $|z|z \longrightarrow B$

2.
- Se $\alpha = \beta = 0$, $z = \frac{\mathrm{i}}{1} = \mathrm{i}$ que é um imaginário puro.
- Se $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0$:

$z = \frac{(\alpha + \mathrm{i})(1 - \beta\mathrm{i})}{(1 + \beta\mathrm{i})(1 - \beta\mathrm{i})} = \frac{\alpha + \beta + (1 - \alpha\beta)\mathrm{i}}{1 + \beta^2} = \frac{\alpha + \beta}{1 + \beta^2} + \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \beta^2}\mathrm{i}$

Logo, z é imaginário puro se e só se:

$\mathrm{Re}(z) = 0 \wedge \mathrm{Im}(z) \neq 0 \iff \frac{\alpha + \beta}{1 + \beta^2} = 0 \wedge \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \beta^2} \neq 0 \underset{1 + \beta^2 \neq 0}{\iff} \alpha + \beta = 0 \wedge 1 - \alpha\beta \neq 0 \iff$

$\iff \alpha = -\beta \wedge \alpha\beta \neq 1 \iff \alpha = -\beta$

3.
- $(1 + \mathrm{i})^4 = \left[(1 + \mathrm{i})^2\right]^2 = \left(1 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2\right)^2 = (2\mathrm{i})^2 = 2^2 \times \mathrm{i}^2 = -4$
- $\frac{(1 + \mathrm{i})^4}{2 - 2\mathrm{i}} = \frac{-4}{2 - 2\mathrm{i}} = \frac{-4(2 + 2\mathrm{i})}{(2 - 2\mathrm{i})(2 + 2\mathrm{i})} = \frac{-8 - 8\mathrm{i}}{4 - (2\mathrm{i})^2} = \frac{-8 - 8\mathrm{i}}{4 + 4} = \frac{-8 - 8\mathrm{i}}{8} = -1 - \mathrm{i}$
- $\mathrm{i}^7 = \mathrm{i}^{4+3} = \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$
- $z = \frac{(1 + \mathrm{i})^4}{2 - 2\mathrm{i}} + \mathrm{i}^7 = -1 - \mathrm{i} - \mathrm{i} = -1 - 2\mathrm{i}$
- $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(-1 - 2\mathrm{i}) = -2$; $\mathrm{Re}(\mathrm{i}z) = \mathrm{Re}(\mathrm{i}(-1 - 2\mathrm{i})) = \mathrm{Re}\left(-\mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2\right) = \mathrm{Re}(-\mathrm{i} + 2) = 2$
- $\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(\mathrm{i}z)} = \frac{-2}{2} = -1$

$1 + \mathrm{i}^2 = 1 - 1 = 0$

4. Seja $z = a + b\mathrm{i}$, a, $b \in \mathbb{R}$.

$z + \bar{z} = a + b\mathrm{i} + a - b\mathrm{i} = 2a$. Como $z + \bar{z} = 2 \iff 2a = 2$, logo, $a = \frac{2}{2} = 1$.

De $|z - 1| = |1 + b\mathrm{i} - 1| = |0 + b\mathrm{i}| = \sqrt{0^2 + b^2}$.

Como $|z - 1| = 2 \iff \sqrt{b^2} = 2$, tem-se que $b^2 = 4$, logo, $b = \pm 2$.

Existem assim dois números complexos z nas condições pedidas: $z = 1 - 2\mathrm{i}$ e $z = 1 + 2\mathrm{i}$.

pág. 73

5. Sejam $z = a + b\mathrm{i}$, a, $b \in \mathbb{R}$ e $\bar{z} = a - b\mathrm{i}$.

$z + k\bar{z} = a + b\mathrm{i} + k(a - b\mathrm{i}) = (1 + k)a + (1 - k)b\mathrm{i}$.

Como $z + k\bar{z} = 1 + \mathrm{i} \iff (1 + k)a + (1 - \mathrm{k})b\mathrm{i} = 1 + \mathrm{i}$

$\begin{cases} (1 + k)a = 1 \\ (1 - k)b = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k \neq -1 \\ k \neq 1 \end{cases}$

$k \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$, $a = \frac{1}{1 + k}$, $b = \frac{1}{1 - k}$ e $z = \frac{1}{1 + k} + \frac{1}{1 - k}\mathrm{i}$

6. $z^2 - 2\mathrm{i}z = -5 \iff z^2 - 2\mathrm{i}z + 5 = 0 \iff z = \frac{2\mathrm{i} \pm \sqrt{(-2\mathrm{i})^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1} \iff$

$\iff z = \frac{2\mathrm{i} \pm \sqrt{-4 - 20}}{2} \iff z = \frac{2\mathrm{i} \pm \sqrt{-24}}{2} \iff$

$\iff z = \frac{2\mathrm{i} \pm 2\sqrt{6}\mathrm{i}}{2} \iff z = \mathrm{i} \pm \sqrt{6}\mathrm{i} \iff z = (1 \pm \sqrt{6})\mathrm{i}$

MMA12CAD © Porto Editora

7. Seja $z=a+b\text{i}$, a, $b\in\mathbb{R}$.

- $\dfrac{z-2\text{i}}{1+\text{i}}=\dfrac{a+b\text{i}-2\text{i}}{1+\text{i}}=\dfrac{a+(b-2)\text{i}}{1+\text{i}}=\dfrac{(a+(b-2)\text{i})(1-\text{i})}{(1+\text{i})(1-\text{i})}=$
$=\dfrac{a+(b-2)\text{i}-a\text{i}+(b-2)}{1^2-\text{i}^2}=\dfrac{a+b-2+(b-a-2)\text{i}}{2}$
- $\bar{z}+\text{i}=a-b\text{i}+\text{i}=a+(1-b)\text{i}$
De $\dfrac{a+b-2}{2}=a\wedge\dfrac{b-a-2}{2}=1-b\iff a=b-2\wedge 3b-(b-2)-2=2\iff$
$\iff a=b-2\wedge 2b=2\iff a=1-2\wedge b=1\iff a=-1\wedge b=1$ vem que $z=-1+\text{i}$.

8. $z^3-13z^2+57z-85=0\iff(z-5)(z^2-8z+17)=0\iff$
$\iff z=5\vee z^2-8z+17=0\iff$
$\iff z=5\vee z=\dfrac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\times1\times17}}{2\times1}\iff z=5\vee z=4\pm\text{i}$

	1	−13	57	−85
5		5	−40	85
	1	−8	17	0

$A(4,-1)$, $B(5,0)$, $C(4,1)$.

Área: $2\times\dfrac{\overline{OB}\times y_C}{2}=5\times1=5$ u. a.

Ficha 32 Forma trigonométrica de um número complexo

pág. 74

1. $\rho=\text{e}$ e $\theta=90°+120°=210°=\dfrac{7\pi}{6}$. Logo, $z=\text{e}\times\text{e}^{\text{i}\frac{7\pi}{6}}$.

2. $|z|=\rho=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+4\times3}=4$ e $\begin{cases}\tan\theta=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\\(2,2\sqrt{3})\in 1.º\text{ Q.}\end{cases}\implies\arg(z)=\dfrac{\pi}{3}$. Logo, $z=4\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

Assim, $z\times w=4\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\times2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}=8\text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)}=8\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$.

Logo, $u=\sqrt[3]{z\times w}=\sqrt[3]{8\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}}=2\text{e}^{\text{i}\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}}=2\text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$, $k\in\{0,1,2\}$.

Assim, $u_0=2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$, $u_1=2\text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$ e $u_2=2\text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)}=2\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{2}}$.

O único número complexo com parte imaginária negativa é o de argumento $\dfrac{3\pi}{2}$: $u_2=2\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{2}}=-2\text{i}$.

3. Seja $z=\rho\text{e}^{\text{i}\theta}$. De $|z|=4$ tem-se que $\rho=4$.

De $\dfrac{z^2\bar{z}}{|z|^3}=\dfrac{\left(\rho\text{e}^{\text{i}\theta}\right)^2\times\left(\rho\text{e}^{-\text{i}\theta}\right)}{\rho^3}=\dfrac{4^2\times\text{e}^{2\text{i}\theta}\times4\times\text{e}^{-\text{i}\theta}}{4^3}=\text{e}^{\text{i}(2\theta-\theta)}=\text{e}^{\text{i}\theta}$.

Como $\dfrac{z^2\bar{z}}{|z|^3}=\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}\iff\text{e}^{\text{i}\theta}=\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$, tem-se que $\theta=\dfrac{5\pi}{6}$, por exemplo.

Logo $z=4\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}=4\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+\text{i}\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)=4\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\text{i}\dfrac{1}{2}\right)=-2\sqrt{3}+2\text{i}$.

pág. 75

4. $\bar{z}=\overline{\rho\text{e}^{\text{i}\theta}}=\rho\text{e}^{-\text{i}\theta}$. Como $\rho\text{e}^{-\text{i}\theta}=2\times2\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$, tem-se que $\rho=4\wedge-\theta=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Como $\theta=-\dfrac{5\pi}{6}-2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}\wedge\theta\in]-\pi,\pi]$, para $k=0$ obtém-se $\theta=-\dfrac{5\pi}{6}$.

5. $|\text{i}z|=|z|\implies|z|=2$

Como a multiplicação por i corresponde a uma rotação de $90°$ no sentido positivo, como o afixo de iz pertence ao semieixo negativo Oy, o afixo de z pertence ao semieixo negativo Ox.

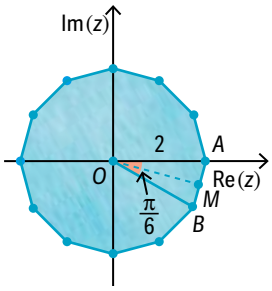
Logo, $z=-2=2\text{e}^{\text{i}\pi}$.

6.1. $\frac{\pi}{6}=k\times\frac{2\pi}{n} \implies n=12k$, $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, ou seja, n pode ser 12, 24, 36, ...

