MÁXIMO

12.º ano

Matemática A

Maria Augusta Ferreira Neves
Ana Machado
Bruno Roque
Pedro Rocha Almeida
António Pinto Silva
Luís Guerreiro

Propostas de resolução

Números complexos

Porto Editora

MMA12DR © Porto Editora

Pág. 148

Questão 1

$z_1 = -1-i\ ;\ z_2 = -3\ ;\ z_3 = -\frac{1}{2}i\ ;$

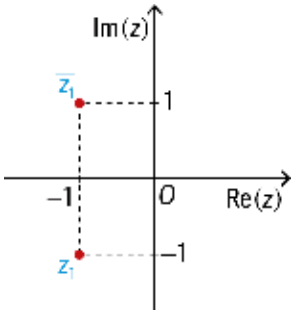
$z_4 = 3-2i\ ;\ z_5 = i\ ;\ z_6 = -\sqrt{3}$

1.1. $\overline{z_1} = -1+i\ ;\ \overline{z_2} = -3$

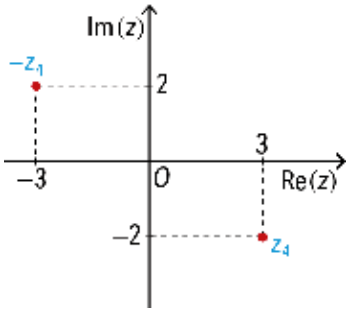
$\overline{z_3} = \frac{1}{2}i\ ;\ \overline{z_4} = 3+2i$

1.2. $\text{Re}(z_5) = 0\ ;\ \text{Re}(z_6) = -\sqrt{3}\ ;\ \text{Im}(z_6) = 0$

1.3. $\overline{z_1}$ é o transformado de z_1 por uma reflexão de eixo real.



1.4. $-z_4$ é o transformado de z_4 por uma rotação de centro O e amplitude $180º$.



1.5. **a)** $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

b) $|z_5| = \sqrt{1^2} = 1$

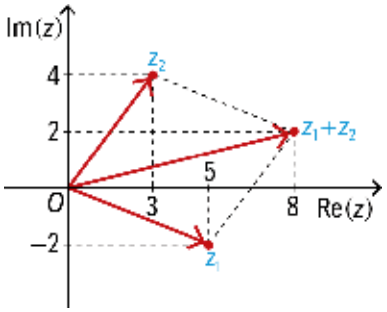
c) $|z_6| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3}$

Pág. 149

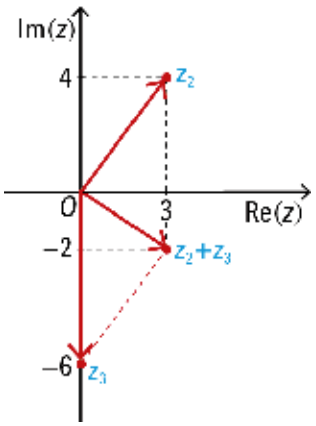
Questão 2

$z_1 = 5-2i\ ;\ z_2 = 3+4i\ ;\ z_3 = -6i$

2.1. **a)**



b)



2.2. **a)** $z_1 + z_2 = (5-2i) + (3+4i) =$

$= 5+3-2i+4i = 8+2i$

b) $z_2 + z_3 = (3+4i) + (-6i) =$

$= 3+4i-6i = 3-2i$

2.3. $z_1 - \overline{z_2} + z_3 = (5-2i) - (\overline{3+4i}) + (-6i) =$

$= 5-2i-(3-4i)-6i = 5-2i-3+4i-6i =$

$= 2-4i$

Questão 3

$z_1 = -1-2i\ ;\ z_2 = 3-i\ ;\ z_3 = 2\sqrt{2}i$

3.1. $z_1 \times z_2 = (-1-2i) \times (3-i) =$

$= -3+i-6i+2i^2 = -3-5i-2 = -5-5i$

3.2. $z_2 + \overline{z_2} \times z_1 = 3-i+(\overline{3-i}) \times (-1-2i) =$

$= 3-i+(3+i)(-1-2i) = 3-i-3-6i-i-2i^2 =$

$= 3-3+2-i-6i-i = 2-8i$

3.3. $\overline{z_1} \times \overline{z_3} = (\overline{-1-2i}) \times (\overline{2\sqrt{2}i}) =$

$= (-1+2i)(-2\sqrt{2}i) = 2\sqrt{2}i - 4\sqrt{2}i^2 = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

3.4. $i^2\overline{z_2} - 2(z_3)^2 = -1(\overline{3-i}) - 2(\overline{2\sqrt{2}i})^2 =$

$= -1(3+i) - 2 \times 4 \times 2i^2 = -3-i+16 = 13-i$

3.5. $3(\overline{z_1})^2 \times iz_3\overline{z_3} = 3(\overline{-1-2i})^2 \times i(2\sqrt{2}i)(\overline{2\sqrt{2}i}) =$

$= 3(-1+2i)^2 \times 2\sqrt{2}i^2 \times (-2\sqrt{2}i) =$

$= 3(1-4i+4i^2) \times (-2\sqrt{2}) \times (-2\sqrt{2}i) =$

$= 3(1-4i-4) \times 4 \times 2i = 24i(-3-4i) =$

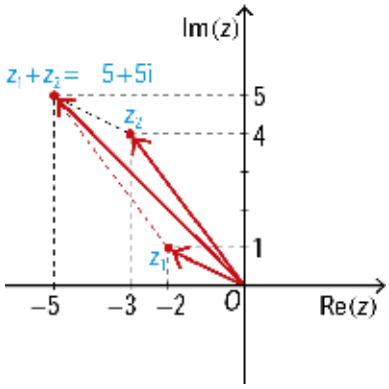
$= -72i - 96i^2 = 96-72i$

Pág. 150

Questão 4

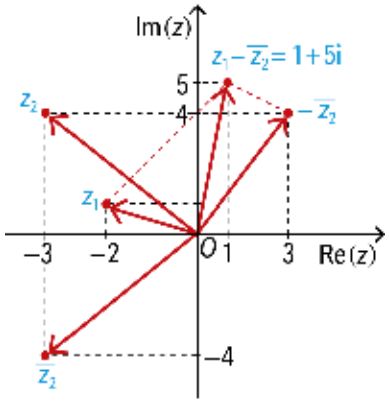
$z_1 = -2 + i\,;\ z_2 = -3 + 4i$

4.1. $z_1 + z_2 = (-2 + i) + (-3 + 4i) = -5 + 5i$



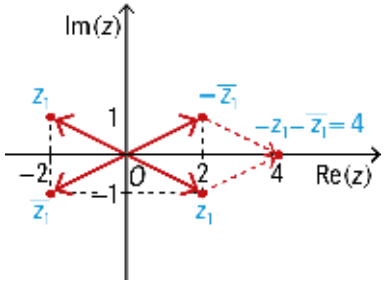
4.2. $z_1 - \overline{z_2} = (-2 + i) - \overline{(-3 + 4i)} = -2 + i - (-3 - 4i) =$

$= -2 + i + 3 + 4i = 1 + 5i$



4.3. $-z_1 - \overline{z_1} = -(-2 + i) - \overline{(-2 + i)} = 2 - i - (-2 - i) =$

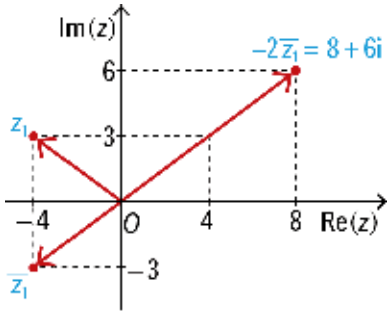
$= 2 - i + 2 + i = 4$



Questão 5

$z_1 = -4 + 3i\,;\ z_2 = -2\overline{z_1}$

$z_2 = -2\left(\overline{-4 + 3i}\right) = -2(-4 - 3i) = 8 + 6i$



Questão 6

$z = -3 + 6i \Leftrightarrow -3\overline{z_1} = -3(1 - 2i)$

Então, $\overline{z_1} = 1 - 2i$. Logo, $z_1 = 1 + 2i$.

$(z_1)^2 = (1 + 2i)^2 = 1 + 4i + 4i^2 = 1 - 4 + 4i = -3 + 4i$

Questão 7

7.1. Seja $z = a + bi$ um número complexo, com $b \neq 0$.

$\overline{z} = a - bi$

$z - \overline{z} = a + bi - (a - bi) = a + bi - a + bi = 2bi$

$\mathrm{Re}(z - \overline{z}) = 0 \wedge \mathrm{Im}(z - \overline{z}) = 2b \neq 0$

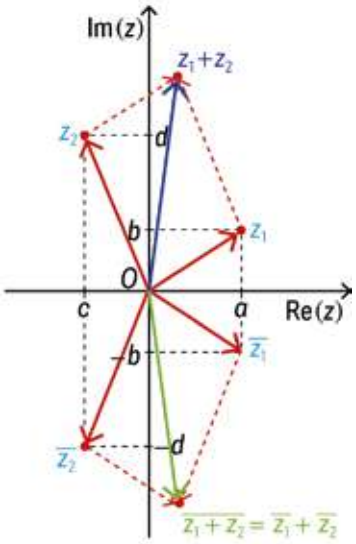
Logo, $z - \overline{z}$ é um número imaginário puro.

7.2. Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois números complexos.

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} =$

$= (a + c) - (b + d)i = a + c - bi - di =$

$= (a - bi) + (c - di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$



Pág. 151

Questão 8

$z_1 = 3\sqrt{2}i\,;\ z_2 = \sqrt{2} + i\,;\ z_3 = \sqrt{3}i$

8.1. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3\sqrt{2}i}{\sqrt{2} + i} = \dfrac{3\sqrt{2}i\left(\sqrt{2} - i\right)}{\left(\sqrt{2} + i\right)\left(\sqrt{2} - i\right)} =$

$= \dfrac{6i - 3\sqrt{2}i^2}{\sqrt{2}^2 - i^2} = \dfrac{6i + 3\sqrt{2}}{2 + 1} = \dfrac{3\left(\sqrt{2} + 2i\right)}{3} = \sqrt{2} + 2i$

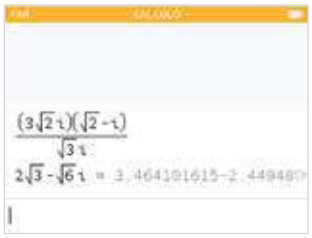


MMA12DR © Porto Editora

8.2. $\dfrac{z_1 \times \overline{z_2}}{z_3} = \dfrac{3\sqrt{2}\mathrm{i}\left(\overline{\sqrt{2}+\mathrm{i}}\right)}{\sqrt{3}\mathrm{i}} = \dfrac{3\sqrt{2}\mathrm{i}\left(\sqrt{2}-\mathrm{i}\right)}{\sqrt{3}\mathrm{i}} =$

$= \dfrac{6\mathrm{i} - 3\sqrt{2}\mathrm{i}^2}{\sqrt{3}\mathrm{i}} = \dfrac{\left(3\sqrt{2}+6\mathrm{i}\right)\left(-\sqrt{3}\mathrm{i}\right)}{\sqrt{3}\mathrm{i}\times\left(-\sqrt{3}\mathrm{i}\right)} = \dfrac{-3\sqrt{6}\mathrm{i} - 6\sqrt{3}\mathrm{i}^2}{-\left(\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^2} =$

$= \dfrac{6\sqrt{3} - 3\sqrt{6}\mathrm{i}}{3} = \dfrac{3\left(2\sqrt{3} - \sqrt{6}\mathrm{i}\right)}{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}\mathrm{i}$



8.3. $\dfrac{3z_2}{z_3} = \dfrac{3\left(\sqrt{2}+\mathrm{i}\right)}{\sqrt{3}\,\mathrm{i}} = \dfrac{3\sqrt{2}+3\mathrm{i}}{-\sqrt{3}\,\mathrm{i}} =$

$= \dfrac{\left(3\sqrt{2}+3\mathrm{i}\right)\left(\sqrt{3}\mathrm{i}\right)}{-\sqrt{3}\mathrm{i}\times\sqrt{3}\mathrm{i}} = \dfrac{3\sqrt{6}\mathrm{i} + 3\sqrt{3}\mathrm{i}^2}{-\left(\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^2} =$

$= \dfrac{3\left(\sqrt{6}\mathrm{i} - \sqrt{3}\right)}{3} = -\sqrt{3} + \sqrt{6}\mathrm{i}$



Questão 9

$z_1 = 1 - \mathrm{i}\ ;\ z_2 = -3 + 2\mathrm{i}$

9.1. $\mathrm{i}z_1 = \mathrm{i}\left(1-\mathrm{i}\right) = \mathrm{i} - \mathrm{i}^2 = 1 + \mathrm{i}$

$\mathrm{Re}\left(\mathrm{i}z_1\right) = 1$

9.2. $\left(\mathrm{i}\overline{z_2}\right)^2 = \left[\mathrm{i}\left(\overline{-3+2\mathrm{i}}\right)\right]^2 = \left[\mathrm{i}\left(-3-2\mathrm{i}\right)\right]^2 =$

$= \left(-3\mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2\right)^2 = \left(2-3\mathrm{i}\right)^2 = 4 - 12\mathrm{i} + \left(3\mathrm{i}\right)^2 =$

$= 4 - 12\mathrm{i} - 9 = -5 - 12\mathrm{i}$

$\mathrm{Im}\left(\mathrm{i}\overline{z_2}\right)^2 = -12$

9.3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1-\mathrm{i}}{-3+2\mathrm{i}} = \dfrac{\left(1-\mathrm{i}\right)\left(-3-2\mathrm{i}\right)}{\left(-3+2\mathrm{i}\right)\left(-3-2\mathrm{i}\right)} =$

$= \dfrac{-3-2\mathrm{i}+3\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{\left(-3\right)^2 - \left(2\mathrm{i}\right)^2} = \dfrac{-3+\mathrm{i}-2}{9+4} = -\dfrac{5}{13} + \dfrac{1}{13}\mathrm{i}$

$\mathrm{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = -\dfrac{5}{13}$

Questão 10

10.1. $8\mathrm{i}\times\dfrac{3+3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}^{11}} = 8\mathrm{i}\times\dfrac{3+3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = 8\mathrm{i}\times\dfrac{\left(3+3\mathrm{i}\right)\left(1+\mathrm{i}\right)}{\left(1-\mathrm{i}\right)\left(1+\mathrm{i}\right)} =$