6.2. Para $n=12$, os afixos das raízes de índice 12 de w estão sobre uma circunferência de centro O e raio 2, formando um dodecágono regular.
Designando por M o ponto médio de $[AB]$, a área do polígono é dada por:

$$12\times\frac{\overline{AB}\times\overline{MO}}{2}=12\times\frac{2\overline{MA}\times\overline{MO}}{2}=12\times\overline{MA}\times\overline{MO}=$$

$$=12\times\underbrace{2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{\overline{MA}}\times\underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{\overline{MO}}=12$$



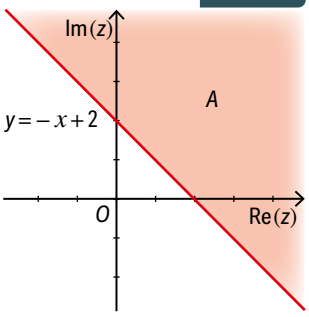
MMA12CAD © Porto Editora

$$M\hat{O}A=\frac{\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{\pi}{12};\quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\overline{MA}}{\overline{OA}}\iff\overline{MA}=2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right);\quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\overline{MO}}{\overline{OA}}\iff\overline{MO}=2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Ficha 33 Conjuntos definidos por condições na variável complexa

pág. 76

1. $(1-\mathrm{i})z=(1-\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})=x+y\mathrm{i}-x\mathrm{i}-y\mathrm{i}^2=(x+y)+(-x+y)\mathrm{i}$,
logo, $\mathrm{Re}((1-\mathrm{i})z)\geqslant 2 \iff x+y\geqslant 2 \iff y\geqslant -x+2$.
Assim, $y=-x+2$ é a equação cartesiana, ou reduzida, da reta que delimita o conjunto A, que se encontra representado na figura ao lado, sendo A o semiplano definido por $y\geqslant -x+2$.



2. Seja $z=x+y\mathrm{i}$, x, $y\in\mathbb{R}$.
A condição $|z-1+\mathrm{i}|=|z+1+\mathrm{i}| \iff |z-(1-\mathrm{i})|=|z-(-1-\mathrm{i})|$ define os pontos que estão à mesma distância dos afixos de $1-\mathrm{i}$ e de $-1-\mathrm{i}$, pelo que o conjunto B define a mediatriz do segmento de reta que une esses pontos.
Como esses pontos têm a mesma ordenada e abcissas simétricas, a mediatriz é definida por $x=0$.
A condição $|z-1+\mathrm{i}|=2 \iff |z-(1-\mathrm{i})|=2$ define a circunferência centrada no ponto de coordenadas $(1,-1)$ e raio 2, que também pode ser definida por $(x-1)^2+(y+1)^2=4$.

$(x-1)^2+(y+1)^2=4\wedge x=0 \iff (-1)^2+(y+1)^2=4\wedge x=0 \iff$

$\iff (y+1)^2=3\wedge x=0 \iff y+1=\pm\sqrt{3}\wedge x=0 \iff y=-1\pm\sqrt{3}\wedge x=0 \iff$

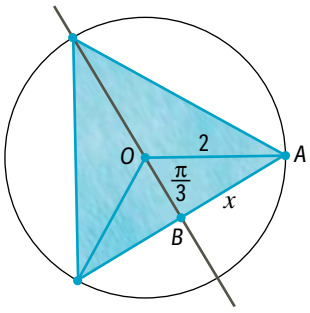
$\iff \left(y=-1+\sqrt{3}\vee y=-1-\sqrt{3}\right)\wedge x=0$

Assim, $B\cap C=\left\{(-1+\sqrt{3})\mathrm{i},\ (-1-\sqrt{3})\mathrm{i}\right\}$.

3. $z=\sqrt[3]{8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 0}}=\sqrt[3]{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{3}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{3}}$, $k\in\{0,1,2\}$.
Os afixos das soluções da equação formam um triângulo equilátero inscrito numa circunferência centrada na origem e de raio 2.

Do esquema ao lado tem-se que $B\hat{O}A=\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$.

Como $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{x}{2} \iff x=2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$,
o comprimento do lado do triângulo é $2x=2\sqrt{3}$ e o perímetro do triângulo cujos vértices são os afixos das soluções da equação dada é $3\times(2\sqrt{3})=6\sqrt{3}$ u. c.



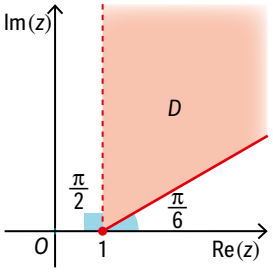
MMA12CAD © Porto Editora

4.1. $\text{Arg}(z-1)=\text{Arg}(1+\sqrt{3}+\text{i}-1)=\text{Arg}(\sqrt{3}+\text{i})\in 1.^{\text{o}}\,\text{Q}$.

$\tan\left(\text{Arg}(\sqrt{3}+\text{i})\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\wedge\text{Arg}(\sqrt{3}+\text{i})\in 1.^{\text{o}}\,\text{Q}$.

$\Longrightarrow\ \text{Arg}(\sqrt{3}+\text{i})=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right[$, logo, $z\in D$.

4.2.



pág. 77

5. Raio da circunferência:

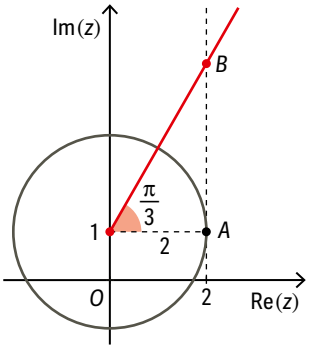
$A(0\,,\,-1)$ e $B(3\,,\,1)$

$\overline{AB}=\sqrt{(0-3)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{13}$

Condição que define E: $|z+\text{i}|<\sqrt{13}\wedge-\frac{\pi}{2}\leqslant\text{Arg}(z+\text{i})<\frac{\pi}{4}\wedge\text{Im}(z)\leqslant 1$

$\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$

6.1. F é a reunião dos pontos da circunferência de centro no afixo de i e raio 2 com os pontos da semirreta com origem no afixo de i e que forma com a parte positiva do eixo real um ângulo de amplitude $\frac{\pi}{3}$.



6.2. $A(2\,,\,1)\longrightarrow z=2+\text{i}$

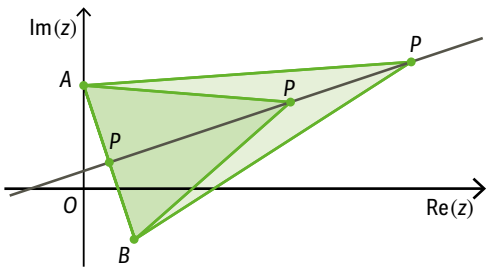
$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\overline{AB}}{2}\iff\overline{AB}=2\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}$,

logo, $B(2\,,\,1+2\sqrt{3})\longrightarrow z=2+(1+2\sqrt{3})\text{i}$.

Os elementos de F com parte real 2 são, na forma algébrica, $z=2+\text{i}$ e $z=2+(1+2\sqrt{3})\text{i}$.

7.1. Condição pedida: $\text{Re}(z)>0$

7.2. O afixo de z pertence à mediatriz do segmento de reta $[AB]$, com $A(0\,,\,2)$, que é o afixo de 2i e $B(1\,,\,-1)$, que é o afixo de $1-\text{i}$, exceto na reta AB, para formar o triângulo $[ABP]$, sendo P o afixo de z.



- Mediatriz de $[AB]$: $|z-2\text{i}|=|z-1+\text{i}|$
- Ponto de interseção da mediatriz de $[AB]$ com a reta AB é o ponto médio de $[AB]$ e que tem coordenadas $P\left(\frac{0+1}{2},\ \frac{2-1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ que é o afixo de $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{i}$

Condição pedida: $|z-2\text{i}|=|z-1+\text{i}|\wedge z\neq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{i}$

Avaliação global do tema a pensar no Exame

Ficha 34 Avaliação global do tema a pensar no Exame

MMA12CAD © Porto Editora

pág. 78

1. $i^{2027} = i^{4\times 506+3} = i^3 = -i \longrightarrow (0\,,\,-1)$ é um ponto apenas do quadrilátero.

Opção **(B)**

2. Seja $z = \rho e^{i\theta}$. Como $|z| = 2$, então $z = 2e^{i\theta}$.

De $\frac{z}{\overline{z}} = \frac{2e^{i\theta}}{2e^{-i\theta}} = e^{i(\theta+\theta)} = e^{2i\theta}$.

Assim, $2\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z} \iff \theta = \frac{\pi}{6} + k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$.

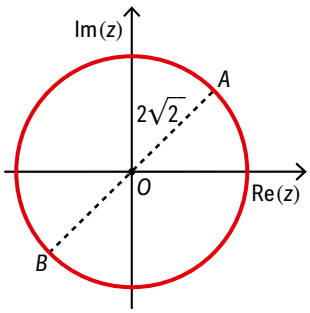
Se $k=0$, $\theta = \frac{\pi}{6}$, então $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$.

Se $k=1$, $\theta = \frac{7\pi}{6}$, então $z_1 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$.

Não existem mais soluções.

3.1. $w = \frac{-(-i)\left[(1+i)^2\right]^2(1+i)}{(1-i)^2} = \frac{i(2i)^2(1+i)}{-2i} = \frac{i\times(-4)(1+i)}{-2i} =$

$= 2(1+i) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$



Equação da circunferência de diâmetro $[AB]$:

- centro em O;
- raio: $|w| = 2\sqrt{2}$;
- $|z-0| = 2\sqrt{2} \iff |z| = 2\sqrt{2}$

3.2. $\text{Arg}(w^n) = \text{Arg}\left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \text{Arg}\left((2\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}}\right) = \frac{n\pi}{4}$.