$= 8\mathrm{i}\times\dfrac{3+3\mathrm{i}+3\mathrm{i}-3}{1+1} = 8\mathrm{i}\times 3\mathrm{i} = -24$

10.2. $\dfrac{\sqrt{12}}{\mathrm{i}\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2^2\times 3}}{\mathrm{i}\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\mathrm{i}\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\mathrm{i}} = \dfrac{2\times(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}\times(-\mathrm{i})} =$

$= \dfrac{-2\mathrm{i}}{-\mathrm{i}^2} = -2\mathrm{i}$

MMA12DR © Porto Editora

Questão 11

11.1. $\mathrm{i}^{25} = \mathrm{i}^{4\times 6+1} = \mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$

C.A. $25 \mid 4$, $1 \mid 6$

11.2. $\mathrm{i}^{20}\times\mathrm{i}^{10} = \mathrm{i}^{30} = \mathrm{i}^{4\times 7+2} = \mathrm{i}^2 = -1$

C.A. $30 \mid 4$, $2 \mid 7$

11.3. $\mathrm{i}^{301} + \mathrm{i}^{302} = \mathrm{i}^{4\times 75+1} + \mathrm{i}^{4\times 75+2} = \mathrm{i}^1 + \mathrm{i}^2 = -1 + \mathrm{i}$

C.A. $301 \mid 4$, $1 \mid 75$; $302 \mid 4$, $2 \mid 75$

11.4. $\mathrm{i}^{20} + \mathrm{i}^{37} + \mathrm{i}^{43} + \mathrm{i}^{2021} =$

$= \mathrm{i}^{4\times 5+0} + \mathrm{i}^{4\times 9+1} + \mathrm{i}^{4\times 10+3} + \mathrm{i}^{4\times 505+1} = \mathrm{i}^0 + \mathrm{i}^1 + \mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^1 =$

$= 1 + \mathrm{i} - \mathrm{i} + \mathrm{i} = 1 + \mathrm{i}$

C.A. $20 \mid 4$, $0 \mid 5$; $37 \mid 4$, $1 \mid 9$; $43 \mid 4$, $3 \mid 10$; $2021 \mid 4$, $1 \mid 505$

11.5. $\left(2 - \mathrm{i}^{110}\right)\left(\mathrm{i}^{11} - \mathrm{i}^{116}\right) =$

$= \left(2 - \mathrm{i}^{4\times 27+2}\right)\left(\mathrm{i}^{4\times 2+3} - \mathrm{i}^{4\times 29+0}\right) = \left(2 - \mathrm{i}^2\right)\left(\mathrm{i}^3 - \mathrm{i}^0\right) =$

$= \left(2+1\right)\left(-\mathrm{i}-1\right) = 3\left(-1-\mathrm{i}\right) = -3 - 3\mathrm{i}$

C.A. $110 \mid 4$, $2 \mid 27$; $11 \mid 4$, $3 \mid 2$; $116 \mid 4$, $0 \mid 29$

11.6. $\left(2\mathrm{i}^{19} - \mathrm{i}^{10}\right)^2\left(3\mathrm{i}^2 - 4\mathrm{i}^3\right) =$

$= \left(2\mathrm{i}^{4\times 4+3} - \mathrm{i}^{4\times 2+2}\right)^2\left(-3+4\mathrm{i}\right) = \left(2\mathrm{i}^3 - \mathrm{i}^2\right)^2\left(-3+4\mathrm{i}\right) =$

$= \left(-2\mathrm{i}+1\right)^2\left(-3+4\mathrm{i}\right) = \left(4\mathrm{i}^2 - 4\mathrm{i} + 1\right)\left(-3+4\mathrm{i}\right) =$

$= \left(-4\mathrm{i}-3\right)\left(-3+4\mathrm{i}\right) = \cancel{12\mathrm{i}} + 16 + 9 - \cancel{12\mathrm{i}} = 25$

C.A. $\left|\begin{array}{c|c} 19 & 4 \\ 3 & 4 \end{array}\right.$ $\left|\begin{array}{c|c} 10 & 4 \\ 2 & 2 \end{array}\right.$

11.7. $S=\sum_{k=0}^{515} \mathrm{i}^{3k}=1+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^6+\ldots+\mathrm{i}^{1545}$

Trata-se da soma dos 516 termos de uma progressão geométrica de razão $\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$, cujo primeiro termo é $\mathrm{i}^0=1$. $\left(S_n=a_1\times\frac{1-r^n}{1-r}\right)$

$$S=1\times\frac{1-(-\mathrm{i})^{516}}{1-(-\mathrm{i})}=\frac{1-\mathrm{i}^{516}}{1+\mathrm{i}}=\frac{1-\mathrm{i}^{4\times 129+0}}{1+\mathrm{i}}=$$

$$=\frac{1-\mathrm{i}^0}{1+\mathrm{i}}=\frac{1-1}{1+\mathrm{i}}=0$$

C.A. $\left|\begin{array}{c|c} 516 & 4 \\ 0 & 129 \end{array}\right.$

Pág. 153

Questão 12

$z_1=(x-\mathrm{i})^2-(y-1)\mathrm{i}\ ;\ z_2=-1+\mathrm{i}$

$z_1=(x-\mathrm{i})^2-(y-1)\mathrm{i}=x^2-2x\mathrm{i}+\mathrm{i}^2-y\mathrm{i}+\mathrm{i}=$

$=x^2-1-2x\mathrm{i}-y\mathrm{i}+\mathrm{i}=(x^2-1)+(-2x-y+1)\mathrm{i}$

$z_1=z_2\Leftrightarrow(x^2-1)+(-2x-y+1)\mathrm{i}=-1+\mathrm{i}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-1=-1\wedge -2x-y+1=1\Leftrightarrow x^2=0\wedge -y=2x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\wedge y=-2\times 0\Leftrightarrow x=0\wedge y=0$

Questão 13

$z=(\mathrm{i}^2)^6-(\mathrm{i}+1)^2\ ;\ w=(x+y\mathrm{i})\mathrm{i}^3$

$z=(-1)^6-(\mathrm{i}^2+2\mathrm{i}+1)=1-(-1+2\mathrm{i}+1)=1-2\mathrm{i}$

$w=(x+y\mathrm{i})\mathrm{i}^3=(x+y\mathrm{i})\times(-\mathrm{i})=-x\mathrm{i}-y\mathrm{i}^2=y-x\mathrm{i}$

$z=w\Leftrightarrow 1-2\mathrm{i}=y-x\mathrm{i}\Leftrightarrow 1=y\wedge -2=-x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=1\wedge x=2$

Questão 14

$3z-1=4\mathrm{i}z\Leftrightarrow 3z-4\mathrm{i}z=1\Leftrightarrow z(3-4\mathrm{i})=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\frac{1}{3-4\mathrm{i}}\Leftrightarrow z=\frac{1(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\frac{3+4\mathrm{i}}{3^2-(4\mathrm{i})^2}\Leftrightarrow z=\frac{3+4\mathrm{i}}{9+16}\Leftrightarrow z=\frac{3}{25}+\frac{4}{25}\mathrm{i}$

Pág. 154

Questão 15

Se $3-\mathrm{i}$ é solução da equação, então, $3+\mathrm{i}$ é solução da mesma equação.

$S=(3-\mathrm{i})+(3+\mathrm{i})=6$

$P=(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})=3^2-\mathrm{i}^2=9+1=10$

Logo, uma possível equação é $x^2-6x+10=0$.

Questão 16

$2+\mathrm{i}$ é solução da equação. Então,

$2(2+\mathrm{i})^2+b(2+\mathrm{i})+c=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(4+4\mathrm{i}+\mathrm{i}^2)+2b+b\mathrm{i}+c=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(3+4\mathrm{i})+2b+c+b\mathrm{i}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6+8\mathrm{i}+2b+c+b\mathrm{i}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (6+2b+c)+(8+b)\mathrm{i}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6+2b+c=0\wedge 8+b=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c=-6-2b\wedge b=-8\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c=-6-2(-8)\wedge b=-8\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c=10\wedge b=-8$

Outro processo:

Se $2+\mathrm{i}$ é solução da equação, $2-\mathrm{i}$ também é.

$S=(2+\mathrm{i})+(2-\mathrm{i})=4$

$P=(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=2^2-\mathrm{i}^2=4+1=5$

$x^2-4x+5=0\Leftrightarrow 2x^2-8x+10=0$

Pág. 155

Questão 17

17.1. $z^2+4=0\Leftrightarrow z^2=-4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\pm\sqrt{-4}\Leftrightarrow z=\pm\sqrt{4}\mathrm{i}\Leftrightarrow z=\pm 2\mathrm{i}$

$S=\{-2\mathrm{i},2\mathrm{i}\}$

17.2. $z^2+10z+26=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\times 1\times 26}}{2\times 1}\Leftrightarrow z=\frac{-10\pm\sqrt{-4}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\frac{-10\pm 2\mathrm{i}}{2}\Leftrightarrow z=-5-\mathrm{i}\vee z=-5+\mathrm{i}$

$S=\{-5-\mathrm{i},-5+\mathrm{i}\}$

17.3. $16z^2+8z+5=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\times 16\times 5}}{2\times 16}\Leftrightarrow z=\frac{-8\pm\sqrt{-256}}{32}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\frac{-8\pm 16\mathrm{i}}{32}\Leftrightarrow z=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\vee z=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$

$S=\left\{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\mathrm{i},-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$

17.4. $z^3+16z=0\Leftrightarrow z(z^2+16)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0\vee z^2+16=0\Leftrightarrow z=0\vee z^2=-16\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0\vee z=\pm\sqrt{-16}\Leftrightarrow z=0\vee z=\pm 4\mathrm{i}$

$S=\{0,-4\mathrm{i},4\mathrm{i}\}$

17.5. $z^3+6z^2+13z=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z(z^2+6z+13)=0\Leftrightarrow z=0\vee z^2+6z+13=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0\vee z=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times 1\times 13}}{2\times 1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0\vee z=\frac{-6\pm\sqrt{-16}}{2}\Leftrightarrow z=0\vee z=\frac{-6\pm 4\mathrm{i}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0\vee z=-3-2\mathrm{i}\vee z=-3+2\mathrm{i}$

$S=\{0,-3-2\mathrm{i},-3+2\mathrm{i}\}$

MMA12DR © Porto Editora

17.6. $z+\frac{6}{z}=\frac{3}{z} \Leftrightarrow \frac{z^2+6-3}{z}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2+3=0 \wedge z\neq 0 \Leftrightarrow z^2=-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\pm\sqrt{-3} \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$

$S=\left\{-\sqrt{3}\mathrm{i},\sqrt{3}\mathrm{i}\right\}$

Questão 18

$z^3-2z^2-3z+10=0$

18.1. $(-2)^3-2(-2)^2-3(-2)+10=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8-8+6+10=0 \Leftrightarrow 0=0\,(\mathrm{V})$

Logo, -2 é solução da equação.

18.2. $z^3-2z^2-3z+10=0 \Leftrightarrow$

C.A.

	1	−2	−3	10
−2		−2	8	−10
	1	−4	5	0

$\Leftrightarrow (z+2)\left(z^2-4z+5\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z+2=0 \vee z^2-4z+5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=-2 \vee z=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times 1\times 5}}{2\times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=-2 \vee z=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2} \Leftrightarrow z=-2 \vee z=\frac{4\pm 2\mathrm{i}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=-2 \vee z=2-\mathrm{i} \vee z=2+\mathrm{i}$

$S=\left\{-2,2-\mathrm{i},2+\mathrm{i}\right\}$

Questão 19

19.1. $z^4-8z^2-9=0$

Fazendo $w=z^2$ e substituindo em $z^4-8z^2-9=0$, vem:

$w^2-8w-9=0 \Leftrightarrow w=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\times 1\times(-9)}}{2\times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w=\frac{8\pm\sqrt{100}}{2} \Leftrightarrow w=\frac{8\pm 10}{2} \Leftrightarrow w=-1 \vee w=9 \Leftrightarrow$

$\underset{(w=z^2)}{\Leftrightarrow} z^2=-1 \vee z^2=9 \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{-1} \vee z=\pm\sqrt{9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\pm\mathrm{i} \vee z=\pm 3$

$S=\left\{\mathrm{i},-\mathrm{i},-3,3\right\}$

19.2. $z^4+3z^2+2=0$

Fazendo $w=z^2$ e substituindo em $z^4+3z^2+2=0$, vem:

$w^2+3w+2=0 \Leftrightarrow w=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times 1\times 2}}{2\times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow w=\frac{-3\pm 1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w=-2 \vee w=-1 \underset{(w=z^2)}{\Leftrightarrow} z^2=-2 \vee z^2=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\pm\sqrt{-2} \vee z=\pm\sqrt{-1} \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{2}\mathrm{i} \vee z=\pm\mathrm{i}$

$S=\left\{-\sqrt{2}\mathrm{i},\sqrt{2}\mathrm{i},-\mathrm{i},\mathrm{i}\right\}$

Pág. 156

Tarefas de consolidação 1

1. $\mathrm{i}^2=-1\in\mathbb{R}\ ;\ -\mathrm{i}^3=\mathrm{i}\notin\mathbb{R}$

$(1-\mathrm{i})+(\mathrm{i}-5)=1-\mathrm{i}+\mathrm{i}-5=-4\in\mathbb{R}$

$(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}^2=1+1=2\in\mathbb{R}$

Opção (B)

2.1. $\left(\frac{3}{5}+\mathrm{i}\right)-\left(\frac{3}{10}-\mathrm{i}\right)=\frac{3}{5}+\mathrm{i}-\frac{3}{10}+\mathrm{i}=$

$=\frac{6-3}{10}+2\mathrm{i}=\frac{3}{10}+2\mathrm{i}$

2.2. $\left(\frac{1}{2}-2\mathrm{i}\right)-\left(-1-\frac{1}{3}\mathrm{i}\right)=\frac{1}{2}-2\mathrm{i}+1+\frac{1}{3}\mathrm{i}=$

$=\frac{1+2}{2}+\frac{-6+1}{3}\mathrm{i}=\frac{3}{2}-\frac{5}{3}\mathrm{i}$

2.3. $\left(\frac{1}{3}-\mathrm{i}\right)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\mathrm{i}$

2.4. $-(1-\mathrm{i})+\left(\overline{2-3\mathrm{i}}\right)=-1+\mathrm{i}+2+3\mathrm{i}=1+4\mathrm{i}$

3.1. $(3+\mathrm{i})\mathrm{i}=3\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=-1+3\mathrm{i}$

3.2. $\mathrm{i}^3(1-3\mathrm{i})=-\mathrm{i}(1-3\mathrm{i})=-\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2=-3-\mathrm{i}$

3.3. $(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=ac+ad\mathrm{i}+bc\mathrm{i}+bd\mathrm{i}^2=$

$=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$

3.4. $(-2+\mathrm{i})^2=4-4\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=4-1-4\mathrm{i}=3-4\mathrm{i}$

3.5. $(\mathrm{i}-1)^3=(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}-1)^2=(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}^2-2\mathrm{i}+1)=$

$=(\mathrm{i}-1)(-1-2\mathrm{i}+1)=(\mathrm{i}-1)\times(-2\mathrm{i})=$

$=-2\mathrm{i}^2+2\mathrm{i}=2+2\mathrm{i}$

3.6. $(a-b\mathrm{i})^2=a^2-2ab\mathrm{i}+(b\mathrm{i})^2=a^2-b^2-2ab\mathrm{i}$

3.7. $\frac{1}{2-\mathrm{i}}=\frac{1(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\frac{2+\mathrm{i}}{2^2-\mathrm{i}^2}=\frac{2+\mathrm{i}}{4+1}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\mathrm{i}$

3.8. $\frac{1+3\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{(1+3\mathrm{i})\times(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}\times(-\mathrm{i})}=\frac{-\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2}{-\mathrm{i}^2}=\frac{3-\mathrm{i}}{1}=3-\mathrm{i}$

3.9. $\frac{4\mathrm{i}}{-1-2\mathrm{i}}=\frac{4\mathrm{i}(-1+2\mathrm{i})}{(-1-2\mathrm{i})(-1+2\mathrm{i})}=\frac{-4\mathrm{i}+8\mathrm{i}^2}{(-1)^2-(2\mathrm{i})^2}=$

$=\frac{-8-4\mathrm{i}}{1+4}=-\frac{8}{5}-\frac{4}{5}\mathrm{i}$

4.1. $\frac{1}{z}=\mathrm{i}-3 \Leftrightarrow 1=(\mathrm{i}-3)z \Leftrightarrow z=\frac{1}{-3+\mathrm{i}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\frac{1(-3-\mathrm{i})}{(-3+\mathrm{i})(-3-\mathrm{i})} \Leftrightarrow z=\frac{-3-\mathrm{i}}{(-3)^2-\mathrm{i}^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\frac{-3-\mathrm{i}}{9+1} \Leftrightarrow z=-\frac{3}{10}-\frac{1}{10}\mathrm{i}$

MMA12DR © Porto Editora

4.2. $\frac{2+i}{z}=2-i \Leftrightarrow 2+i=(2-i)z \Leftrightarrow z=\frac{2+i}{2-i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \Leftrightarrow z=\frac{4+4i+i^2}{2^2-i^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\frac{4-1+4i}{4+1} \Leftrightarrow z=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$

5. $z_1=k-1+(2k^2-k-1)i\ ;\ z_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\ ;\ w=z_1\times z_2$

5.1. $w=z_1\times z_2=$

$=\left((k-1)+(2k^2-k-1)i\right)\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)=$

$=\frac{1}{2}(k-1)-\frac{1}{2}(k-1)i+$

$+\frac{1}{2}(2k^2-k-1)i-\frac{1}{2}(2k^2-k-1)i^2=$

$=\frac{1}{2}(k-1+2k^2-k-1)+\frac{1}{2}(2k^2-k-1-k+1)i=$

$=\frac{1}{2}(2k^2-2)+\frac{1}{2}(2k^2-2k)i=k^2-1+(k^2-k)i$

5.2. w é imaginário puro $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(w)=0\wedge \mathrm{Im}(z)\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2-1=0\wedge k^2-k\neq 0 \Leftrightarrow k^2=1\wedge k(k-1)\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\pm 1\wedge k\neq 0\wedge k\neq 1$

5.3. $w\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(w)=0\wedge \mathrm{Re}(w)\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2-k=0\wedge k^2-1\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=0\vee k=1\wedge k\neq -1\wedge k\neq 1 \Leftrightarrow k=0$

$z_1=0-1+(2\times 0^2-0-1)i=-1-i$

$z_1^2=(-1-i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i$

$z_1^2=2i$

6. $i^{80}+i^{82}=i^{4\times 20+0}+i^{4\times 20+2}=i^0+i^2=1-1=0$

C.A.

80 |	4
0	20
82 |	4
2	20

7. $(2+3i)^2=4+12i+(3i)^2=4+12i-9=$

$=-5+12i$

Então, $2+3i$ é uma raiz quadrada de z.

Seja $z_1=a+bi$ uma raiz quadrada de z.

$z_1^2=z \Leftrightarrow (a+bi)^2=-5+12i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2+2abi+(bi)^2=-5+12i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2-b^2+2abi=-5+12i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=-5 \\ 2ab=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{6}{b}\right)^2-b^2=-5 \\ a=\frac{6}{b} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{36}{b^2}-b^2=-5 \\ a=\frac{6}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36-b^4=-5b^2 \\ a=\frac{6}{b} \end{cases} \underset{(x=b^2)}{\Leftrightarrow}$

$\underset{(x=b^2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^2-5x-36=0 \\ a=\frac{6}{b} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\times 1\times(-36)}}{2\times 1} \\ a=\frac{6}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5\pm\sqrt{169}}{2} \\ a=\frac{6}{b} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5\pm 13}{2} \\ a=\frac{6}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4\vee x=9 \\ a=\frac{6}{b} \end{cases} \underset{(x=b^2)}{\Leftrightarrow}$

$\underset{(x=b^2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} b^2=-4\vee b^2=9 \\ a=\frac{6}{b} \end{cases} \underset{(b\in\mathbb{R})}{\Leftrightarrow} \begin{cases} b=\pm 3 \\ a=\frac{6}{b} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-3 \\ a=\frac{6}{-3} \end{cases} \vee \begin{cases} b=3 \\ a=\frac{6}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-3 \\ a=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} b=3 \\ a=2 \end{cases}$

$z_1=-2-3i\vee z_1=2+3i$

A outra raiz quadrada de z é $-2-3i$.

8.1. Seja $z=a+bi$

$\overline{z}-2iz=3 \Leftrightarrow \overline{a+bi}-2i(a+bi)=3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a-bi-2ai-2bi^2=3 \Leftrightarrow$

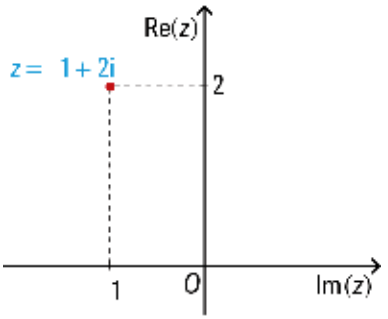
$\Leftrightarrow (a+2b)+(-b-2a)i=3+0i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=3 \\ -b-2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2(-2a)=3 \\ b=-2a \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-4a=3 \\ b=-2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a=3 \\ b=-2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$

$z=-1+2i$

$S=\{-1+2i\}$



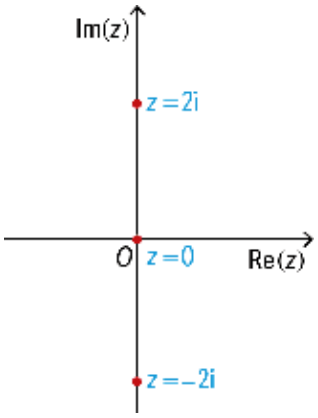
8.2. $z^3+4z=0 \Leftrightarrow z(z^2+4)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0\vee z^2+4=0 \Leftrightarrow z=0\vee z^2=-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0\vee z=\pm\sqrt{-4} \Leftrightarrow z=0\vee z=\pm 2i$

$S=\{0,-2i,2i\}$

MMA12DR © Porto Editora



Pág. 157

9.1. $z^2-6z+25=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\times1\times25}}{2\times1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{6\pm\sqrt{-64}}{2} \Leftrightarrow z=\dfrac{6\pm8i}{2} \Leftrightarrow z=3\pm4i$

$z_A=3-4i$ e $z_B=3+4i$

$\overline{AB}=4-(-4)=8$

$A_{[OAB]}=\dfrac{\overline{AB}\times\text{Re}(z_A)}{2}=\dfrac{8\times3}{2}=12$ u.a.

9.2. $\overline{OA}=|z_A|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=$

$=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

$\overline{OB}=|z_B|=|z_A|=5$

$P_{[OAB]}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{AB}=5+5+8=18$ u.c.

10.1. $z^3-2\sqrt{3}iz^2-4z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\left(z^2-2\sqrt{3}iz-4\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z^2-2\sqrt{3}iz-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z=\dfrac{2\sqrt{3}i\pm\sqrt{\left(-2\sqrt{3}i\right)^2-4\times1(-4)}}{2\times1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z=\dfrac{2\sqrt{3}i\pm\sqrt{-12+16}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z=\dfrac{2\sqrt{3}i\pm2}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z=-1+\sqrt{3}i \vee z=1+\sqrt{3}i$

$z_O=0$; $z_A=1$; $z_B=1+\sqrt{3}i$; $z_C=-1+\sqrt{3}i$

$\overline{BC}=1-(-1)=2$

$\overline{OA}=1$

$\overline{AB}=\sqrt{3}$

$A_{[OABC]}=\dfrac{\overline{BC}+\overline{OA}}{2}\times\overline{AB}=\dfrac{2+1}{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ u.a.

10.2. $\overline{OB}=|z_B|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$

$\overline{OC}=|z_C|=|z_B|=2$

$\overline{BC}=2$

$P_{[OBC]}=\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{BC}=2+2+2=6$ u.c.

11. Na opção (A):

$2(1-3i)^2-4(1-3i)=5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left(1-6i+(3i)^2\right)-4+12i=5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(1-9-6i)-4+12i=5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(-8-6i)-4+12i=5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -16-12i-4+12i=5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -20=5$ (Falso)

Na opção (B):

$(1-3i-1)^2=-9 \Leftrightarrow (-3i)^2=-9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9i^2=-9 \Leftrightarrow -9=-9$ (Verdadeiro)

Na opção (C):

$(1-3i)^2+2(1-3i)+10=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-6i+9i^2+2-6i+10=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 13-9-12i=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4-12i=0$ (Falso)

Na opção (D):

$\dfrac{(1-3i)^2}{2}+1-3i=10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-6i+9i^2}{2}+1-3i=10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-9-6i}{2}+1-3i=10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4-3i+1-3i=10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3-6i=10$ (Falso)

(B) é a opção correta.

12. $f(x)=x^3+x^2$

$g(x)=x^3+3x^2+4x+2$

$h(x)=x^3+3x^2+3x+1$

$i(x)=x^3+3x^2+2x$

12.1. $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3+x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=0 \vee x+1=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1$

$f \rightarrow$ III

$g(x)=0 \Leftrightarrow x^3+3x^2+4x+2=0 \Leftrightarrow$

C.A.

	1	3	4	2
−1		−1	−2	−2
	1	2	2	0

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2+2x+2)=0 \Leftrightarrow$

MMA12DR © Porto Editora

$\Leftrightarrow x+1=0 \vee x^2+2x+2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times2}}{2\times1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=\underbrace{\dfrac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}}_{\text{Impossível em } \mathbb{R}}$

$g(0)=0^3+3\times0^2+4\times0+2=2\neq1$

$g \rightarrow \text{I}$

$h(x)=0 \Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow$

C.A.

	1	3	3	1
−1		−1	−2	−1
	1	2	1	0

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2+2x+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+1=0 \vee x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1 \vee (x+1)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=-1$

$h(0)=0^3+3\times0^2+3\times0+1=1$

$h \rightarrow \text{II}$

$i(x)=0 \Leftrightarrow x^3+3x^2+2x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x^2+3x+2)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-4\times2}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\dfrac{-3\pm1}{2} \Leftrightarrow x=0 \vee x=-2 \vee x=-1$

$i \rightarrow \text{IV}$

12.2. O polinómio que tem dois zeros não reais é o polinómio definidor de g.

$x^3+3x^2+4x+2=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=\dfrac{-2\pm\sqrt{-4}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=\dfrac{-2\pm2\text{i}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=-1-\text{i} \vee x=-1+\text{i}$

$\{-1,-1+\text{i},-1-\text{i}\}$

Pág. 159

Avaliação formativa 1

1. $|1-\text{i}|$ representa a distância do número complexo $1-\text{i}$ à origem. Logo, é um número real.

$|\text{i}^3|\times\text{i}^{80}=1\times\text{i}^{4\times20+0}=1\times\text{i}^0=1\times1=1\in\mathbb{R}$

$\sqrt{\text{i}^5\times(-\text{i})}=\sqrt{-\text{i}^6}=\sqrt{-\text{i}^{4+2}}=\sqrt{-\text{i}^2}=\sqrt{1}=1\in\mathbb{R}$

$\overline{\left(\dfrac{1}{3\text{i}}\right)}=\dfrac{\overline{1(-3\text{i})}}{3\text{i}\times(-3\text{i})}=\dfrac{-3\text{i}}{-9\text{i}^2}=\dfrac{-3\text{i}}{9}=-\dfrac{1}{3}\text{i}$

É um imaginário puro.

Opção (D)

2. Seja $z=a+b\text{i}$

$z-4\overline{z}=\text{i}^2-2\text{i} \Leftrightarrow a+b\text{i}-4\left(\overline{a+b\text{i}}\right)=-1-2\text{i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a+b\text{i}-4(a-b\text{i})=-1-2\text{i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a+b\text{i}-4a+4b\text{i}=-1-2\text{i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3a+5b\text{i}=-1-2\text{i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-3a=-1\\5b=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\b=-\dfrac{2}{5}\end{cases}$

$z=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{5}\text{i}$

3. Seja $z=a+b\text{i}$

$|z|^2-z\overline{z}=\sqrt{a^2+b^2}^2-(a+b\text{i})\left(\overline{a+b\text{i}}\right)=$

$=a^2+b^2-(a+b\text{i})(a-b\text{i})=a^2+b^2-\left(a^2-(b\text{i})^2\right)=$

$=a^2+b^2-\left(a^2+b^2\right)=0$

Então, $|z|^2-z\overline{z}=0$

4. Se z é um imaginário puro, é da forma $z=a\text{i}$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$w=z^2-2\text{i}z-\text{i}^2=(a\text{i})^2-2\text{i}\times a\text{i}+1=$

$=a^2\text{i}^2-2a\text{i}^2+1=-a^2+2a+1\in\mathbb{R}$

Logo, w é um número real.