Para w^n ser um número real negativo, $\frac{n\pi}{4} = \pi + 2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z} \iff n = 4 + 8k\,,\ k\in\mathbb{Z}$ e assim o menor natural é $n = 4 + 8\times 0 = 4$.

pág. 79

4. $z = (-i^2 - \sqrt{3}\,i)e^{i\frac{\pi}{6}} = (1-\sqrt{3}\,i)e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

Como z é uma raiz de índice 4 de w, então:

$w = z^4 = \left(2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^4 = 16e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

e $\frac{1}{iw} = \frac{1}{\underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{i} \times 16e^{-i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{1}{16e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{16}e^{i\frac{\pi}{6}}$

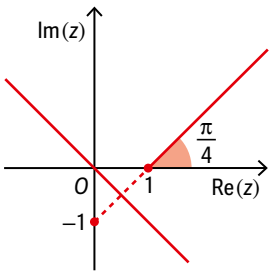
$|1-\sqrt{3}| = \rho = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

$\begin{cases} \tan\theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \\ (1\,,\,-\sqrt{3}) \in 4.^{\text{o}}\,\text{Q.} \end{cases} \implies \arg(1-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

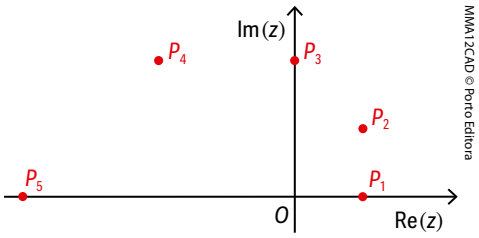
5. $|z-1| = |z+i|$ define a mediatriz do segmento de reta de extremos $(1\,,\,0)$ e $(0\,,\,-1)$.

$\text{Arg}(z-1) = \frac{\pi}{4}$ define a semirreta com origem em $(1\,,\,0)$ e que faz um ângulo de amplitude $\frac{\pi}{4}$ com o semieixo positivo real. Os dois lugares geométricos não se intersetam.

Opção **(A)**



6.1. Em cada termo, o afixo resulta de uma rotação de $\frac{\pi}{4}$ e de uma dilatação de razão $\sqrt{2}$, relativamente ao termo anterior, com centro na origem.



MMA12CAD © Porto Editora

6.2. $\frac{z_{n+1}}{z_n} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, logo (z_n) é uma progressão geométrica de razão $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

6.3. Sabemos que (z_n) é uma progressão geométrica.

Do termo geral de (z_n) definido por $z_n = z_1 \times \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{n-1} = (\sqrt{2})^{n-1} e^{i\frac{(n-1)\pi}{4}}$ tem-se:

$z_{101} = (\sqrt{2})^{100} e^{i\frac{100\pi}{4}} = 2^{50} \times e^{25i\pi} = -2^{50}$.

$e^{25i\pi} = e^{(24+1)i\pi} = e^{i\pi} = -1$

Exames-modelo

Exame-modelo 1

MMA12CAD © Porto Editora

pág. 82

1. Mandatos atribuídos:

- Lista A: 3
- Lista B: 2
- Lista C: 1

A diferença entre o número de mandatos das listas A e B é $3-2=1$.

Opção **(B)**

Divisor	Lista A	Lista B	Lista C
1	720	540	300
2	360	270	150
3	240	180	100

2. Seja $z=a+b\text{i}$, a, $b\in\mathbb{R}$.

$z+\overline{z}=2 \iff a+b\text{i}+a-b\text{i}=2 \iff 2a=2 \iff a=1 \rightarrow z=1+b\text{i}$

$(1-\text{i})(1+b\text{i})-(1+\text{i})(1-b\text{i})=8\text{i} \iff 1+b\text{i}-\text{i}+b-1+b\text{i}-\text{i}-b=8\text{i} \iff$

$\iff (2b-2)\text{i}=8\text{i} \iff 2b-2=8 \iff b=5$

$z=1+5\text{i}$

3. $2-2\sqrt{3}\,\text{i}=4\,\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$

$z=w^4=\left(\dfrac{4\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}}{\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}}\right)^4=\left(4\text{e}^{\text{i}\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}\right)^4=256\text{e}^{-\text{i}2\pi}=256$

$\text{i}\overline{z}=\text{i}\overline{256}=256\text{i}$

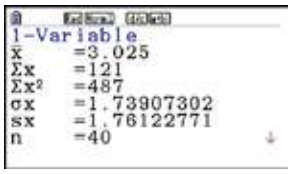
pág. 83

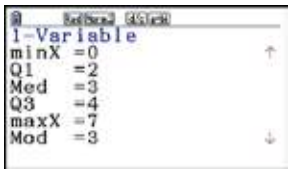
4. **I – b)**

II – a)

III – a), porque o desvio-padrão é inferior.

IV – b), porque $\dfrac{3+5+8}{40}\times 100=\dfrac{16}{40}\times 100=40\%$.





pág. 84

5.1. $(x-1)^2+(0+2)^2+(0-3)^2=17 \iff (x-1)^2=4 \iff x-1=2 \vee x-1=-2 \iff x=3 \vee x=-1$

Como o ponto D pertence ao semieixo positivo Ox, a sua abcissa é 3.

Opção **(C)**

5.2. Vetor normal ao plano BCH: $\overrightarrow{BA}=B-A=(-3,\,4,\,3)-(1,\,-2,\,3)=(-4,\,6,\,0)$.

Como $B\in BCH$, de $-4x+6y+d=0$, vem $-4\times(-3)+6\times 4+d=0 \iff 12+24+d=0 \iff d=-36$,

logo, BCH: $-4x+6y-36=0 \iff -2x+3y-18=0$.

Seja r a reta perpendicular a BCH que passa na origem do referencial.

r: $(x,\,y,\,z)=k(-4,\,6,\,0)=(-4k,\,6k,\,0)$, $k\in\mathbb{R}$.

Seja P o ponto de interseção de r com o plano BCH.

Como $-2\times(-4k)+3\times 6k-18=0 \iff 8k+18k-18=0 \iff k=\dfrac{18}{26} \iff k=\dfrac{9}{13}$, as coordenadas de P são $P\left(-4\times\dfrac{9}{13},\,6\times\dfrac{9}{13},\,0\right)=\left(-\dfrac{36}{13},\,\dfrac{54}{13},\,0\right)$.

A distância da origem do referencial ao plano BCH é a distância de O a P e é

$\overline{OP}=\sqrt{\left(-\dfrac{36}{13}\right)^2+\left(\dfrac{54}{13}\right)^2}\approx 4{,}99$ u. c.

MMA12CAD © Porto Editora

pág. 85

6.

- Lado do quadrado da figura n: $a_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
- Área do quadrado da figura n: $A_{Q_n} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
- Raio da circunferência da figura n: $r_n = \frac{a_n}{2}$
- Área do círculo da figura n: $A_{C_n} = \pi \times r_n^{\,2} = \pi \times \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
- Área da região da figura n: $A_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \frac{\pi}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ $\longrightarrow$ progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$ e primeiro termo $1 - \frac{\pi}{4}$.
- A soma das áreas de todas as regiões consideradas ao longo da construção, como $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$, é $\frac{1 - \frac{\pi}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{4-\pi}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{4-\pi}{3}$.

7. a tem de ser maior que 5, pelo que a única opção possível é a **(D)**, com $a = 6$.
Opção **(D)**

pág. 86

8. O professor de Matemática A escolhido ou leciona também ensino profissional ou não.
Se tal ocorrer, existem $300 \times (50 + 299) = 104\,700$ formas de selecionar os dois professores.
Senão, existem $250 \times 350 = 87\,500$.
No total, existem $104\,700 + 87\,500 = 192\,200$ formas diferentes de selecionar os dois professores.
Opção **(C)**

9. A: "praticar aulas de grupo"
M: "ser mulher"
$P(M) = 60\% = \frac{3}{5}$; $P(\overline{A}\,|\,\overline{M}) = \frac{1}{4}$; $P(M\,|\,\overline{A}) = \frac{2}{3}$. $P(M \cap A) = ?$

	M	$\overline{M}$	Total
A	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$
$\overline{A}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
Total	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

$P(\overline{A}\,|\,\overline{M}) = \frac{1}{4} \iff \frac{P(\overline{A} \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \frac{1}{4} \iff$

$\iff P(\overline{A} \cap \overline{M}) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} \iff P(\overline{A} \cap \overline{M}) = \frac{1}{10}$

$P(A \cap \overline{M}) = \frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$

Como $P(M\,|\,\overline{A}) = \frac{2}{3}$, $P(\overline{M}\,|\,\overline{A}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$P(\overline{M}\,|\,\overline{A}) = \frac{1}{3} \iff \frac{P(\overline{M} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{1}{3} \iff P(\overline{A}) = 3P(\overline{M} \cap \overline{A}) \iff P(\overline{A}) = 3 \times \frac{1}{10} \iff P(\overline{A}) = \frac{3}{10}$

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

$P(M \cap A) = P(A) - P(A \cap \overline{M}) = \frac{7}{10} - \frac{3}{10} = 0{,}4 = 40\%$

MMA12CAD © Porto Editora

pág. 87

10.1. A função g, para $x>0$ e $x<0$, é contínua por ser o resultado de operações entre funções contínuas no seu domínio.

$g(0)=k+0\times e^2=k$

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=k+0\times e^2=k$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(3x)}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3\cos(3x)}{2}=\dfrac{3}{2}$

Para g ser contínua terá de ser também contínua em $x=0$ e, para isso acontecer, tem de se ter:

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=g(0)$

ou seja: $k=\dfrac{3}{2}$

10.2. $k=\dfrac{3}{2}$

Em $]-\infty,0[$: $g(x)=\dfrac{3}{2}+x^2e^{x+2}$

$g'(x)=\left(\dfrac{3}{2}+x^2e^{x+2}\right)'=2xe^{x+2}+x^2e^{x+2}=xe^{x+2}(2+x)$

$g'(x)=0 \iff xe^{x+2}(2+x)=0 \iff xe^{x+2}=0 \vee 2+x=0 \iff$

$\iff x=0 \vee x=-2 \iff x=-2$

x	$-\infty$	-2		0
g'	+	0	–	
g	↗	$g(-2)$	↘	
		Máx.		

A função g admite um único máximo relativo no intervalo $]-\infty,0[$, que é igual a $g(-2)=\dfrac{3}{2}+(-2)^2e^{-2+2}=\dfrac{3}{2}+4e^0=\dfrac{11}{2}$.