5. $z^3-3z^2+4z-12=0$

5.1.



Se $z=3$, $3^3-3\times3^2+4\times3-12=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 27-27+12-12=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0=0$ (Verdadeiro)

Logo, 3 é solução da equação.

5.2. $z^3-3z^2+4z-12=0 \Leftrightarrow$

C.A.

	1	−3	4	−12
3		3	0	12
	1	0	4	0

$\Leftrightarrow (z-3)(z^2+4)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z-3=0 \vee z^2+4=0 \Leftrightarrow z=3 \vee z^2=-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=3 \vee z=\pm\sqrt{-4} \Leftrightarrow z=3 \vee z=\pm2\text{i}$

$S=\{3,-2\text{i},2\text{i}\}$

MMA12DR © Porto Editora

6.1. Calcula as potências de i, para expoentes de 1 a 4.

6.2. Para $k=1$, $z \leftarrow 1\times i = i$

$k=2$, $z \leftarrow i\times i = -1$

$k=3$, $z \leftarrow -1\times i = -i$

$k=4$, $z \leftarrow -i\times i = 1$

6.3. $i, -1, -i, 1$

7. I:

$\overline{z} = \overline{a+i} = a-i$

I $\rightarrow$ c)

II:

$w = -iz = -i(a+i) = -ai - i^2 = 1 - ai$

$|w| = \sqrt{1^2 + (-a)^2} = \sqrt{1+a^2}$

II $\rightarrow$ a)

III:

$\overrightarrow{OA} = (a, 1)$

$\overrightarrow{OL} = (1, -a)$

$\overrightarrow{OL} \cdot \overrightarrow{OA} = (1, -a) \cdot (a, 1) = a - a = 0$

III $\rightarrow$ c)

IV:

$L\hat{O}A = 90^\circ$ porque $\overrightarrow{OL} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$.

Então, o triângulo $[LOA]$ é retângulo, pelo que não poderá ser equilátero.

Como $[LA]$ é a hipotenusa do triângulo,

$\overline{LA}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OL}^2 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{LA}\right\|^2 = |z|^2 + |w|^2$

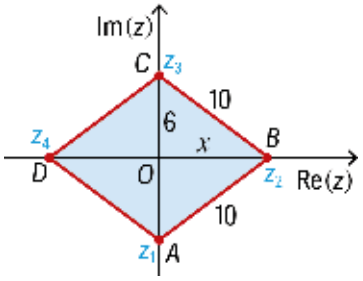
IV $\rightarrow$ b)

Pág. 160

Tarefa 2

1. $P = 40$

$|z_1 - z_3| = 12 \Leftrightarrow z_1 = -6i \wedge z_3 = 6i$



Aplicando o Teorema de Pitágoras vem:

$10^2 = x^2 + 6^2 \Leftrightarrow x^2 = 100 - 36 \Leftrightarrow x^2 = 64 \underset{(x>0)}{\Leftrightarrow} x = 8$

$z_2 = 8 \wedge z_4 = -8$

1.1. $i^5 \times z_2 = i^{4\times 1+1} \times 8 = i \times 8 = 8i$

1.2. $\dfrac{|z_2 - z_1|}{z_3} = \dfrac{10}{6i} \underset{(\times i)}{=} \dfrac{10i}{6i^2} = \dfrac{10i}{-6} = -\dfrac{5}{3}i$

1.3. $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \dfrac{-6i - 6i}{8 - 6i} = \dfrac{-12i(8+6i)}{(8-6i)(8+6i)} =$

$= \dfrac{-96i - 72i^2}{64 - 36i^2} = \dfrac{-96i - 72(-1)}{64 - 36(-1)} = \dfrac{-96i + 72}{64 + 36} =$

$= \dfrac{72}{100} - \dfrac{96}{100}i = \dfrac{18}{25} - \dfrac{24}{25}i$

2.1. $i^{12n-1} + i^{16n} \times i^{8n-2} = i^{-1} + i^0 \times i^{-2} =$

$= \dfrac{1}{i} + 1 \times \dfrac{1}{i^2} = \dfrac{1}{i} + 1 \times \dfrac{1}{-1} = \dfrac{1}{i} - 1 \underset{(\times i)}{=} \dfrac{i}{i^2} - 1 =$

$= \dfrac{i}{-1} - 1 = -1 - i$

z_1: parte real e parte imaginária negativas

z_2: parte real positiva e parte imaginária negativa

z_3: parte real e parte imaginária positivas

z_4: parte real negativa e parte imaginária positiva

2.2. $2z_1$ e $2z_3$ são números complexos simétricos, logo $2z_1 + 2z_3 = 0$.

z_2 e z_4 são números complexos simétricos, logo $z_2 + z_4 = 0$.

Assim, $2z_1 + z_2 + 2z_3 + z_4 = 0$.

Opção (B)

3. $z_1 + z_3$

z_1: parte real $\neq 0$ e parte imaginária $\neq 0$

z_3: parte real $\neq 0$ e parte imaginária $= 0$

Se as partes reais forem simétricas, $z_1 + z_3$ pode representar um número imaginário puro.

$z_1 + z_5$

z_1 e z_5 são simétricos em relação ao eixo real.

Adicionando z_1 e z_5, a parte imaginária anula-se e a parte real é a soma das partes reais de z_1 e z_5.

$z_1 + z_5$ representa um número real.

$z_1 + z_4$

z_1 e z_4 não são simétricos em relação à origem.

Adicionando z_1 e z_4, nem a parte real nem a parte imaginária se anulam. $z_1 + z_4$ representa um número complexo, mas não um imaginário puro.

$z_2 + z_4$

z_2 e z_4 têm parte real negativa e parte imaginária com sinal contrário, mas não simétrico, logo adicionando z_2 e z_4 nem a parte real nem a parte imaginária se anulam.

$z_2 + z_4$ representa um número complexo, mas não um imaginário puro.

Opção (A)

MMA12DR © Porto Editora

4. $z_2 + z_3 + z_4$

z_2 e z_4 são números complexos simétricos.

$z_2 + z_4 = 0$

$z_2 + z_3 + z_4 = z_3$ que representa um número complexo com parte real e parte imaginária diferentes de zero.

$z_1 + z_2$

$z_1 + z_2$ não tem parte imaginária nula pelo que não é um número real.

$z_3 + z_4$

$z_3 + z_4$ não tem parte imaginária nula pelo que não é um número real.

$z_1 + z_4$

z_1 e z_4 têm parte imaginária simétrica e partes reais iguais logo, $z_1 + z_4$ é um número real que é a soma das partes reais de z_1 e z_4.

Opção (D)

Pág. 161

Questão 20

20.1. $z = 2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

$$|z| = \rho = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

Seja θ um argumento de z.

$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ \left(2, 2\sqrt{3}\right) \in 1.^{\circ}\,\mathrm{Q}. \end{cases} \Rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{3}$$

20.2. $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$

$$|z| = \rho = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$$

Seja θ um argumento de z.

$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1 \\ \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \in 2.^{\circ}\,\mathrm{Q}. \end{cases} \Rightarrow \arg(z) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

20.3. $z = \sqrt{3} + \mathrm{i}$

$$|z| = \rho = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

Seja θ um argumento de z.

$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \left(\sqrt{3}, 1\right) \in 1.^{\circ}\,\mathrm{Q}. \end{cases} \Rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{6}$$

20.4. $z = -3 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$

$$|z| = \rho = \sqrt{(-3)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+3} =$$

$$= \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

Seja θ um argumento de z.

$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{-3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \left(-3, \sqrt{3}\right) \in 2.^{\circ}\,\mathrm{Q}. \end{cases} \Rightarrow \arg(z) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Pág. 162

Questão 21

21.1. $z = 2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}$

$$|z| = \rho = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 4\times 3} = \sqrt{16} = 4$$

Seja θ um argumento de z.

$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ \left(2, 2\sqrt{3}\right) \in 1.^{\circ}\,\mathrm{Q}. \end{cases} \Rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{3}$$

$$z = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

21.2. $z = -3\sqrt{3} + 3\mathrm{i}$

$$|z| = \rho = \sqrt{\left(-3\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{9\times 3 + 9} = \sqrt{36} = 6$$

Seja θ um argumento de z.

$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{\cancel{3}}{-\cancel{3}\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \left(-3\sqrt{3}, 3\right) \in 2.^{\circ}\,\mathrm{Q}. \end{cases} \Rightarrow \arg(z) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$z = 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$$

21.3. $z = 1 - \mathrm{i}$

$$|z| = \rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Seja θ um argumento de z:

$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{-1}{1} = -1 \\ (1, -1) \in 4.^{\circ}\,\mathrm{Q}. \end{cases} \Rightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

21.4. $z = 2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$

$$|z| = \rho = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{4\times 3 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

Seja θ um argumento de z:

MMA12DR © Porto Editora

$$\begin{cases}\tan\theta=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ (2\sqrt{3},2)\in 1.^{\circ}\text{Q.}\end{cases}\Rightarrow \arg(z)=\frac{\pi}{6}$$

$z=4e^{i\frac{\pi}{6}}$

21.5. $z=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

$|z|=\rho=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2^2}}=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2$

Seja θ um argumento de z:

$$\begin{cases}\tan\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=-1\\ \left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\in 2.^{\circ}\text{Q.}\end{cases}\Rightarrow \arg(z)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

$z=2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

21.6. $z=\dfrac{\sqrt{3}i-1}{4}=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i$

$|z|=\rho=\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=$

$=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{3}{16}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$

Seja θ um argumento de z:

$$\begin{cases}\tan\theta=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{-\frac{1}{4}}=-\sqrt{3}\\ \left(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\in 2.^{\circ}\text{Q.}\end{cases}\Rightarrow \arg(z)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

$z=\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$

21.7. $z=-\sqrt{2}-\sqrt{6}i$

$|z|=\rho=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{2+6}=\sqrt{8}=$

$=\sqrt{2^2\times 2}=2\sqrt{2}$

Seja θ um argumento de z:

$$\begin{cases}\tan\theta=\dfrac{-\sqrt{6}}{-\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{6}{2}}=\sqrt{3}\\ \left(-\sqrt{2},-\sqrt{6}\right)\in 3.^{\circ}\text{Q.}\end{cases}\Rightarrow \arg(z)=-\pi+\frac{\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}$$

$z=2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$

21.8. $z=\dfrac{-5\sqrt{3}-5i}{2}=-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}-\dfrac{5}{2}i$

$|z|=\rho=\sqrt{\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{25\times 3}{4}+\frac{25}{4}}=$

$=\sqrt{\frac{75}{4}+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{100}{4}}=\frac{10}{2}=5$

Seja θ um argumento de z:

$$\begin{cases}\tan\theta=\dfrac{-\frac{5}{2}}{-\frac{5\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{5}{5\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ \left(-\frac{5\sqrt{3}}{2},-\frac{5}{2}\right)\in 3.^{\circ}\text{Q.}\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \arg(z)=-\pi+\frac{\pi}{6}=-\frac{5\pi}{6}$

$z=5e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$

21.9. $z=\dfrac{(4+2i)}{(3-i)}=\dfrac{12+4i+6i+2i^2}{9-i^2}=$

$=\dfrac{12+10i+2(-1)}{9-(-1)}=\dfrac{10+10i}{10}=1+i$

$|z|=\rho=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

Seja θ um argumento de z:

$$\begin{cases}\tan\theta=\dfrac{1}{1}=1\\ (1,1)\in 1.^{\circ}\text{Q.}\end{cases}\Rightarrow \arg(z)=\frac{\pi}{4}$$

$z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

21.10.

$z=2+\left(1+i^{43}\right)^2=$

$=2+1^2+2\times 1\times i^{43}+\left(i^{43}\right)^2=$

$=2+1+2\times(-i)+i^{86}=$

$=2+1-2i+(-1)=2-2i$

C.A.

43	4
03	1

$i^{43}=i^3=-i$

86	4
06	21
2	

$i^{86}=i^2=-1$

$|z|=\rho=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=$

$=\sqrt{2^2\times 2}=2\sqrt{2}$

Seja θ um argumento de z:

$$\begin{cases}\tan\theta=\dfrac{-2}{2}=-1\\ (2,-2)\in 4.^{\circ}\text{Q.}\end{cases}\Rightarrow \arg(z)=-\frac{\pi}{4}$$

$z=2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

MMA12DR © Porto Editora

Pág. 163

Questão 22

22.1. $z=-5\mathrm{i}\ ;\ |z|=|-5\mathrm{i}|=5$

$\arg(z)=\arg(-5\mathrm{i})=-\frac{\pi}{2}$

$z=5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

$z=-5\mathrm{i}=5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

22.2. $z=-\frac{1}{2}\mathrm{i}\ ;\ |z|=\left|-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right|=\frac{1}{2}$

$\arg(z)=\arg\left(-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=-\frac{\pi}{2}$

$z=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

$z=-\frac{1}{2}\mathrm{i}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

22.3. $z=20\ ;\ |z|=|20|=20$

$\arg(z)=\arg(20)=0$

$z=20\mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 0}$

$z=20=20\mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 0}$

22.4. $z=-100$

$|z|=|-100|=100$

$\arg(z)=\arg(-100)=\pi$

$z=100\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

$z=-100=100\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

22.5. $z=3\mathrm{i}^5=3\mathrm{i}^{4\times 1+1}=3\mathrm{i}^1=3\mathrm{i}$

$|z|=|3\mathrm{i}|=3$

$\arg(z)=\arg(3\mathrm{i})=\frac{\pi}{2}$

$z=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

$z=3=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

22.6. $z=\frac{2}{\mathrm{i}}=\frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=\frac{2\mathrm{i}}{-1}=-2\mathrm{i}$

$|z|=|-2\mathrm{i}|=2$

$\arg(z)=\arg(-2\mathrm{i})=-\frac{\pi}{2}$

$z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

$z=-2\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

22.7. $z=(1+\mathrm{i})^2=1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=1+2\mathrm{i}-1=2\mathrm{i}$

$|z|=|2\mathrm{i}|=2$

$\arg(z)=\arg(2\mathrm{i})=\frac{\pi}{2}$

$z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

$z=2=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

22.8. $z=|1+\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\ ;\ |z|=\left|\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}$