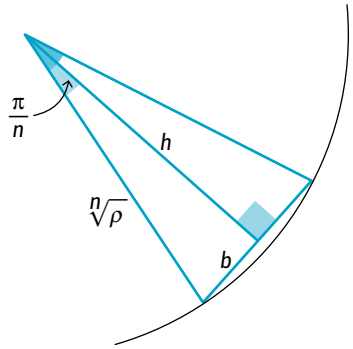
pág. 88

11. **I.** Se $a=b=-1$, existe $\log\left(\dfrac{a}{b}\right)=\log\left(\dfrac{-1}{-1}\right)=\log 1=0$, mas não estão definidos $\log a$ nem $\log b$, isto é, $\log(-1)$.

II. Se $a=-1$ e $b=2$, $\log(a^b)=\log\left((-1)^2\right)=\log(1)=0$, mas não está definido o valor $2\log(-1)$.

12. As raízes índice n de z são $z_k=\sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$, $k=0,1,\ldots,n-1$, que formam um polígono regular inscrito numa circunferência de raio $\sqrt[n]{\rho}$.

Dividindo o polígono em n triângulos isósceles e subdividindo-os pela sua altura, obtemos, no total, $2n$ triângulos retângulos em que um dos ângulos internos tem de amplitude $\dfrac{\frac{2\pi}{n}}{2}=\dfrac{\pi}{n}$ radianos.



MMA12CAD © Porto Editora

Designando por b e h a base e a altura, respetivamente, desses triângulos retângulos, como $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{b}{\sqrt[n]{\rho}} \iff b=\sqrt[n]{\rho}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ e $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{h}{\sqrt[n]{\rho}} \iff h=\sqrt[n]{\rho}\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$,
a área de cada um desses triângulos é
$\frac{\sqrt[n]{\rho}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\times\sqrt[n]{\rho}\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2}$.
Como o polígono é composto por $2n$ triângulos iguais, a sua área é:
$2n\times\frac{\sqrt[n]{\rho}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\times\sqrt[n]{\rho}\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2}=n\rho^{\frac{1}{n}}\rho^{\frac{1}{n}}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)=$
$=n\rho^{\frac{2}{n}}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

pág. 89

13. Quer-se verificar que a equação $f(x)=x+\frac{1}{2}$ é possível em $]0,\ 1[$, o que é equivalente a verificar que a equação $h(x)=0$ é possível em $]0,\ 1[$, com $h(x)=f(x)-x-\frac{1}{2}$.

h é contínua em $[0,\ 1]$ por ser o resultado de operações com funções contínuas no seu domínio.

$h(0)=e^{-0}+0-0-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$

$h(1)=e^{-1}+1-1-\frac{1}{2}\approx-0{,}13<0$

Como h é contínua em $[0,\ 1]$ e $h(1)<0<h(0)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, existe pelo menos uma solução da equação $h(x)=0$ em $]0,\ 1[$, ou seja, existe, pelo menos, um ponto do gráfico de f cuja ordenada é igual à abcissa acrescida de $\frac{1}{2}$, no intervalo $]0,\ 1[$.

MMA12CAD © Porto Editora

Exame-modelo 2

pág. 90

1. O circuncentro O, o baricentro G e o ortocentro H são colineares, formando a reta de Euler, e verifica-se:

$\frac{\overline{OG}}{\overline{GH}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

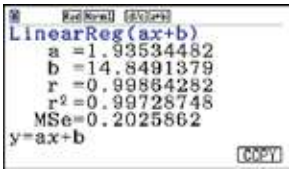
Logo, P é o circuncentro, Q é o baricentro e R é o ortocentro.

Opção **(B)**

2. Recorrendo às capacidades estatísticas da calculadora, obtém-se a equação da reta de regressão: $y = 1{,}935x + 14{,}849$

$y = 1{,}935 \times 13 + 14{,}849 \approx 40$ minutos

Estima-se que o tempo médio de entrega nesse dia tenha sido 40 minutos.



pág. 91

3. $m_{AB} = \frac{3-1}{6-2} = \frac{1}{2}$, logo, $m_{AC} = -2$.

Como $A \in AC$, de $y = -2x + b$, tem-se $1 = -2 \times 2 + b \iff b = 5$.

$AC: y = -2x + 5$

Como $\overline{AB} = \sqrt{(6-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{20}$, quer-se determinar $x \neq 0$ tal que $C(x, -2x+5)$ e $\overline{AC} = \sqrt{20}$, ou seja, $(x-2)^2 + (-2x+5-1)^2 = 20 \iff (x-2)^2 + (-2x+4)^2 = 20 \iff$

$\iff (x-2)^2 + 4(x-2)^2 = 20 \iff 5(x-2)^2 = 20 \iff (x-2)^2 = 4 \iff$

$\iff x - 2 = 2 \vee x - 2 = -2 \iff x = 4 \vee x = 0$

Como a abcissa de C não é nula, $x = 4$, a sua ordenada é $y = -2 \times 4 + 5 = -3$.

Opção **(A)**

4. Quer-se determinar a distância de V ao plano ABC.

Ponto genérico da reta perpendicular a ABC que passa em V:

$(x, y, z) = (6, 0, 0) + k(1, 1, -1) = (6+k, k, -k),\ k \in \mathbb{R}$

Interseção com o plano ABC:

$6 + k + k - (-k) = 0 \iff 3k = -6 \iff k = -2$. $P(6-2, -2, 2) = (4, -2, 2)$

Como $\overline{PV} = \sqrt{(6-4)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$, o comprimento da aresta do cubo e a altura da pirâmide são iguais a $2\sqrt{3} : 2 = \sqrt{3}$.

Assim, o volume do sólido é $(\sqrt{3})^3 + \frac{1}{3} \times \frac{(\sqrt{3})^2}{2} \times \sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$ u. v.

pág. 92

5. **I – b)**, porque $(1, 1) \cdot (k, 2) = 0 \iff k + 2 = 0 \iff k = -2$

II – c), porque $\frac{k}{1} = \frac{2}{1} \iff k = 2$

III – a), porque $\cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = \frac{(1, 1) \cdot (1, 2)}{\sqrt{1^2+1^2} \times \sqrt{1^2+2^2}} = \frac{3}{\sqrt{2} \times \sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$, logo $(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = \cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{10}} \approx 18°$

IV – c), porque $m = \frac{2}{k} = \tan(135°) = -1 \iff k = -2$

6. Número de resultados possíveis: 36

$X = 4$: $(1, 4)$, $(2, 2)$ e $(4, 1)$. $P(X = 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Opção **(C)**

MMA12CAD © Porto Editora

pág. 93

7. Número de códigos sem caracteres 0 : 1

Número de códigos com um carácter 0 : 6 , que é o número de posições para esse carácter no código.

Número de códigos com dois caracteres 0 : $^5C_2 = 10$, porque dos 5 espaços entre os 4 caracteres 1 , antes e também depois de todos esses caracteres, escolhem-se 2 .

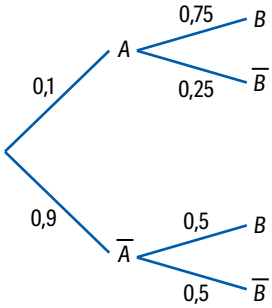
Número de códigos com três caracteres 0 : $^4C_3 = 4$, porque dos 4 espaços entre os 3 caracteres 1 , antes e também depois de todos esses caracteres, escolhem-se 2 .

Como não pode haver códigos com mais do que três caracteres 0 sem que dois fiquem seguidos, o número total de códigos é $1 + 6 + 10 + 4 = 21$.

Opção **(A)**

8. A : "A caixa escolhida é a caixa X."

B : "A peça retirada é azul."



$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \iff P(A) + 9P(A) = 1 \iff$

$\iff 10P(A) = 1 \iff P(A) = 0{,}1$

Apesar de ser verdade que é mais provável retirar uma peça azul da caixa X do que da caixa Y, a conclusão do aluno está errada porque:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1 \times 0{,}75}{0{,}1 \times 0{,}75 + 0{,}9 \times 0{,}5} \approx 0{,}14 < 0{,}5$$

ou seja, a probabilidade de ter sido escolhida a caixa X, sabendo que se retirou uma peça azul, é inferior a 0,5 , pelo que é mais provável que se tenha selecionado a caixa Y nas mesmas condições, isto é, $P(\overline{A} \mid B) > P(A \mid B)$.

pág. 94

9. $\begin{cases} u_5 + 2u_2 = 21 \\ u_3 \times u_6 = 54 \end{cases} \iff \begin{cases} u_1 + 4r + 2(u_1 + r) = 21 \\ (u_1 + 2r) \times (u_1 + 5r) = 54 \end{cases} \iff \begin{cases} 3u_1 + 6r = 21 \\ (u_1 + 2r) \times (u_1 + 5r) = 54 \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} u_1 = \dfrac{21 - 6r}{3} \\ (u_1 + 2r) \times (u_1 + 5r) = 54 \end{cases} \iff \begin{cases} u_1 = 7 - 2r \\ (7 - 2r + 2r) \times (7 - 2r + 5r) = 54 \end{cases} \iff \begin{cases} u_1 = 7 - 2r \\ 7 \times (7 + 3r) = 54 \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} u_1 = 7 - 2r \\ 3r = \dfrac{54}{7} - 7 \end{cases} \iff \begin{cases} u_1 = 7 - 2r \\ 3r = \dfrac{5}{7} \end{cases} \iff \begin{cases} u_1 = 7 - 2 \times \dfrac{5}{21} \\ r = \dfrac{5}{21} \end{cases} \iff \begin{cases} u_1 = \dfrac{137}{21} \\ r = \dfrac{5}{21} \end{cases}$

Termo geral:

$$u_n = \frac{137}{21} + (n - 1) \times \frac{5}{21} = \frac{44}{7} + \frac{5}{21}n$$

$u_n = 72 \iff \dfrac{44}{7} + \dfrac{5}{21}n = 72 \iff 132 + 5n = 1512 \iff 5n = 1380 \iff n = \dfrac{1380}{5} \iff n = 276$

72 é o termo de (u_n) de ordem 276 .