$\arg(z)=\arg\left(\sqrt{2}\right)=0$

$z=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 0}$

$z=\sqrt{2}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 0}$

22.9. $z=|1+\mathrm{i}|\times\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{i}\ ;\ |z|=\left|\sqrt{2}\mathrm{i}\right|=\sqrt{2}$

$\arg(z)=\arg\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)=\frac{\pi}{2}$

$z=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

$z=\sqrt{2}\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

Pág. 164

Questão 23

23.1. $z=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\times\frac{1}{2}\right)=$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$

23.2. $z=5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=5\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=$

$=5\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=\frac{5\sqrt{2}}{2}-\frac{5\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$

23.3. $z=3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)=$

$=3\sqrt{2}\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right]=$

$=3\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$

$=-\frac{3\sqrt{2}\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}=-3+3\mathrm{i}$

23.4. $z=\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}=$

$=\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=$

$=\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)=$

$=\sqrt{3}\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right]=$

$=\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\times\frac{1}{2}\right)=$

$=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

23.5. $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)=$

$=2\left[\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]=$

MMA12DR © Porto Editora

$= 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) =$

$= 2\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

23.6. $z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\left(0+\mathrm{i}\times 1\right) =$

$= \sqrt{2}\mathrm{i}$

23.7. $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = 2\left(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi\right) = 2\left(-1+\mathrm{i}\times 0\right) = -2$

23.8. $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\pi)} = 2\left[\cos(-\pi)+\mathrm{i}\sin(-\pi)\right] =$

$= 2\left(-1+\mathrm{i}\times 0\right) = -2$

23.9. $z = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] =$

$= 3\left[0+\mathrm{i}\times(-1)\right] = -3\mathrm{i}$

23.10. $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{19}{3}\pi\right)} = 2\left[\cos\left(-\frac{19}{3}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{19}{3}\pi\right)\right] =$

$= 2\left(\cos\frac{19}{3}\pi-\mathrm{i}\sin\frac{19}{3}\pi\right) =$

C.A. $\left|\ \frac{19}{3}\pi = 6\pi+\frac{\pi}{3}\right.$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

23.11. $z = 2\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{6}} = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{13\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{6}\right) =$

C.A. $\left|\ \frac{13\pi}{6} = 2\pi+\frac{\pi}{6}\right.$

$= 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\times\frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{\cancel{2}\sqrt{3}\sqrt{3}}{\cancel{2}}+\frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}}\mathrm{i} = 3+\sqrt{3}\mathrm{i}$

23.12. $z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{21\pi}{4}\right)} =$

$= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{21\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{21\pi}{4}\right)\right] =$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{21\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{21\pi}{4}\right) =$

C.A. $\left|\ \frac{21\pi}{4} = 5\pi+\frac{\pi}{4} = 4\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\right.$

$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right] =$

$= \sqrt{2}\left[-\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\times\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) =$

$= -1+\mathrm{i}$

Pág. 165

Questão 24

24.1. $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{31\pi}{4}}$; $z_2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

$|z_1| = |z_2| = 2$

$\frac{31\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}+2k\pi \Leftrightarrow \frac{31}{4} = -\frac{1}{4}+2k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 31 = -1+8k \Leftrightarrow 32 = 8k \Leftrightarrow k = 4 \in \mathbb{Z}$

Como $|z_1| = |z_2|$ e $\frac{31\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}+8k$, então $z_1 = z_2$.

24.2. $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{12\pi}{5}}$; $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{8\pi}{5}\right)}$

$|z_1| = |z_2| = 1$

$\frac{12\pi}{5} = -\frac{8\pi}{5}+2k\pi \Leftrightarrow \frac{12}{5} = -\frac{8}{5}+2k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12 = -8+10k \Leftrightarrow 20 = 10k \Leftrightarrow k = 2 \in \mathbb{Z}$

Como $|z_1| = |z_2|$ e $\frac{12\pi}{5} = -\frac{8\pi}{5}+4\pi$, então $z_1 = z_2$.

24.3. $z_1 = \sqrt{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{7}\right)} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{7}\right)}$

$z_2 = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{7}}$

$|z_1| = |z_2| = 2\sqrt{2}$

$-\frac{\pi}{7} = \frac{13\pi}{7}+2k \Leftrightarrow -\frac{1}{7} = \frac{13}{7}+2k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 = 13+14k \Leftrightarrow -14 = 14k \Leftrightarrow k = -1 \in \mathbb{Z}$

Como $|z_1| = |z_2|$ e $-\frac{\pi}{7} = \frac{13\pi}{7}-2\pi$, então $z_1 = z_2$.

24.4. $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\pi)}$; $z_2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

$|z_1| = |z_2| = 2$

$-\pi = \pi+2k\pi \Leftrightarrow -1 = 1+2k \Leftrightarrow -2 = 2k \Leftrightarrow k = -1 \in \mathbb{Z}$

Como $|z_1| = |z_2|$ e $-\pi = \pi-2\pi$, então $z_1 = z_2$.

24.5. $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{5\pi}{2}\right)}$; $z_2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{13\pi}{2}\right)}$

$|z_1| = |z_2| = 2$

$-\frac{5\pi}{2} = -\frac{13\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{2} = -\frac{13}{2}+2k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5 = -13+4k \Leftrightarrow 8 = 4k \Leftrightarrow k = 2 \in \mathbb{Z}$

Como $|z_1| = |z_2|$ e $-\frac{5\pi}{2} = -\frac{13\pi}{2}+4\pi$, então $z_1 = z_2$.

Questão 25

25.1. $z_1 = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{6}}$; $z_2 = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$

$|z_1| = |z_2| = 3$

$\frac{13\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}+2k\pi \Leftrightarrow \frac{13}{6} = -\frac{5}{6}+2k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 13 = -5+12k \Leftrightarrow 18 = 12k \Leftrightarrow k = \frac{18}{12} \Leftrightarrow k = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$

Não existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{13\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}+2k\pi$.

Logo, $z_1 \neq z_2$.

MMA12DR © Porto Editora

25.2. $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{7}}$; $z_2 = e^{i\frac{18\pi}{7}}$

$|z_1| = |z_2| = 1$

$\frac{3\pi}{7} = \frac{18\pi}{7} + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{3}{7} = \frac{18}{7} + 2k \Leftrightarrow 3 = 18 + 14k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -15 = 14k \Leftrightarrow k = -\frac{15}{14} \notin \mathbb{Z}$

Não existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{3\pi}{7} = \frac{18\pi}{7} + 2k\pi$.

Logo, $z_1 \neq z_2$.

25.3. $z_1 = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{8}\right)}$; $z_2 = 4e^{i\left(-\frac{17\pi}{8}\right)}$

$|z_1| = |z_2| = 4$

$-\frac{\pi}{8} = -\frac{17\pi}{8} + 2k\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{8} = -\frac{17}{8} + 2k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 = -17 + 16k \Leftrightarrow 16 = 16k \Leftrightarrow k = 1 \in \mathbb{Z}$

Como $|z_1| = |z_2|$ e $-\frac{\pi}{8} = -\frac{17\pi}{8} + 2\pi$, $z_1 = z_2$

25.4. $z_1 = 5e^{i(-\pi)}$; $z_2 = 5e^{i(4\pi)}$

$|z_1| = |z_2| = 5$

$-\pi = 4\pi + 2k\pi \Leftrightarrow -1 = 4 + 2k \Leftrightarrow -5 = 2k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = -\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$

Não existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $-\pi = 4\pi + 2k\pi$.

Logo, $z_1 \neq z_2$.

25.5. $z_1 = 5e^{i\left(-\frac{3\pi}{5}\right)}$; $z_2 = 3e^{i\frac{7\pi}{5}}$

$|z_1| = 5$; $|z_2| = 3$

Como $|z_1| \neq |z_2|$, $z_1 \neq z_2$.

Questão 26

$e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{a\pi}{12}} \Leftrightarrow 1 = 1 \wedge -\frac{\pi}{4} = \frac{a\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} = \frac{a}{12} + 2k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -3 = a + 24k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = -3 - 24k$

Se $k = -1$, $a = -3 - 24 \times (-1) = -3 + 24 = 21 \in \mathbb{Z}^+$

Pág. 166

Questão 27

27.1. $z_1 = e^{i\frac{\pi}{5}}$

$-z_1 = -e^{i\frac{\pi}{5}} = e^{i\left(\frac{\pi}{5}+\pi\right)} = e^{i\frac{6\pi}{5}} = e^{i\left(-\frac{4\pi}{5}\right)}$

$\overline{z_1} = \overline{e^{i\frac{\pi}{5}}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{5}\right)}$

27.2. $z_2 = 2e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$

$-z_2 = -2e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}+\pi\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\overline{z_2} = \overline{2e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

27.3. $z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{6}}$

$-z_3 = -\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{6}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{11\pi}{6}+\pi\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{6}} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

C.A. $\left| \frac{17\pi}{6} = 2\pi + \frac{5\pi}{6} \right.$

$\overline{z_3} = \overline{\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{6}}} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{11\pi}{6}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

C.A. $\left| -\frac{11\pi}{6} = -2\pi + \frac{\pi}{6} \right.$

27.4. $z_4 = 3e^{i\left(-\frac{7\pi}{4}\right)}$

$-z_4 = -3e^{i\left(-\frac{7\pi}{4}\right)} = 3e^{i\left(-\frac{7\pi}{4}+\pi\right)} = 3e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$

$z_4 = 3e^{i\left(-\frac{7\pi}{4}\right)} = 3e^{i\left(\frac{7\pi}{4}\right)} = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

C.A. $\left| \frac{7\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4} \right.$

Questão 28

28.1. $z_1 = -2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$

28.2. $z_2 = \overline{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

28.3. $z_3 = \overline{-3e^{i\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}} = \overline{3e^{i\left(-\frac{4\pi}{3}+\pi\right)}} = \overline{3e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}} = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$

Questão 29

29.1. $z_1 = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$; $z_2 = 3e^{i\left(-\frac{23\pi}{6}\right)}$

$\overline{z_1} = \overline{3e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}} = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$

$|\overline{z_1}| = |z_2| = 3$

$\frac{\pi}{6} = -\frac{23\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{1}{6} = -\frac{23}{6} + 2k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 = -23 + 12k \Leftrightarrow 24 = 12k \Leftrightarrow k = 2 \in \mathbb{Z}$

Como $|\overline{z_1}| = |z_2|$ e $\frac{\pi}{6} = -\frac{23\pi}{6} + 4\pi$, então $\overline{z_1} = z_2$.

29.2. $z_1 = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$z_3 = -3e^{i\left(-\frac{11\pi}{6}\right)} = 3e^{i\left(-\frac{11\pi}{6}+\pi\right)} = 3e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$

$-z_1 = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = 3e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$

$|-z_1| = |z_3| = 3$

$-\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{6} = \frac{5}{6} + 2k \Leftrightarrow -5 = 5 + 12k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -10 = 12k \Leftrightarrow k = -\frac{10}{12} \Leftrightarrow k = -\frac{5}{6} \notin \mathbb{Z}$

Não existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $-\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

Logo, $-z_1 \neq z_3$.

MMA12DR © Porto Editora

MMA12DR © Porto Editora

Pág. 167

Questão 30

30.1. $(1+i)^{10}$

Seja $z = 1+i$

$|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

Seja θ o argumento de z.

$\begin{cases} \tan\theta = \frac{1}{1} = 1 \\ (1,1) \in 1.^{o}\,Q. \end{cases} \Rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{4}$

$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z^{10} = (1+i)^{10} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{10} = \sqrt{2}^{10}e^{i10\times\frac{\pi}{4}} =$

$= \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10} e^{i\frac{5\pi}{2}} = 2^5 e^{i\frac{5\pi}{2}} = 32e^{i\frac{5\pi}{2}} = 32e^{i\frac{\pi}{2}} = 32i$

C.A. $\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$

30.2. $\frac{8i\times(2i)^8}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{10}} = \frac{8i\times 256\times 1}{1024e^{i\left(-\frac{5\pi}{3}\right)}} = \frac{2048i}{1024e^{i\left(-\frac{5\pi}{3}\right)}} =$

C.A.

8	4
0	2

$i^8 = i^0 = 1$

Seja $z = \sqrt{3} - i$:

$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$

Seja θ o argumento de z:

$\begin{cases} \tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \left(\sqrt{3},-1\right) \in 4^{o}\,Q \end{cases} \Rightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{6}$

$z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$z^{10} = \left(\sqrt{3}-i\right)^{10} = 2^{10}e^{i\times 10\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = 1024e^{i\left(-\frac{5\pi}{3}\right)}$

$= \frac{2i}{e^{i\left(-\frac{5\pi}{3}\right)}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\left(-\frac{5\pi}{3}\right)}} = 2e^{i\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right]} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{13\pi}{6}} =$

$= 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

C.A. $\frac{13\pi}{6} - 2\pi = \frac{\pi}{6}$

30.3. $\frac{(-2i)^3}{\left(\overline{1+i}\right)^6} = \frac{-8i^3}{8e^{i\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}} = \frac{-(-i)}{e^{i\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}} =$

C.A. $\left(\overline{1+i}\right) = 1-i$

Seja $z = 1-i$.