10. $w = \dfrac{\overline{z_1}}{z_2} = \dfrac{3e^{-i\frac{5\pi}{12}}}{3e^{i\frac{\pi}{8}}} = e^{i\left(-\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{8}\right)} = e^{-i\frac{13\pi}{24}}$

Quer-se determinar o menor número natural $n > 1$ tal que $w^n = 1^n = 1$, ou seja,

$\left(e^{-i\frac{13\pi}{24}}\right)^n = 1 \iff e^{-i\frac{13n\pi}{24}} = e^{i2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

De $-\dfrac{13n\pi}{24} = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ vem que $-\dfrac{13n}{24} = 2k \implies n = \dfrac{48k}{13}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Como m.d.c. $(48 , 13) = 1$, o menor número natural $n > 1$ é 48 , quando $k = 13$.

Logo, o número mínimo de vértices desse polígono é 48 .

MMA12CAD © Porto Editora

pág. 95

11. Seja $z=\rho e^{i\theta}$.

$z^3=8\bar{z} \iff \left(\rho e^{i\theta}\right)^3=8\left(\rho e^{-i\theta}\right) \iff \rho^3 e^{3i\theta}=8\rho e^{-i\theta}$

Assim, pretende-se que:

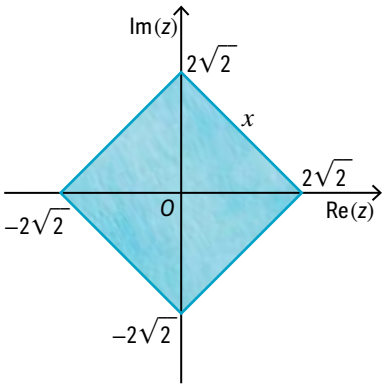
- $\rho^3=8\rho \iff \rho^3-8\rho=0 \iff \rho\left(\rho^2-8\right)=0 \underset{z\neq 0}{\iff} \rho^2=8 \underset{\rho>0}{\iff} \rho=2\sqrt{2}$
- $3\theta=-\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \iff 4\theta=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \iff \theta=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

$\theta_0=0,\ \theta_1=\frac{\pi}{2},\ \theta_2=\pi$ e $\theta_3=\frac{3\pi}{2}$

Soluções: $z_0=2\sqrt{2}e^{i\times 0}=2\sqrt{2}$, $z_1=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}=2\sqrt{2}\,i$,

$z_2=2\sqrt{2}e^{i\times\pi}=-2\sqrt{2}$ e $z_3=2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}=-2\sqrt{2}\,i$

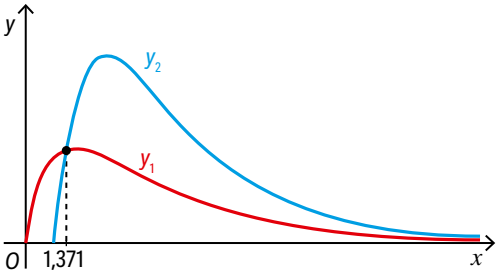
Os afixos das soluções da equação formam um quadrado centrado na origem e de lado x tal que:



$x^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2 \iff x^2=16 \underset{x>0}{\iff} x=4$

A área do quadrado é $4^2=16$ u. a.

12. Pretende-se resolver graficamente a equação $\underbrace{P(t)}_{y_1}=\underbrace{2P(t-1)}_{y_2}$.



$t\approx 1{,}371$ horas

pág. 96

13.1. $f''(x)=\left(3x^2+1\right)e^{-x^2}-2x\left(x^3+x\right)e^{-x^2}=e^{-x^2}\left(3x^2+1-2x^4-2x^2\right)=$

$=e^{-x^2}\left(-2x^4+x^2+1\right)$

$f''(x)=0 \iff e^{-x^2}\left(-2x^4+x^2+1\right)=0 \iff e^{-x^2}=0 \vee -2x^4+x^2+1=0 \iff$

$\iff -2\left(x^2\right)^2+x^2+1=0 \iff x^2=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\times(-2)\times 1}}{2\times(-2)} \iff$

$\iff x^2=1 \vee x^2=-\frac{1}{2} \iff x=\pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f''	$-$		0	$+$	0		$-$
f	⌒		$f(-1)$	⌣	$f(1)$		⌒
			P. I.		P. I.		

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-1[$ e em $]1,+\infty[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-1,1[$.

O gráfico de f tem dois pontos de inflexão, em $x=-1$ e em $x=1$.

MMA12CAD © Porto Editora

13.2. • $g(x) = e^{2x^2} f'(x) = e^{2x^2}(x^3 + x)e^{-x^2} =$
$= (x^3 + x)e^{2x^2} \times e^{-x^2} =$
$= (x^3 + x)e^{2x^2 - x^2} = (x^3 + x)e^{x^2}$

- Como $D_g = \mathbb{R}$ e g é o resultado de operações entre funções contínuas no seu domínio, não existem assíntotas verticais ao seu gráfico.
- Como:
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{(x^3 + x)e^{x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[(x^2 + 1)e^{x^2}\right] = +\infty \times e^{+\infty} =$
$= +\infty \times (+\infty) = +\infty \notin \mathbb{R}$
não existem assíntotas não verticais ao gráfico de g.

pág. 97

14. $f'(x) = 2ax + b$
A primeira coordenada do vértice da parábola é o zero da primeira derivada.
$f'(x) = 0 \iff 2ax + b = 0 \iff x = -\dfrac{b}{2a}$
A segunda coordenada é a imagem de $x = -\dfrac{b}{2a}$ por f, ou seja,
$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = a\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\dfrac{b}{2a}\right) + c = \dfrac{b^2}{4a} - \dfrac{b^2}{2a} + c = \dfrac{b^2}{4a} - \dfrac{2b^2}{4a} + \dfrac{4ac}{4a} = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = -\dfrac{\Delta}{4a}$.
Assim, as coordenadas da parábola são, tal como o Igor afirmou, $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$, com $\Delta = b^2 - 4ac$.

MMA12CAD © Porto Editora

Exame-modelo 3

pág. 98

1. Pontuações iniciais com o método de Borda a atribuir 1 ponto à 3.ª opção, 2 pontos à 2.ª opção e 3 pontos à 1.ª opção:

$P = 8 \times 3 + 5 \times 1 + 3 \times 2 = 35$

$M = 8 \times 2 + 5 \times 3 + 3 \times 1 = 34$

$E = 8 \times 1 + 5 \times 2 + 3 \times 3 = 27$

Pela troca da Catarina, M ganha mais 2 pontos e passa a totalizar 36, P mantém a pontuação, 35, e E perde dois pontos, passando a totalizar 25. Assim, a opção mais votada deixa de ser a P, Primitivas e integrais, e passa a ser M, Matrizes. A afirmação da Beatriz é verdadeira.

pág. 99

2. **I – b)**, porque é na classe $[200, 300[$ que a frequência relativa acumulada da classe ultrapassa, pela primeira vez, 50%.

II – b), porque é na classe $[300, 400[$ que a frequência relativa acumulada da classe ultrapassa, pela primeira vez, 75%.

III – c), porque $10\% + 20\% + 30\% = 60\%$.

IV – b), porque $\overline{x} \approx 50 \times 0{,}10 + 150 \times 0{,}20 + 250 \times 0{,}30 + 350 \times 0{,}25 + 450 \times 0{,}15 = 265$ kWh.

3. Fixa-se um lado do polígono.

O terceiro vértice não pode ser:

- nenhum dos dois extremos desse lado;
- nenhum dos dois vértices adjacentes a esses extremos (para evitar que um segundo lado do polígono seja também lado do triângulo).

Assim, excluem-se 4 vértices na escolha do terceiro vértice e restam $12 - 4 = 8$.

Para cada um dos 12 lados, há 8 escolhas possíveis do terceiro vértice.

Logo, o número de triângulos é $12 \times 8 = 96$.

pág. 100

4. $\overline{C} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19\}$

Dos 15 elementos de $\overline{C}$, apenas a planta com o número 1 pertence a $A \cap B$, ou seja, é uma planta aromática ou aquática com um número quadrado perfeito na etiqueta, pelo que

$P(\overline{A \cap B} \mid \overline{C}) = \frac{15 - 1}{15} = \frac{14}{15}$.

Opção **(A)**

5. Como a distribuição é aproximadamente Normal com média 40, a curva é simétrica em relação a 40.

- A: $P(X > 45)$ – valor mais à direita da média
- B: $P(X > 55)$ – mais afastado à direita que o anterior, logo tem menor probabilidade
- C: $P(X < 35)$ – simétrico de $P(X > 45)$

Logo, $P(B) < P(C) = P(A)$.

Opção **(A)**

pág. 101

6. $|2 + 2\mathrm{i}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

Reta OA: $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z)$

Condição: $|z| < 2\sqrt{2} \wedge \underbrace{|z - 2 - 2\mathrm{i}|}_{|z - (2 + 2\mathrm{i})|} < 2\sqrt{2} \wedge \mathrm{Im}(z) < \mathrm{Re}(z)$

Opção **(B)**

MMA12CAD © Porto Editora

7. Aplicando a regra de Ruffini:

	1	−2	5	−10
2		2	0	10
	1	0	5	0

$z^3-2z^2+5z-10=0 \iff (z-2)(z^2+5)=0 \iff$

$\iff z=2 \vee z^2=-5 \iff z=2 \vee z=\pm\sqrt{5}\,\mathrm{i}$

8.1. Coordenadas do ponto genérico da reta CD:

$(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 3)+k(1,\ 1,\ 1)=(1+k,\ 1+k,\ 3+k),\ k\in\mathbb{R}$

Interseção da reta CD com o plano ABC:

$1+k+1+k+3+k-3=0 \iff 3k=-2 \iff k=-\frac{2}{3}$

Logo, $C\left(1-\frac{2}{3},\ 1-\frac{2}{3},\ 3-\frac{2}{3}\right)=C\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{7}{3}\right)$.