$|z| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

Seja θ o argumento de z:

$\begin{cases} \tan\theta = \frac{-1}{1} = -1 \\ (1,-1) \in 4.^{o}\,Q. \end{cases} \Rightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{4}$

$z = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

$z^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6 e^{i\left(-6\times\frac{\pi}{4}\right)} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 e^{i\left(-\frac{6\pi}{4}\right)} =$

$= 8e^{i\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}$

$= e^{i\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right]} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)} = e^{i2\pi} = e^{i\times 0} =$

$= \cos 0 + i\sin 0 = 1$

Questão 31

31.1. $\left(\sqrt{3}-i\right)^2 + 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} =$

$= 3 - 2\sqrt{3}i + i^2 + 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] =$

$= 3 - 2\sqrt{3}i - 1 + 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$

$= 3 - 2\sqrt{3}i - 1 + 2\left(\frac{1}{2} - i\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3 - 2\sqrt{3}i - 1 + 1 - \sqrt{3}i =$

$= 3 - 3\sqrt{3}i$

Seja $z = 3 - 3\sqrt{3}i$:

$|z| = \sqrt{3^2 + \left(-3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+9\times 3} = \sqrt{36} = 6$

Seja θ o argumento de z:

$\begin{cases} \tan\theta = \frac{-3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3} \\ \left(3,-3\sqrt{3}\right) \in 4.^{o}\,Q. \end{cases} \Rightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{3}$

$z = 6e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

Outro método:

$\left(\sqrt{3}-i\right)^2 + 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \left(2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\right)^2 + 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} =$

C.A. Seja $z = \sqrt{3} - i$

$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$

Seja θ o argumento de z:

$\begin{cases} \tan\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \left(\sqrt{3},-1\right) \in 4.^{o}\,Q. \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$

$z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$= 4e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} + 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = 6e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

31.2. $\overline{1+i} + 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} \times e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)} =$

$= 1 - i + 2\sqrt{2}e^{i\left[\frac{5\pi}{6}+\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]} = 1 - i + 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{12}\right)} =$

$= 1-\mathrm{i}+2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{12}} = 1-\mathrm{i}+2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} =$

$= 1-\mathrm{i}+2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$

$= 1-\mathrm{i}+2\sqrt{2}\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right] =$

$= 1-\mathrm{i}+2\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) =$

$= 1-\mathrm{i}+2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1-\mathrm{i}-2+2\mathrm{i} = -1+\mathrm{i}$

Seja $z=-1+\mathrm{i}$:

$|z| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$

Seja θ o argumento de z:

$\begin{cases}\tan\theta = \frac{1}{-1} = -1 \\ (-1,1)\in 2.^{\circ}\,\mathrm{Q.}\end{cases} \Rightarrow \arg(z) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

31.3. $(2-2\mathrm{i})\times\sqrt{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\times\sqrt{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6}\right)} =$

C.A.

Seja $z=2-2\mathrm{i}$:

$|z| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8}$

Seja θ o argumento de z:

$\begin{cases}\tan\theta = \frac{-2}{2} = -1 \\ (2,-2)\in 4.^{\circ}\,\mathrm{Q.}\end{cases} \Rightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{4}$

$z = \sqrt{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

$= \sqrt{64}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}$

Pág. 168

Questão 32

32.1. $z = \left(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}}\right)^4 = \frac{\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^4}{(2+2\mathrm{i})^4} = \frac{\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^4}{\left(2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^4} =$

C.A.

Seja $z_1 = \sqrt{3}+\mathrm{i}$

$|z_1| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2} = 2$

Seja θ_1 argumento de z_1.

$\begin{cases}\tan\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \left(\sqrt{3},1\right)\in 1.^{\circ}\,\mathrm{Q.}\end{cases} \Rightarrow \arg(z_1) = \frac{\pi}{6}$

$z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

Seja $z_2 = 2+2\mathrm{i}$

$|z_2| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Seja θ_2 o argumento de z_2:

$\begin{cases}\tan\theta_2 = \frac{2}{2} = 1 \\ (2,2)\in 1.^{\circ}\,\mathrm{Q.}\end{cases} \Rightarrow \arg(z_2) = \frac{\pi}{4}$

$z_2 = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{2^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{6}}}{2^4\sqrt{2}^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{4}}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}{4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3}-\pi\right)} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

32.2. $z = \left(\frac{\mathrm{i}^{19}-1}{3+\sqrt{3}\mathrm{i}}\right)^4\times 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{(-\mathrm{i}-1)^4}{\left(3+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^4}\times 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} =$

C.A.

$\begin{array}{r|l} 19 & 4 \\ 3 & \end{array}$

$\mathrm{i}^{19} = \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$

Seja $z_1 = -1-\mathrm{i}$:

$|z_1| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

Seja θ_1 o argumento de z_1:

$\begin{cases}\tan\theta_1 = \frac{-1}{-1} = 1 \\ (-1,-1)\in 3.^{\circ}\,\mathrm{Q.}\end{cases} \Rightarrow \arg(z_1) = -\pi+\frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$

$z_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$

Seja $z_2 = 3+\sqrt{3}\mathrm{i}$.

$|z_2| = \sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{3}$

Seja θ_2 o argumento de z_2:

$\begin{cases}\tan\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \left(3,\sqrt{3}\right)\in 1.^{\circ}\,\mathrm{Q.}\end{cases} \Rightarrow \arg(z_2) = \frac{\pi}{6}$

$z_2 = 2\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

$= \frac{\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}\right)^4}{\left(2\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^4}\times 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{2^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-3\pi)}}{2^4\times 3^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}\times 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} =$

$= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-3\pi)}}{2^2\times 3^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}\times 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{36}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-3\pi-\frac{2\pi}{3}\right)}\times 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} =$

$= \frac{1}{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-3\pi-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{10\pi}{3}\right)} = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$

C.A.

$-\frac{10\pi}{3}+4\pi = \frac{2\pi}{3}$

32.3. $z = \frac{4(\mathrm{i}-1)^2}{\left(\mathrm{i}^5-\sqrt{3}\right)^4} = \frac{4\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^2}{\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}\right)^4} = \frac{4\times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}}{2^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{10\pi}{3}}} =$

MMA12DR © Porto Editora

C.A. Seja $z_1 = -1 + i$:

$|z_1| = \sqrt{2}$

Seja θ_1 o argumento de z_1:

$\begin{cases} \tan\theta_1 = -1 \\ (-1, 1) \in 2.^{\circ}\,Q. \end{cases} \Rightarrow \arg(z_1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$5 \mid 4$

$1 \quad 1$

Seja $z_2 = -\sqrt{3} + i$.

$|z_2| = 2$

Seja θ_2 o argumento de z_2:

$\begin{cases} \tan\theta_2 = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ (-\sqrt{3}, 1) \in 2.^{\circ}\,Q. \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \arg(z_2) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$= \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{10\pi}{3}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{11\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

C.A. $-\frac{11\pi}{6} + 2\pi = \frac{\pi}{6}$

32.4. $z = \frac{3 - 5i + 2i^{17}}{\left(\sqrt[8]{2}e^{i\frac{\pi}{16}}\right)^4} = \frac{3 - 5i + 2i}{\left(\sqrt[8]{2}\right)^4 e^{i\frac{4\pi}{16}}} = \frac{3 - 3i}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} =$

C.A. $17 \mid 4$

$1 \quad 4$

$i^{17} = i^1 = i$

Seja $z_1 = 3 - 3i$:

$|z_1| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Seja θ_1 o argumento de z_1:

$\begin{cases} \tan\theta_1 = \frac{-3}{3} = -1 \\ (3, -3) \in 4.^{\circ}\,Q. \end{cases} \Rightarrow \arg(z_1) = -\frac{\pi}{4}$

$z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

$= \frac{3\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)} = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

32.5. $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i =$

$= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$

Seja θ o argumento de z:

$\begin{cases} \tan\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in 1.^{\circ}\,Q. \end{cases} \Rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{6}$

$z = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

Questão 33

$\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{e^{i\theta}}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i(-\theta)}} =$

$= e^{i(\theta - (-\theta))} = e^{i(2\theta)}$

Pág. 169

Questão 34

$z = \left(\frac{i-1}{i-\sqrt{3}}\right)^n \Leftrightarrow z = \left(\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}\right)^n \Leftrightarrow$

C.A. Seja $z_1 = -1 + i$

$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Seja θ_1 o argumento de z_1:

$\begin{cases} \tan\theta_1 = -1 \\ (-1, 1) \in 2.^{\circ}\,Q. \end{cases} \Rightarrow \arg(z_1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Seja $z_2 = -\sqrt{3} + i$.

$|z_2| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$

Seja θ_2 o argumento de z_2:

$\begin{cases} \tan\theta_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \left(-\sqrt{3}, 1\right) \in 2.^{\circ}\,Q. \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \arg(z_2) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

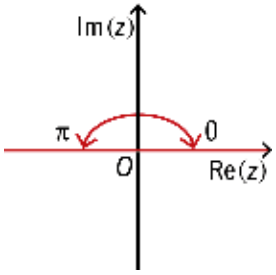
$z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}^n e^{i\frac{3n\pi}{4}}}{2^n e^{i\frac{5n\pi}{6}}} \Leftrightarrow z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{3n\pi}{4} - \frac{5n\pi}{6}\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{n\pi}{12}\right)}$

MMA12DR © Porto Editora

34.1. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{-n\pi}{12} = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow -\frac{n}{12} = k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -n = 12k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

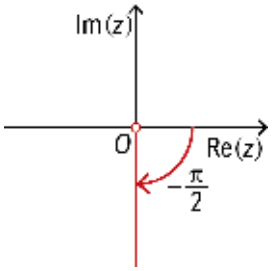
$\Leftrightarrow n = -12k, k \in \mathbb{Z}$

$k = 0, n = 0 \notin \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$k = 1, n = -12 \notin \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$k = -1, n = 12 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

34.2. z imaginário puro de coeficiente negativo $\Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow \frac{-n\pi}{12} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{n}{12} = -\frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -n = -6 + 24k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 6 - 24k, k \in \mathbb{Z}$

$k = 0, n = 6 \in \mathbb{N}$

Questão 35

$z_1 = 2\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$; $\overline{z_1} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

$z_2 = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$

$|z_2| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$

Seja θ_2 o argumento de z_2:

$$\begin{cases} \tan\theta_2 = \sqrt{3} \\ (1, \sqrt{3}) \in 1^{\circ}\,\mathrm{Q} \end{cases} \Rightarrow \arg(z_2) = \frac{\pi}{3}$$

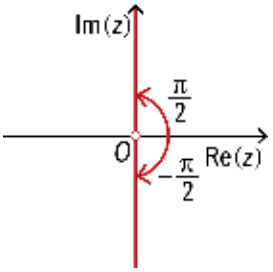
$z_2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

$-z_2 = -2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$

$\frac{\overline{z_1}}{(-z_2)^n} = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}}{2^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{4n\pi}{3}\right)}} = 2^{-n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{4n\pi}{3}\right)}$

$\frac{\overline{z_1}}{(-z_2)^n}$ é um imaginário puro $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} - \frac{4n\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} - \frac{4n}{3} = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -3 - 8n = 3 + 6k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8n = 6 + 6k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{6 + 6k}{-8}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \frac{-3 - 3k}{4}, k \in \mathbb{Z}$

$k = 0, n = -\frac{3}{4} \notin \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$k = -1, n = \frac{-3 + 3}{4} = 0 \notin \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$k = -2, n = \frac{-3 - 3 \times (-2)}{4} = \frac{3}{4} \notin \mathbb{N} \setminus \{0\}$

…

$k = -5, n = \frac{-3 - 3 \times (-5)}{4} = 3 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Questão 36

$z_1 = 1 - \mathrm{i}$; $w = \left(\mathrm{i} \times \overline{z_1}\right)^n$

$\overline{z_1} = 1 + \mathrm{i}$

$\left|\overline{z_1}\right| = \sqrt{2}$

Seja θ o argumento de $\overline{z_1}$:

$$\begin{cases} \tan\theta = 1 \\ (1, 1) \in 1.^{\circ}\,\mathrm{Q}. \end{cases} \Rightarrow \arg\left(\overline{z_1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$\overline{z_1} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

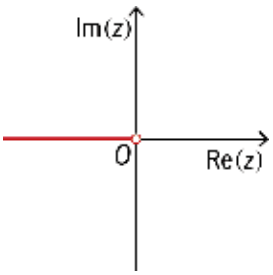
$w = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}\right)^n = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^n =$

$= \sqrt{2}^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3n\pi}{4}}$

36.1. w é um número real negativo $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3n\pi}{4} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3n}{4} = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3n = 4 + 8k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{4 + 8k}{3}, k \in \mathbb{Z}$



$k = 1, n = \frac{4 + 8 \times 1}{3} = 4 \in \mathbb{N}$

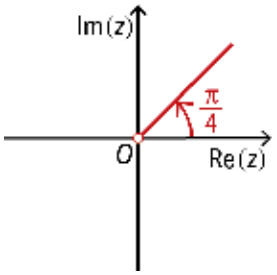
MMA12DR © Porto Editora

36.2. $\text{Re}(w) = \text{Im}(w) \wedge \text{Re}(w) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3n\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3n}{4} = \frac{1}{4} + 2k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3n = 1 + 8k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{1+8k}{3}, k \in \mathbb{Z}$

$k = 1, n = \frac{1+8\times 1}{3} = 3 \in \mathbb{N}$



Pág. 170

Questão 37

$z = z' \times e^{i\theta} \Leftrightarrow 2 + 4i = \left(-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i\right)e^{i\theta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2+4i}{-\sqrt{2}+3\sqrt{2}i} = e^{i\theta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(2+4i)\left(-\sqrt{2}-3\sqrt{2}i\right)}{\left(-\sqrt{2}+3\sqrt{2}i\right)\left(-\sqrt{2}-3\sqrt{2}i\right)} = e^{i\theta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-2\sqrt{2}-6\sqrt{2}i-4\sqrt{2}i-12\sqrt{2}i^2}{\left(-\sqrt{2}\right)^2-\left(3\sqrt{2}i\right)^2} = e^{i\theta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-2\sqrt{2}-6\sqrt{2}i-4\sqrt{2}i+12\sqrt{2}}{2-9\times 2i^2} = e^{i\theta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{10\sqrt{2}-10\sqrt{2}i}{2+18} = e^{i\theta} \Leftrightarrow \frac{10\sqrt{2}-10\sqrt{2}i}{20} = e^{i\theta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{i\theta}$

Seja $w = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$:

$|w| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$

Seja θ o argumento de w:

$$\begin{cases} \tan\theta = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1 \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in 4^{\circ}\text{Q} \end{cases} \Rightarrow \arg(w) = -\frac{\pi}{4}$$

$w = e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

$e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\theta} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Questão 38

$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

38.1. $z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{8}}$

$\overline{z_2} = \overline{4e^{i\frac{\pi}{8}}} = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{8}\right)}$

$z_1 \times \overline{z_2} = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \times 4e^{i\left(-\frac{\pi}{8}\right)} = 8e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right)} = 8e^{i\frac{\pi}{8}}$

38.2. $-z_1 = -2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$

C.A. $\left|\ \frac{5\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4}\right.$

$z_2^{\,2} = \left(4e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2 = 16e^{i\frac{2\pi}{8}} = 16e^{i\frac{\pi}{4}}$

$-z_1 \times z_2^{\,2} = 2e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} \times 16e^{i\frac{\pi}{4}} = 32e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = 32e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

Pág. 171

Questão 39

39.1. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$

Seja θ o argumento de z:

$$\begin{cases} \tan\theta = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \in 4.^{\circ}\text{Q}. \end{cases} \Rightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{6}$$

$|z| = 1$ e $\arg(z) = -\frac{\pi}{6}$

39.2. $z = e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$\overline{z} = \overline{e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}} = e^{i\frac{\pi}{6}}$

$\overline{z}^3 = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3 = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$w\overline{z}^3 = we^{i\frac{\pi}{2}}$

O afixo do número complexo $w\overline{z}^3$ é a imagem do afixo de w pela rotação de centro O e ângulo de $\frac{\pi}{2}$, logo situa-se no 3º quadrante.