8.2. $\overrightarrow{AC}=C-A=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{7}{3}\right)-(1,\ 1,\ 1)=\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\right)$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(2,\ 0,\ 1)-(1,\ 1,\ 1)=(1,\ -1,\ 0)$

Como $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+0=0$, a base $[ABC]$ é um triângulo retângulo de área

$$\frac{\|\overrightarrow{AC}\|\times\|\overrightarrow{AB}\|}{2}=\frac{\sqrt{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}\times\sqrt{1^2+1^2}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

A altura do sólido é $\overline{DC}=\sqrt{2\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(3-\frac{7}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, logo o volume do sólido é:

$\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{4}{3}$ u. v.

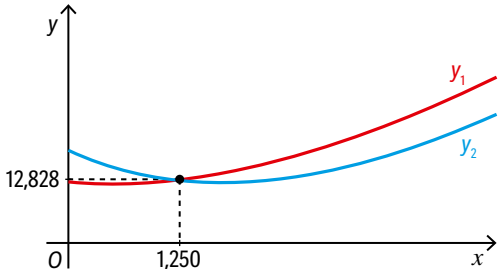
9. $P_{n+1}=P_n+4,\ \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, logo, (P_n) é uma progressão aritmética com $P_1=20$ e razão 4 com termo geral $P_n=20+(n-1)\times4=4n+16$.

$S_n=\frac{20+4n+16}{2}\times n=18n+2n^2$.

$P_{10}=4\times10+16=56$, $P_{20}=4\times20+16=96$, $S_{10}=18\times10+2\times10^2=380$ e $S_{20}=18\times20+2\times20^2=1160$

Opção **(D)**

10. Seja $Q(t)=P(t)-S(t)$. Quer-se determinar t tal que $\underbrace{Q(t+1)}_{y_1}=\underbrace{Q(t)}_{y_2}$.



$t\approx1{,}25=1$ h 15 min

A condição é verificada ao fim de, aproximadamente, 1 h 15 min.

MMA12CAD © Porto Editora

pág. 104

11. $f(0)=k$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=k$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

Logo, como se quer que:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

$k=-\dfrac{1}{2}$.

12. $f'(x)=\left(\dfrac{\ln(ax)}{bx}\right)'=\dfrac{\frac{a}{ax}\times bx-b\ln(ax)}{(bx)^2}=\dfrac{b-b\ln(ax)}{(bx)^2}=\dfrac{1-\ln(ax)}{bx^2}$

$f'\left(\dfrac{e}{2}\right)=0 \iff \dfrac{1-\ln\left(\frac{ae}{2}\right)}{b\left(\frac{e}{2}\right)^2}=0 \iff 1-\ln\left(\dfrac{ae}{2}\right)=0 \iff \ln\left(\dfrac{ae}{2}\right)=1 \iff \dfrac{ae}{2}=e \iff a=2$

$f(x)=\dfrac{\ln(2x)}{bx}$

$f\left(\dfrac{e}{2}\right)=\dfrac{2}{3e} \iff \dfrac{\ln(e)}{\frac{be}{2}}=\dfrac{2}{3e} \iff \dfrac{2}{be}=\dfrac{2}{3e} \iff b=3$

Logo, $a=2 \wedge b=3$.

pág. 105

13. Aplicando a fórmula da iteração para $x_0=1$, sendo f derivável e com $f'(x)=3x^2-3$, como $f(1)=-1$ e $f'(1)=0$, da aplicação do método vem:

$x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}=1-\dfrac{-1}{0}$ e esta expressão não está definida.

14. Para todo o $x\in\mathbb{R}$, tem-se $x^2\geqslant 0$, logo, $x^2+1\geqslant 1$ e $\dfrac{1}{x^2+1}\leqslant 1$.

Por outro lado, como $x^2+1>0$, tem-se que $\dfrac{1}{x^2+1}>0$.

Assim, $0<\dfrac{1}{x^2+1}\leqslant 1$.

MMA12CAD © Porto Editora

Exame-modelo 4

pág. 106

1. Segurança Social: $1501 \times 0{,}11 = 165{,}11$ €

IRS: $1501 \times 0{,}126 = 189{,}13$ € → 189 €

Vencimento líquido: $1501 - 165{,}11 - 189 + 6n = 1266{,}89 \iff 6n = 120 \iff n = 20$

Opção **(A)**

2. (u_n) é a sucessão do volume diário de dados armazenados, em GB, e é uma progressão aritmética com $u_1 = 40$, $r = 8$ e de termo geral $u_n = 40 + (n-1) \times 8 = 8n - 32$.

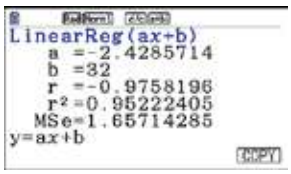
$S_n = \dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n \iff \dfrac{40 + 8n + 32}{2} \times n = 1008 \iff 4n^2 + 36n - 1008 = 0 \iff$

$\iff n = \dfrac{-36 \pm \sqrt{36^2 - 4 \times 4 \times (-1008)}}{2 \times 4} \underset{n \in \mathbb{N}}{\iff} n = 12$

Foram considerados $n = 12$ dias.

pág. 107

3. Equação da reta de regressão obtida com a calculadora gráfica:



$y = -2{,}429x + 32$

Se $x = 5{,}5$, $y = -2{,}429 \times 5{,}5 + 32 \approx 18{,}6$

Opção **(A)**

4. $\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) =$

$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} =$

$= \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Daqui decorre que:

$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \iff$

$\iff 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2 \iff$

$\iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2\right)$

pág. 108

5. $z^4 = \left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}\right)^8 = \left(\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}\right)^8 = \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}\right)^8 = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}\right)^8 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{56\pi}{12}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{14\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$,

logo, $\sqrt[4]{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}} = z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)}$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$.

Assim, $z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$, $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$, $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$ e $z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$.

A solução pedida é $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, uma vez que o seu afixo é o único que pertence ao segundo quadrante.

6. A condição $|z - 1 - \mathrm{i}| = |z - 3 + \mathrm{i}| \iff |z - (1 + \mathrm{i})| = |z - (3 - \mathrm{i})|$ define a mediatriz de $[PQ]$, com $P(1,\ 1)$ e $Q(3,\ -1)$ de equação:

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y+1)^2 \iff$

$\iff x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 \iff$

$\iff -4y = -4x + 8 \iff y = x - 2$

A circunferência definida por $|z - 1 - \mathrm{i}| = 2 \iff |z - (1 + \mathrm{i})| = 2$ pode ser definida por $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$.

MMA12CAD © Porto Editora

Intersetando os dois conjuntos, como:

$(x-1)^2+(x-2-1)^2=4 \iff x^2-2x+1+x^2-6x+9=4 \iff$

$\iff x^2-4x+3=0 \iff x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} \iff x=1 \vee x=3$

e $y=1-2=-1 \vee y=3-2=1$, respetivamente, as extremidades do segmento de reta são $R(1,\ -1)$ e $S(3,\ 1)$, cuja distância é $\overline{RS}=\sqrt{(1-3)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$.

pág. 109

7. **I – a)**, porque ${}^{10}C_4=210$.

II – b), porque $\dfrac{210-{}^6C_2\times{}^4C_2}{210}\times 100\approx 57\%$.

III – a), porque $210-{}^6C_4=195$.

IV – b), porque ${}^9C_3=84$.

8. A condição $P(X>50)>P(X<35)$ significa que a área definida pela curva Normal à direita de 50 é maior do que a área à esquerda de 35.

Isso só é possível se 50 estiver mais próximo da média do que 35.

Entre as opções, apenas 43 satisfaz esta condição.

Opção **(D)**

pág. 110

9.1. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin(ax)}{e^x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{a\cos(ax)}{e^x}=a$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\ln\left(1+e^{-x}\right)+x+1\right]=\ln 2+1$

Para existir $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, pelo que $a=\ln 2+1$.

9.2. $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+e^{-x}\right)+x+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{x}+1+\dfrac{1}{x}\right]=\dfrac{0}{+\infty}+1+\dfrac{1}{+\infty}=0+1+0=1$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+e^{-x}\right)+x+1-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+e^{-x}\right)+1\right]=\ln 1+1=0+1=1$

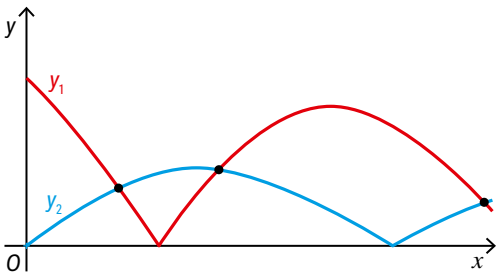
A equação da assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x\longrightarrow+\infty$ é $y=x+1$.

10. **I.** $\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}\neq\pi$

II. O gráfico não é obtido por uma dilatação horizontal mas sim por uma contração horizontal (seguida de uma dilatação vertical e de uma translação vertical).

pág. 111

11. $\underbrace{A(t+1)}_{y_1}=\underbrace{0{,}4A(t)}_{y_2}$



São três os instantes em que se verifica essa condição.

MMA12CAD © Porto Editora

12. $f(0)=e^0=1$, logo, $A(0,\ 1)$. $e^x=2 \iff x=\ln 2$, logo, $B(\ln 2,\ 2)$.

$f'(x)=e^x$. $f'(\ln 2)=e^{\ln 2}=2$. De $y=2x+b$, tem-se que $2=2\ln 2+b \iff b=2-2\ln 2$, logo, $C(0,\ 2-2\ln 2)$.

Como $0<2-2\ln 2<1$, a área do triângulo $\dfrac{(1-2+2\ln 2)\times \ln 2}{2}\approx 0{,}13$.

Opção **(D)**

pág. 112

13. Da análise da figura, tem-se que:

- $f(a)<a$
- $f(b)>b$

Pretende-se provar que:

$$\exists\, c\in]a,\ b[:\ f(c)=c$$

ou seja, que:

$$\exists\, c\in]a,\ b[:\ g(c)=0$$

A função g é contínua no intervalo $[a,\ b]$, por ser definida pela diferença entre duas funções contínuas em $[a,\ b]$ (a função f, uma função polinomial, e $y=x$, a função identidade). Logo, g é contínua em $[a,\ b]$.