Entre os pontos no 3º quadrante, z_1 e z_2, o que corresponde à rotação de $\frac{\pi}{2}$ é o z_2.

Opção (B)

MMA12DR © Porto Editora

Questão 40

$z_1 = e^{i\theta}$

$z_2 = \dfrac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2i+2i^2}{1-i^2} = \dfrac{-2+2i}{2} = -1+i$

$|z_2| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$

Seja θ o argumento de z_2:

$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{1}{-1} = -1 \\ (-1,1) \in 2.^{\circ}\,Q. \end{cases} \Rightarrow \arg(z_2) = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$

$z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z_1 \times z_2 = e^{i\theta} \times \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)}$

Como $z_1 \times z_2$ é um ponto do 3.º quadrante:

$-\pi < \theta + \dfrac{3\pi}{4} < -\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\pi - \dfrac{3\pi}{4} < \theta < -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{7\pi}{4} < \theta < -\dfrac{5\pi}{4} \Leftrightarrow -\dfrac{7\pi}{4} + 2\pi < \theta < -\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{3\pi}{4}$

Pág. 172

Questão 41

$\sqrt{i} = \sqrt{1e^{i\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{1}e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}+\frac{2k\pi}{2}\right)} = 1e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)}, k = 0,1$

Se $k = 0$,

$z_0 = 1e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

Se $k = 1$, $z_1 = 1e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi\right) =$

$= -\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

Pág. 173

Questão 42

42.1. $\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1e^{i\pi}} = \sqrt[4]{1}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)}, k = 0,1,2,3$

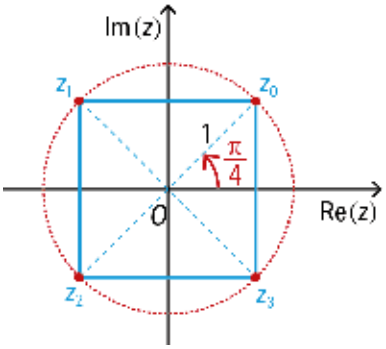
Se $k = 0$, $z_0 = 1e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$

Se $k = 1$, $z_1 = 1e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Se $k = 2$, $z_2 = 1e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$

Se $k = 3$, $z_3 = 1e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{6\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{7\pi}{4}}$

Os afixos das raízes quartas de -1 são os vértices de um quadrado inscrito numa circunferência de centro O e raio 1.



42.2. $\sqrt[4]{i} = \sqrt[4]{1e^{i\frac{\pi}{2}}} = \sqrt[4]{1}e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)} = 1e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)}, k = 0,1,2,3$

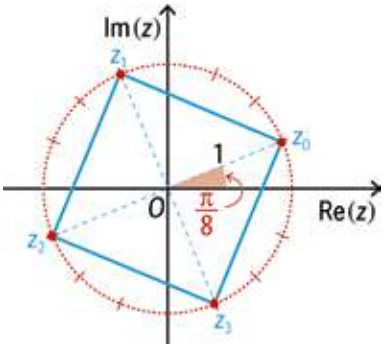
Se $k = 0$, $z_0 = e^{i\frac{\pi}{8}}$

Se $k = 1$, $z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{8}}$

Se $k = 2$, $z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right)} = e^{i\frac{9\pi}{8}}$

Se $k = 3$, $z_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{13\pi}{8}}$

Os afixos das raízes quartas de i são os vértices de um quadrado inscrito numa circunferência de centro O e raio 1.



Pág. 174

Questão 43

43.1. $w = 1 = e^{i0}$

$\sqrt[3]{w} = \sqrt[3]{e^{i0}} = \sqrt[3]{1}e^{i\left(\frac{0}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)} = 1e^{i\frac{2k\pi}{3}}$

$k = 0,1,2$

Se $k = 0$, $z_0 = e^{i0}$

Se $k = 1$, $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

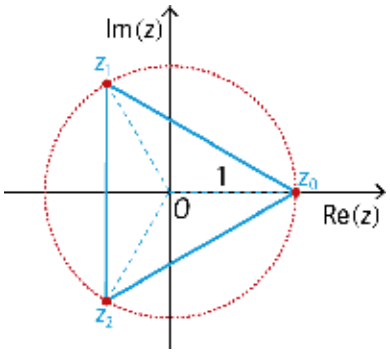
Se $k = 2$, $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

As raízes cúbicas de w são:

$z_0 = e^{i0}$, $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ e $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Os afixos de z_0, z_1 e z_2 são os vértices de um triângulo equilátero inscrito na circunferência de centro O e raio 1.

MMA12DR © Porto Editora



43.2. $w = 27e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$\sqrt[3]{w} = \sqrt[3]{27e^{-i\frac{\pi}{2}}} = \sqrt[3]{27}e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{2}}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)} = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$

$k = 0, 1, 2$

Se $k = 0$, $z_0 = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

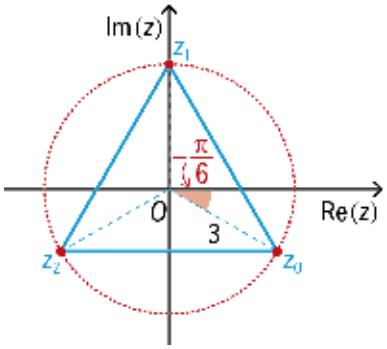
Se $k = 1$, $z_1 = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 3e^{i\frac{3\pi}{6}} = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$

Se $k = 2$, $z_2 = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 3e^{i\frac{7\pi}{6}}$

As raízes cúbicas de w são:

$z_0 = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$, $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$ e $z_2 = 3e^{i\frac{7\pi}{6}}$

Os afixos de z_0, z_1 e z_2 são os vértices de um triângulo equilátero inscrito na circunferência de centro O e raio 3.



Questão 44

44.1. $w = -i = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

$\sqrt[4]{w} = \sqrt[4]{e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}} = \sqrt[4]{1}e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{2}}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)} = 1e^{i\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{4}\right)}$

$k = 0, 1, 2, 3$

Se $k = 0$, $z_0 = e^{i\left(-\frac{\pi}{8}\right)}$

Se $k = 1$, $z_1 = e^{i\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{3\pi}{8}}$

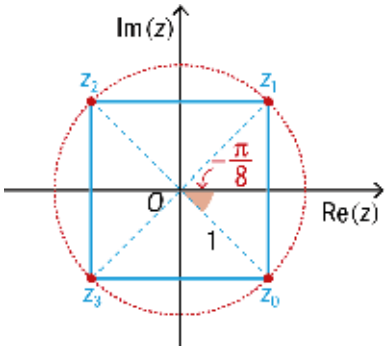
Se $k = 2$, $z_2 = e^{i\left(-\frac{\pi}{8}+\pi\right)} = e^{i\frac{7\pi}{8}}$

Se $k = 3$, $z_3 = e^{i\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{11\pi}{8}}$

As raízes quartas de w são:

$z_0 = e^{i\left(-\frac{\pi}{8}\right)}$, $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{8}}$, $z_2 = e^{i\frac{7\pi}{8}}$ e $z_3 = e^{i\frac{11\pi}{8}}$

Os afixos das raízes quartas de $-i$ são os vértices de um quadrado inscrito numa circunferência de centro O e raio 1.



44.2. $w = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$|w| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

Seja θ o argumento de w:

$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \\ \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in 3.^{\circ}\,Q. \end{cases} \Rightarrow \arg(w) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$w = 1e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$\sqrt[4]{w} = \sqrt[4]{1e^{i\frac{4\pi}{3}}} = \sqrt[4]{1}e^{i\left(\frac{\frac{4\pi}{3}}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{4\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\right)}$

$k = 0, 1, 2, 3$

Se $k = 0$, $z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}}$

Se $k = 1$, $z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Se $k = 2$, $z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Se $k = 3$, $z_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{11\pi}{6}}$

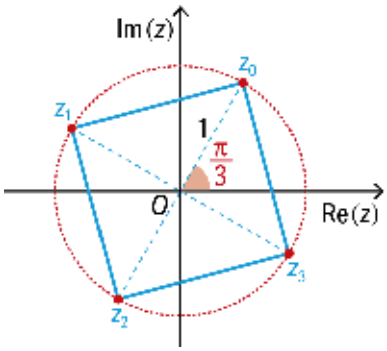
As raízes quartas de w são:

$z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{6}}$, $z_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{8\pi}{6}}$ e

$z_3 = e^{i\frac{11\pi}{6}}$

Os afixos das raízes quartas de w são os vértices de um quadrado inscrito numa circunferência de centro O e raio 1.

MMA12DR © Porto Editora



Questão 45

45.1. $w=-1=e^{i\pi}$

$\sqrt[6]{w}=\sqrt[6]{e^{i\pi}}=\sqrt[6]{1}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6}\right)}$

$k=0,1,2,3,4,5$

Se $k=0$, $z_0=e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Se $k=1$, $z_1=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Se $k=2$, $z_2=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Se $k=3$, $z_3=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{6\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

Se $k=4$, $z_4=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{8\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

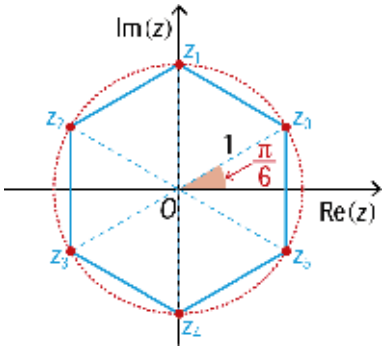
Se $k=5$, $z_5=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{10\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{11\pi}{6}}$.

As raízes sextas de w são:

$z_0=e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_1=e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_2=e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$z_3=e^{i\frac{7\pi}{6}}$, $z_4=e^{i\frac{3\pi}{2}}$, $z_5=e^{i\frac{11\pi}{6}}$

Os afixos das raízes sextas de w são os vértices de um hexágono inscrito numa circunferência de centro O e raio 1.



45.2. $w=8e^{i\left(-\frac{\pi}{8}\right)}$

$\sqrt[6]{w}=\sqrt[6]{8e^{i\left(-\frac{\pi}{8}\right)}}=\sqrt[6]{8}e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{8}}{6}+\frac{2k\pi}{6}\right)}=\sqrt[6]{2^3}e^{i\left(-\frac{\pi}{48}+\frac{2k\pi}{6}\right)}=$

$=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{48}+\frac{2k\pi}{6}\right)}, k=0,1,2,3,4,5$

Se $k=0$, $z_0=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{48}\right)}$

Se $k=1$, $z_1=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{48}+\frac{2\pi}{6}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{16}}$

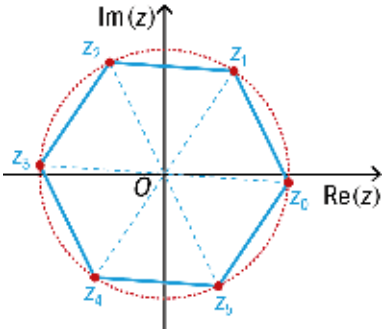
Se $k=2$, $z_2=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{48}+\frac{4\pi}{6}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{31\pi}{48}}$.

Se $k=3$, $z_3=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{48}+\frac{6\pi}{6}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{47\pi}{48}}$.

Se $k=4$, $z_4=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{48}+\frac{8\pi}{6}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{21\pi}{16}}$.

Se $k=5$, $z_5=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{48}+\frac{10\pi}{6}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{79\pi}{48}}$.

Os afixos das raízes sextas de w são os vértices de um hexágono inscrito numa circunferência de centro O e raio $\sqrt{2}$.



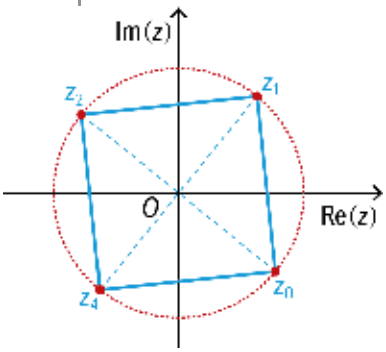
Questão 46

46.1. $z_0=2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{6}$; $\frac{2\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}$

$\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{8\pi}{6}$

C.A. $\left|\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\right.$



46.2. $z_0=2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}-i$

$z_1=2e^{i\frac{2\pi}{6}}=2e^{i\frac{\pi}{3}}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$

$=1+\sqrt{3}i$

$z_2=2e^{i\frac{5\pi}{6}}=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=$

$=2\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right]=$

MMA12DR © Porto Editora

$$= 2\left(-\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$$

$$z_3 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{6}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)=$$

$$= 2\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right]=$$

$$= 2\left(-\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$$

46.3. $z=(z_0)^4=\left[2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\right]^4=2^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{4\pi}{6}\right)}=16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}=$

$$= 16\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]=$$

$$= 16\left(\cos\frac{2\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$= 16\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]=$$

$$= 16\left(-\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$= 16\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-8-8\sqrt{3}\mathrm{i}$$

Pág. 175

Questão 47

47.1. $8z^3=27 \Leftrightarrow z^3=\frac{27}{8} \Leftrightarrow z^3=\frac{27}{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} \Leftrightarrow$

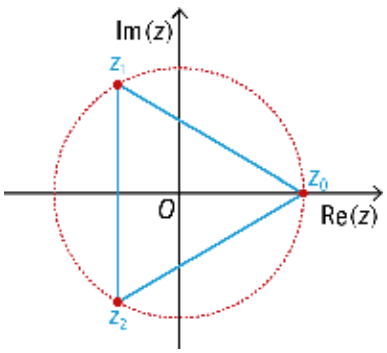
$$\Leftrightarrow z=\sqrt[3]{\frac{27}{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}} \Leftrightarrow z=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{0}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow$$

$$z=\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{3}} \Leftrightarrow k=0,1,2$$

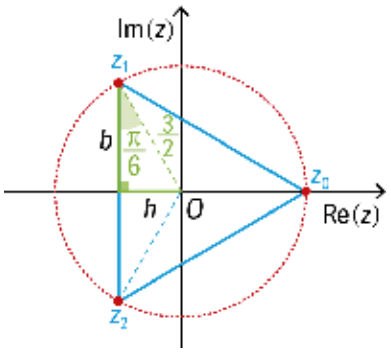
$$\Leftrightarrow z=\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} \vee z=\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \vee z=\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$$

$$S=\left\{\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}0},\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}},\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}\right\}$$

As imagens geométricas das soluções da equação definem, no plano complexo, um triângulo equilátero, centrado na origem, com vértices numa circunferência de raio $\frac{3}{2}$.