$g(a)=f(a)-a<0$, dado que $f(a)<a$.

$g(b)=f(b)-b>0$, dado que $f(b)>b$.

Como g é contínua em $[a,\ b]$ e $g(a)<0<g(b)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos garantir que existe pelo menos um número real c no intervalo $]a,\ b[$ tal que:

$$g(c)=0$$

ou seja, que

$$f(c)-c=0 \iff f(c)=c$$

Da análise da figura, tem-se que:

- $f(a)<a$
- $f(b)>b$

pág. 113

14. $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

Sejam a e b dois números reais não nulos.

Os declives das tangentes são $f'(a)=-\dfrac{1}{a^2}$ e $f'(b)=-\dfrac{1}{b^2}$.

Se as tangentes fossem perpendiculares, teria de se verificar:

$$f'(a)\times f'(b)=-1 \iff -\frac{1}{a^2}\times\left(-\frac{1}{b^2}\right)=-1 \iff \frac{1}{a^2b^2}=-1$$

o que é impossível, porque $a^2b^2>0$.

Conclui-se que não existem dois pontos distintos do gráfico de f cujas tangentes sejam perpendiculares.

MMA12CAD © Porto Editora

Exame-modelo 5

pág. 114

1.

Lista	Divisor 1	Divisor 3	Divisor 5
A	4200	1400	840
B	3100	1033,3	620
C	1700	566,7	340

Distribuição: Lista A, 2 mandatos, Lista B, 2 mandatos, Lista C, 1 mandato.

2. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -2{,}4 \iff 2 \times 2 \times \cos\alpha = -2{,}4 \iff \cos\alpha = -0{,}6$.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \iff \sin^2\alpha + (-0{,}6)^2 = 1 \iff \sin^2\alpha = 1 - 0{,}36 \underset{\alpha \in 2.^{o}\,Q}{\iff} \sin\alpha = 0{,}8$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha = -0{,}8$

Opção **(B)**

pág. 115

3. Opção **(B)**, porque $r_B \approx -1$.

4. Como A e B pertencem ao plano α: $\overrightarrow{BA} \cdot (1,\ -2,\ 2) = 0$.

Se $\overrightarrow{BA} = (a,\ b,\ c)$, $a > 0$, tem-se:

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} \cdot (1,\ 1,\ 0) = 0 \\ \overrightarrow{BA} \cdot (1,\ -2,\ 2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 0 \\ a - 2b + 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -b \\ -b - 2b + 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -b \\ -3b + 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -b \\ c = \frac{3b}{2} \end{cases}$$

$\overrightarrow{BA} = \left(-b,\ b,\ \frac{3b}{2}\right)$ e como a primeira coordenada de $\overrightarrow{BA}$ é positiva, $b \in \mathbb{R}^-$.

$\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{b^2 + b^2 + \frac{9}{4}b^2} = \sqrt{\frac{17}{4}b^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}|b|$. Como $\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{17}$, então, $\frac{\sqrt{17}}{2}|b| = \sqrt{17} \iff$

$\iff |b| = 2 \underset{b<0}{\implies} b = -2$ e $\overrightarrow{BA} = (2,\ -2,\ -3)$.

$\cos(A\hat{B}C) = \cos\left(\overrightarrow{BA}\,\hat{},\,\overrightarrow{BC}\right) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{(2,\ -2,\ -3) \cdot (1,\ -1,\ 0)}{\sqrt{17} \times \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{17} \times \sqrt{2}}$, logo,

$A\hat{B}C = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{17} \times \sqrt{2}}\right) \approx 47°$.

pág. 116

5. Como:

$i^{11} = i^{4\times 2+3} = i^3 = -i$

$\frac{4bi^{11}}{2+i} = \frac{-4bi}{2+i} = \frac{-4bi(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{-8bi - 4b}{4+1} = -\frac{4b}{5} - \frac{8b}{5}i$

Por outro lado, $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1 + i$.

Logo, $z = -\frac{4b}{5} - \frac{8b}{5}i - 1 + i = \left(-\frac{4b}{5} - 1\right) + \left(-\frac{8b}{5} + 1\right)i$, $b \in \mathbb{R}$.

De $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$, vem que:

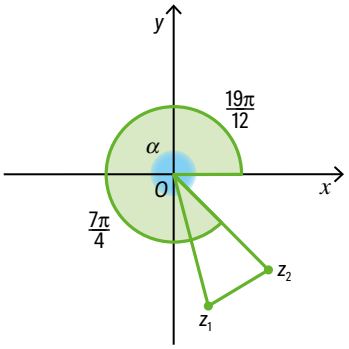
$$-\frac{4b}{5} - 1 = -\frac{8b}{5} + 1 \iff -4b - 5 = -8b + 5 \iff 4b = 10 \iff b = \frac{5}{2}$$

Assim,

$$z = -\frac{4\times\frac{5}{2}}{5} - 1 + \left(-\frac{8\times\frac{5}{2}}{5} + 1\right)i = -2 - 1 + (-4+1)i = -3 - 3i = \sqrt{9+9}e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

MMA12CAD © Porto Editora

6.



A diferença dos argumentos é $\left|\frac{7\pi}{4}-\frac{19\pi}{12}\right|=\frac{\pi}{6}$.

Como os vértices são consecutivos: $\frac{2\pi}{n}=\frac{\pi}{6} \iff n=12$.

7. 6×5 ⟶ escolher um elemento do sexo masculino e um do sexo feminino

$2!$ ⟶ trocar os elementos anteriores pelos dois cargos: presidente e secretário

${}^{9}C_{2}-{}^{5}C_{2}$ ⟶ escolher dois vogais em que dos 9 alunos restantes, sem o presidente e secretário, escolhemos 2, sem restrições, retirando o número de pares formados apenas por elementos do sexo masculino e garantindo assim que pelo menos um vogal é do sexo feminino.

8. **I – a)**

II – b)

III – b), porque $P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}$.

IV – c), porque $P(B\,|\,A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$.

9. A: "Escolher destino de praia"

B: "Escolher destino de montanha"

	B	$\overline{B}$	**Total**
A	0,2	0,45	0,65
$\overline{A}$	0,2	0,15	0,35
Total	0,4	0,6	1

$P(A)=0{,}65$; $P\left(B\cap\overline{A}\right)=0{,}2$; $P(A\,|\,B)=0{,}5$; $P\left(A\,|\,\overline{B}\right)=?$

$P(A\,|\,B)=0{,}5 \iff \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0{,}5 \iff P(A\cap B)=0{,}5k$, com $P(B)=k$.

$k=0{,}5k+0{,}2 \iff 0{,}5k=0{,}2 \iff k=0{,}4$

$P\left(A\,|\,\overline{B}\right)=\frac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\frac{0{,}45}{0{,}6}=75\%$

10. $v_2=8 \iff v_1\times r=8 \iff v_1=\frac{8}{r}$

$v_3=v_2\times r=8r$

Logo, $v_1+v_3=20 \iff \frac{8}{r}+8r=20 \iff 8+8r^2=20r \iff$

$\iff 2r^2-5r+2=0 \iff r=\frac{5\pm\sqrt{25-4\times4}}{2\times2} \iff r=2\vee r=\frac{1}{2}$.

MMA12CAD © Porto Editora

Como a progressão é crescente e $v_1 = \frac{8}{r} > 0$, $r = 2$.

Assim, como $v_1 = \frac{8}{4} = 2$ e $r = 2$,

$v_5 = v_1 \times r^4 = 4 \times 2^4 = 64$.

pág. 119

11. A função f não está definida quando $x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm 2$.

Logo, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ não está definida quando:

$g(x) = 2 \vee g(x) = -2 \iff x^2 - 1 = 2 \vee x^2 - 1 = -2 \iff x^2 = 3 \vee \underbrace{x^2 = -1}_{\text{impossível}} \iff x = \pm\sqrt{3}$

Opção **(A)**

12. $g(1) = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{\ln x}{x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}} \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$.

$\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}} \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{e^{x-1}}{1} = e^0 = 1$.

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = g(1)$, g é contínua em $x = 1$.

13. Após k iterações, $\frac{5 - 1}{2^k} < 0{,}01 \iff \frac{4}{2^k} < 0{,}01 \iff 2^{2-k} < 0{,}01$.

Para $k = 6$, $2^{2-6} = 2^{-4} = 0{,}0625 > 0{,}01$.

Para $k = 7$, $2^{2-7} = 2^{-5} = 0{,}031\ 25 > 0{,}01$.

Para $k = 8$, $2^{2-8} = 2^{-6} = 0{,}015\ 625 > 0{,}01$.

Para $k = 9$, $2^{2-9} = 2^{-7} = 0{,}007\ 812\ 5 < 0{,}01$.

Opção **(D)**

pág. 120

14. $f'(x) = 2a(x - b)$

$f(-1) = 0 \iff a(-1 - b)^2 + c = 0$

Declive da reta tangente:

$m = \frac{4 - 0}{1 - 7} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

Logo, $f'(3) = -\frac{2}{3} \iff 2a(3 - b) = -\frac{2}{3} \iff a(3 - b) = -\frac{1}{3}$

De $y = -\frac{2}{3}x + b$, vem que a ordenada é:

$4 = -\frac{2}{3} \times 1 + b \iff b = \frac{14}{3}$

Equação da reta tangente: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$.

Coordenadas do ponto de tangência: $y = -\frac{2}{3} \times 3 + \frac{14}{3} = \frac{8}{3} \rightarrow \left(3, \frac{8}{3}\right)$,

logo, $f(3) = \frac{8}{3} \iff a(3 - b)^2 + c = \frac{8}{3}$.

$$\begin{cases} a(3 - b) = -\frac{1}{3} \\ a(-1 - b)^2 + c = 0 \\ a(3 - b)^2 + c = \frac{8}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{3(3 - b)} \\ -\frac{1}{3(3 - b)} \times (-1 - b)^2 + c = 0 \\ -\frac{1}{3(3 - b)} \times (3 - b)^2 + c = \frac{8}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{3(3 - b)} \\ -\frac{(-1 - b)^2}{3(3 - b)} + c = 0 \\ -\frac{3 - b}{3} + c = \frac{8}{3} \end{cases} \iff$$

MMA12CAD © Porto Editora

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{3(3-b)} \\ -\dfrac{(-1-b)^2}{3(3-b)} + c = 0 \\ c = \dfrac{11-b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{3(3-b)} \\ -\dfrac{(-1-b)^2}{3(3-b)} + \dfrac{11-b}{3} = 0 \\ c = \dfrac{11-b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{3(3-b)} \\ -(-1-b)^2 + (3-b)(11-b) = 0 \\ c = \dfrac{11-b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{3(3-b)} \\ -b^2 - 2b - 1 + 33 - 14b + b^2 = 0 \\ c = \dfrac{11-b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{3(3-b)} \\ 32 - 16b = 0 \\ c = \dfrac{11-b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{3} \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

A expressão analítica que define f é $f(x) = -\frac{1}{3}(x-2)^2 + 3$.

pág. 121

15. Considere a função f, definida em $]0, +\infty[$, por $f(x) = x - 1 - \ln x$.

Tem-se $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

Assim:

- $f'(x) < 0$ se $0 < x < 1$;
- $f'(x) = 0$ se $x = 1$ e
- $f'(x) > 0$ se $x > 1$.

Logo, a função f é estritamente decrescente em $]0, 1[$ e estritamente crescente em $]1, +\infty[$, pelo que admite um mínimo em $x = 1$ que é $f(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0$.

Conclui-se, assim, que $f(x) \geqslant 0$ para todo $x > 0$, ou seja:

$x - 1 - \ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow -\ln x \geqslant -x + 1 \Leftrightarrow \ln x \leqslant x - 1$, $\forall x > 0$.

MMA12CAD © Porto Editora

Exame-modelo 6

pág. 122

1. Como a questão se refere à circunferência dos 9 pontos, o raio da circunferência é $\frac{6}{2}=3$.

Opção **(A)**

2. Opção **(A)**, porque o desvio-padrão das classificações da turma A é inferior ao da turma B.

pág. 123

3.1. Verificando que o centro da superfície esférica $C(1,\ -2,\ 3)$ pertence a s, fica provado que contém o diâmetro.

$(1,-2,\ 3)=(3,\ 2,\ 9)+k(1,\ 2,\ 3) \iff$

$\iff \begin{cases} 1=3+k \\ -2=2+2k \\ 3=9+3k \end{cases} \iff \begin{cases} k=-2 \\ k=-2 \\ k=-2 \end{cases}$

3.2. $r=\sqrt{14}$

Determinar as coordenadas de B:

$(3-1)^2+(1+2)^2+(z-3)^2=14 \iff (z-3)^2=14-4-9 \iff$

$\iff (z-3)^2-1 \iff z-3=\pm 1 \iff z=4 \vee z=2$

Como a cota de B é superior a 2, $B(3,\ 1,\ 4)$.

$\overrightarrow{CA}=A-C=(-1,\ -5,\ 2)-(1,\ -2,\ 3)=(-2,\ -3,\ -1)$

$\overrightarrow{CB}=B-C=(3,\ 1,\ 4)-(1,\ -2,\ 3)=(2,\ 3,\ 1)$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(-2,\ -3,\ -1)\cdot(2,\ 3,\ 1)=-4-9-1=-14=-r^2$

pág. 124

4. **I – b)**, porque $u_2=2\times 1+1=3$, $u_3=2\times 3+1=7$ e $u_4=2\times 7+1=15$.

II – b), porque $u_{n+1}=2u_n+1 \iff u_{n+1}-2u_n=1,\ n>1$.

III – c), porque $u_5=2\times 15+1=31$.

IV – b), porque $u_{n+1}=2u_n+1$.

5. $P(A\,|\,B)=P(A)=0{,}4$

$P\left(B\,|\,\overline{A}\right)=P(B)=0{,}5$

$P(A\cap B)=0{,}4\times 0{,}5=0{,}2$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}4+0{,}5-0{,}4\times 0{,}5=0{,}7$

Opção **(D)**

pág. 125

6. Seja $x\geqslant 3$ o número de raparigas e $x-2$ o número de rapazes do grupo de alunos.

${}^{x}C_3=x\times {}^{x-2}C_2 \iff \frac{x!}{(x-3)!\times 3!}=\frac{x\times(x-2)!}{(x-4)!\times 2!} \iff$

$\iff \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)!}{(x-3)!\times 6}=\frac{x\times(x-2)(x-3)(x-4)!}{(x-4)!\times 2} \iff$

$\iff \frac{x-1}{6}=\frac{x-3}{2} \iff x-1=3x-9 \iff 2x=8 \iff x=4$

O número de raparigas é 4 e o número de rapazes é $4-2=2$. O número total de alunos do grupo é $4+2=6$.

MMA12CAD © Porto Editora

7. Como a ordem das bolas retiradas é registada, os resultados possíveis devem ser contados com arranjos.

Assim, o número de resultados possíveis é ${}^{8}A_{3}$ e o número de resultados favoráveis é ${}^{4}A_{3}$, pois existem 4 bolas com número par.

Logo, $P(X=3)=\dfrac{{}^{4}A_{3}}{{}^{8}A_{3}}=\dfrac{1}{14}$.

Conclui-se que o valor da probabilidade está correto, mas o raciocínio do aluno não, pois não considera que a ordem de saída das bolas seja relevante.

pág. 126

8. Sejam $z=a+b\text{i}$ e $\overline{z}=a-b\text{i}$, com a, $b\in\mathbb{R}$.

$4z^2+\overline{z}=3(1-\overline{z}) \iff 4(a+b\text{i})^2+a-b\text{i}=3(1-a+b\text{i}) \iff 4a^2+8ab\text{i}-4b^2+a-b\text{i}=3-3a+3b\text{i}$

Daqui resulta que:

$$\begin{cases}4a^2-4b^2+a=3-3a\\8ab-b=3b\end{cases} \iff \begin{cases}4a^2-4b^2+a-3+3a=0\\b(8a-4)=0\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases}4a^2-4b^2+4a-3=0\\b=0\end{cases} \vee \begin{cases}4a^2-4b^2+4a-3=0\\8a-4=0\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases}4a^2+4a-3=0\\b=0\end{cases} \vee \begin{cases}4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-4b^2+4\times\frac{1}{2}-3=0\\a=\frac{1}{2}\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases}a=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times4\times(-3)}}{2\times4}\\b=0\end{cases} \vee \begin{cases}b^2=0\\a=\frac{1}{2}\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=0\end{cases} \vee \begin{cases}b=-\frac{3}{2}\\a=0\end{cases}$$

As soluções da equação são: $z=\dfrac{1}{2}$ e $z=-\dfrac{3}{2}$

9. A condição $|z-1|\leqslant 2$ representa o círculo de centro em $(1,\ 0)$ e raio 2.

A condição $\dfrac{\pi}{6}\leqslant \arg(z-1)\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ define um setor angular com vértice em $(1,\ 0)$ e amplitude $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$.

Logo, a região é um setor circular de raio 2 e amplitude $\dfrac{\pi}{3}$.

Como $\pi\times2^2$ — 2π rad

A — $\dfrac{\pi}{3}$ rad

a área do setor circular, A, é:

$A=\dfrac{4\pi\times\frac{\pi}{3}}{2\pi}=\dfrac{2\pi}{3}$ u. a.

MMA12CAD © Porto Editora

pág. 127

10. $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 5\left(e^x - e^{-x}\right) = 3\left(e^x + e^{-x}\right) \Leftrightarrow 5e^x - 5e^{-x} = 3e^x + 3e^{-x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2e^x = 8e^{-x} \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^{-x}} = 4 \Leftrightarrow e^{2x} = 4 \Leftrightarrow 2x = \ln 4 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 4}{2}$

Como:

$x = \frac{\ln 4}{2} = \frac{\ln\left(2^2\right)}{2} = \frac{2\ln(2)}{2} = \ln 2$,

a solução, na forma pedida, é $x = \ln 2$.

11. Como $f''(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, então f' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

Além disso, como $f'(0) = 0$, se $x < 0$, então $f'(x) < 0$, pelo que f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$;

se $x > 0$, então $f'(x) > 0$, pelo que f é estritamente crescente em $]0, +\infty[$.

Assim, tem-se que $f(x) \geqslant f(0) = 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Opção **(D)**

pág. 128

12. Como f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ por ser o resultado de operações entre funções contínuas, a existir alguma assíntota vertical ao seu gráfico, será a reta de equação $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^{\pm}} \frac{\sin(x) - x}{x^3} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x \to 0^{\pm}} \frac{\cos(x) - 1}{3x^2} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x \to 0^{\pm}} \frac{-\sin(x)}{6x} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x \to 0^{\pm}} \frac{-\cos(x)}{6} = -\frac{1}{6} \in \mathbb{R}$

Logo, o gráfico de f não tem assíntotas verticais ao seu gráfico.

13. Comprimento do intervalo na 4.ª iteração: $5 - \frac{9}{2} = 0{,}5$

Comprimento do intervalo na 3.ª iteração: $2 \times 0{,}5 = 1$

Comprimento do intervalo na 2.ª iteração: $2 \times 1 = 2$

Comprimento do intervalo inicial: $2 \times 2 = 4$

Logo, $b - a = 4$ e, como b é o dobro de a, $b = 2a$.

Destas duas condições vem que:

$\begin{cases} b - a = 4 \\ b = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - a = 4 \\ b = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \end{cases}$

Intervalo inicial:

$[a, b] = [4, 8]$

pág. 129

14. $\left[\sin^2(x) + \cos^2(x)\right]' = 2\sin(x)\cos(x) - 2\cos(x)\sin(x) = 0$,

logo $\sin^2(x) + \cos^2(x)$ é igual a uma constante, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Como $\sin^2(0) + \cos^2(0) = 0 + 1 = 1$, fica provado que:

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.