47.2. O triângulo equilátero $[z_0z_1z_2]$ é composto por três triângulos isósceles, com os dois lados iguais de medida $\frac{3}{2}$.



$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{b}{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2b}{3} \Leftrightarrow 4b=3\sqrt{3} \Leftrightarrow b=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{h}{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{2h}{3} \Leftrightarrow 4h=3 \Leftrightarrow h=\frac{3}{4}$$

$$A_{[z_0z_1z_2]}=3\times\cancel{2}\times\frac{h\times b}{\cancel{2}}=3\times\frac{3}{4}\times\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{27\sqrt{3}}{16}\text{ u.a.}$$

$$P_{[z_0z_1z_2]}=2b\times3=2\times\frac{3\sqrt{3}}{4}\times3=\frac{9\sqrt{3}}{2}\text{ u.c.}$$

Questão 48

$z_1=-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$; $z_2=1-\mathrm{i}\sqrt{3}$

48.1. $|z_1|=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2$

Seja θ_1 o argumento de z_1:

$$\begin{cases}\tan\theta_1=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}\\ \left(-1,-\sqrt{3}\right)\in 3^{\circ}\text{Q}\end{cases}\Rightarrow \arg(z_1)=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}=2\pi-\frac{2\pi}{3}$$

$$z_1=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$|z_2|=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2$$

Seja θ_2 o argumento de z_2:

$$\begin{cases}\tan\theta_2=-\frac{\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}\\ \left(1,-\sqrt{3}\right)\in 4^{\circ}\text{Q}\end{cases}\Rightarrow \arg(z_2)=-\frac{\pi}{3}$$

$$z_2=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$$

Seja n o número de lados do polígono:

$$\arg(z_1)+\frac{2\pi}{n}=\arg(z_2) \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{n}=-\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{n}=-\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{n}=\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \pi n=6\pi \Leftrightarrow n=6$$

Logo, o polígono é um hexágono.

MMA12DR © Porto Editora

48.2. $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

Os argumentos dos afixos que são vértices consecutivos do hexágono diferem entre si $\frac{\pi}{3}$ radianos.

$z_3=2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}=2e^{i0}=2(\cos 0+i\sin 0)=2(1+i\times 0)=2$

$z_4=2e^{i\left(0+\frac{\pi}{3}\right)}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+\sqrt{3}i$

$z_5=2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}=2e^{i\frac{2\pi}{3}}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=$

$=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+\sqrt{3}i$

$z_6=2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}=2e^{i\pi}=2(\cos\pi+i\sin\pi)=$

$=2(-1+i\times 0)=-2$

As coordenadas dos vértices do hexágono são: $(-1,-\sqrt{3})$, $(1,-\sqrt{3})$, $(2,0)$, $(1,\sqrt{3})$, $(-1,\sqrt{3})$ e $(-2,0)$

48.3. $2^6=64$

Logo, $z^6=64$, por exemplo.

Pág. 176

Questão 49

49.1. $z^4=z\Leftrightarrow z^4-z=0\Leftrightarrow z(z^3-1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0\vee z^3-1=0\Leftrightarrow z=0\vee z^3=1\Leftrightarrow z=0\vee z=\sqrt[3]{1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0\vee z=\sqrt{e^{i\times 0}}\Leftrightarrow z=0\vee z=\sqrt[3]{1}e^{i\left(\frac{0}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0\vee z=e^{i\frac{2k\pi}{3}},k=0,1,2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0\vee z=e^{i\times 0}\vee z=e^{i\frac{2\pi}{3}}\vee z=e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$S=\left\{0,1,e^{i\frac{2\pi}{3}},e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\}$

49.2. $z=|z|e^{i\theta}$

$z^4=\overline{z}^2\Leftrightarrow\left(|z|e^{i\theta}\right)^4=\left(|z|e^{i(-\theta)}\right)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|z|^4e^{i4\theta}=|z|^2e^{i(-2\theta)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|z|^4=|z|^2\wedge 4\theta=-2\theta+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|z|^4-|z|^2=0\wedge 6\theta=2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|z|^2\left(|z|^2-1\right)=0\wedge\theta=\frac{2k\pi}{6},k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(|z|^2=0\vee|z|^2=1\right)\wedge\theta=\frac{k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(|z|=0\vee|z|=1\right)\wedge\theta=\frac{k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0\vee z=e^{i\frac{k\pi}{3}},k\in\mathbb{Z}$

Se $k=0$, $z=e^{i0}=1$

Se $k=1$, $z=e^{i\frac{\pi}{3}}$

Se $k=2$, $z=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Se $k=3$, $z=e^{i\pi}$

Se $k=4$, $z=e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Se $k=5$, $z=e^{i\frac{5\pi}{3}}$

Se $k=6$, $z=e^{i\frac{6\pi}{3}}=e^{i2\pi}=e^{i0}=1$

$S=\left\{0,1,e^{i\frac{\pi}{3}},e^{i\frac{2\pi}{3}},e^{i\pi},e^{i\frac{4\pi}{3}},e^{i\frac{5\pi}{3}}\right\}$

49.3. $z^3=(1-i)^3\Leftrightarrow z^3=2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}\right)^3e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}}\Leftrightarrow z=\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}\right)^3}e^{i\left(\frac{-\frac{3\pi}{4}}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}\Leftrightarrow z=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)},k=0,1,2$

C.A. Seja $w=1-i$

$|w|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

Seja θ o argumento de w:

$\begin{cases}\tan\theta=\frac{-1}{1}=-1\Rightarrow\arg(w)=-\frac{\pi}{4}\\(1,-1)\in 4^{o}Q\end{cases}$

$w=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

$w^3=\left(\sqrt{2}\right)^3e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$

Se $k=0$, $z=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

Se $k=1$, $z=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

Se $k=2$, $z=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}$

$S=\left\{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)},\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}},\sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}\right\}$

49.4. $\overline{z^3}-z=0\Leftrightarrow z=|z|e^{i\theta}\Leftrightarrow z^3=|z|^3e^{i3\theta}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overline{z^3}=|z|^3e^{i(-3\theta)}$

$\overline{z^3}-z=0\Leftrightarrow\overline{z^3}=z\Leftrightarrow|z|^3e^{i(-3\theta)}=|z|e^{i\theta}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|z|^3=|z|\wedge-3\theta=\theta+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|z|^3-|z|=0\wedge-4\theta=2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|z|\left(|z|^2-1\right)=0\wedge\theta=\frac{-k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|z|=0\vee|z|=1\wedge\theta=\frac{-k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0\vee z=e^{i\left(\frac{-k\pi}{2}\right)},k\in\mathbb{Z}$

MMA12DR © Porto Editora

Se $k=0$, $z=e^{i0}=1$

Se $k=1$, $z=e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=-i$

Se $k=2$, $z=e^{i(-\pi)}=e^{i\pi}=-1$

Se $k=3$, $z=e^{i\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$

$S=\{0,1,-1,i,-i\}$

49.5. $z^4+i=1\Leftrightarrow z^4=1-i\Leftrightarrow z^4=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\Leftrightarrow$

C.A. $\left|\begin{array}{l} w=1-i \\ |w|=\sqrt{2} \\ \arg(w)=-\frac{\pi}{4} \\ w=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{4}}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\sqrt[8]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right)},k=0,1,2,3$

Se $k=0$, $z_0=\sqrt[8]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{16}\right)}$

Se $k=1$, $z_1=\sqrt[8]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt[8]{2}e^{i\frac{7\pi}{16}}$

Se $k=2$, $z_2=\sqrt[8]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{16}+\pi\right)}=\sqrt[8]{2}e^{i\frac{15\pi}{16}}$

Se $k=3$, $z_3=\sqrt[8]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{16}+\frac{3\pi}{2}\right)}=\sqrt[8]{2}e^{i\frac{23\pi}{16}}$

$S=\left\{\sqrt[8]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{16}\right)},\sqrt[8]{2}e^{i\frac{7\pi}{16}},\sqrt[8]{2}e^{i\frac{15\pi}{16}},\sqrt[8]{2}e^{i\frac{23\pi}{16}}\right\}$

Questão 50

$z_0=\frac{\sqrt{3}-i}{4}$; $z=z_0{}^4$

50.1. $z_0=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{i}{4}$

$|z_0|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{16}+\frac{1}{16}}=\frac{1}{2}$

Seja θ_0 o argumento de z_0:

$\begin{cases} \tan(\theta_0)=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}}=-\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{1}{4}\right)\in 4.^{o}\,Q. \end{cases}\Rightarrow \arg(z_0)=-\frac{\pi}{6}$

$z_0=\frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$z_0{}^4=\left(\frac{1}{2}\right)^4e^{i\left(-\frac{4\pi}{6}\right)}=\frac{1}{16}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$

$z=\frac{1}{16}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$

50.2. $z=z_0{}^4$

$z_0{}^4=\left(\frac{1}{2}\right)^4e^{i\left(-\frac{4\pi}{6}\right)}=\frac{1}{16}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$

$\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{\frac{1}{16}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}}=\sqrt[4]{\frac{1}{16}}e^{i\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)}=$

$=\frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\right)},k=0,1,2,3$

Se $k=0$, $z_0=\frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

Se $k=1$, $z_1=\frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

Se $k=2$, $z_2=\frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\pi\right)}=\frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Se $k=3$, $z_3=\frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)}=\frac{1}{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$

As raízes quartas de z são:

$\frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)},\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}},\frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}},\frac{1}{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Questão 51

$(z+1)^4=1\Leftrightarrow z+1=\sqrt[4]{1}\Leftrightarrow z+1=\sqrt[4]{e^{i0}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z+1=\sqrt[4]{1}e^{i\left(\frac{0}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)}\Leftrightarrow z+1=e^{i\frac{k\pi}{2}},k=0,1,2,3$

Se $k=0$, $z+1=e^{i0}\Leftrightarrow z+1=1\Leftrightarrow z=0$

Se $k=1$, $z+1=e^{i\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow z+1=i\Leftrightarrow z=-1+i$

Se $k=2$, $z+1=e^{i\pi}\Leftrightarrow z+1=-1\Leftrightarrow z=-2$

Se $k=3$, $z+1=e^{i\frac{3\pi}{2}}\Leftrightarrow z+1=-i\Leftrightarrow z=-1-i$

$S=\{0,-1+i,-2,-1-i\}$

Pág. 177

Questão 52

$\sqrt{5-12i}$

Como não se consegue determinar, sem recurso à calculadora, o valor do ângulo cuja tangente é $-\frac{12}{5}$, vamos resolver a equação efetuando os cálculos na forma algébrica.

As raízes quadradas de $5-12i$ são as soluções da equação $z^2=5-12i$.

Seja $z=x+yi$

$z^2=5-12i\Leftrightarrow(x+yi)^2=5-12i\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+2xyi+y^2i^2=5-12i\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+2xyi-y^2=5-12i\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2-y^2)+2xyi=5-12i\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-y^2=5\wedge 2xy=-12\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-y^2=5\wedge y=-\frac{6}{x}\Leftrightarrow$

MMA12DR © Porto Editora

$\Leftrightarrow x^2-\left(-\frac{6}{x}\right)^2=5 \wedge y=-\frac{6}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-\frac{36}{x^2}=5 \wedge y=-\frac{6}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^4-5x^2-36=0 \wedge y=-\frac{6}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times(-36)}}{2} \wedge y=-\frac{6}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=\frac{5\pm13}{2} \wedge y=-\frac{6}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^2=9 \vee \underbrace{x^2=-4}_{\text{impossível}}\right) \wedge y=-\frac{6}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x=-3 \vee x=3) \wedge y=-\frac{6}{x}$

Se $x=-3$, $y=2$ e $z=-3+2\mathrm{i}$

Se $x=3$, $y=-2$ e $z=3-2\mathrm{i}$

Questão 53

$4z^2-4\mathrm{i}=3 \Leftrightarrow 4z^2=3+4\mathrm{i} \Leftrightarrow z^2=\frac{3}{4}+\mathrm{i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2=\frac{3}{4}+\mathrm{i}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4} \Leftrightarrow z^2=1+\mathrm{i}-\frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2=1+\mathrm{i}+\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^2 \Leftrightarrow z^2=\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}+1\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\frac{1}{2}\mathrm{i}+1 \vee z=-\frac{1}{2}\mathrm{i}-1$

$S=\left\{1+\frac{1}{2}\mathrm{i},-1-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$

Questão 54

$A(z)=z^3+\mathrm{i}z^2+2\mathrm{i}$

54.1. $A(z)=(z-\mathrm{i})\left(z^2+2\mathrm{i}z-2\right)$

i é um zero de $A(z)$.

	1	i	0	2i
i		i	$2\mathrm{i}^2=-2$	−2i
	1	2i	−2	0

Logo, $A(z)=(z-\mathrm{i})\left(z^2+2\mathrm{i}z-2\right)$

54.2. $A(z)=0 \Leftrightarrow (z-\mathrm{i})\left(z^2+2\mathrm{i}z-2\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z-\mathrm{i}=0 \vee z^2+2\mathrm{i}z-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\mathrm{i} \vee z=\frac{-2\mathrm{i}\pm\sqrt{(2\mathrm{i})^2-4\times1\times(-2)}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\mathrm{i} \vee z=\frac{-2\mathrm{i}\pm\sqrt{-4+8}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\mathrm{i} \vee z=\frac{-2\mathrm{i}+2}{2} \vee z=\frac{-2\mathrm{i}-2}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\mathrm{i} \vee z=1-\mathrm{i} \vee z=-1-\mathrm{i}$

$S=\{\mathrm{i},1-\mathrm{i},-1-\mathrm{i}\}$

Questão 55

$z^3+3\mathrm{i}z^2-7z-5\mathrm{i}=0$

55.1. $(-\mathrm{i})^3+3\mathrm{i}(-\mathrm{i})^2-7\times(-\mathrm{i})-5\mathrm{i}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\mathrm{i}^3+3\mathrm{i}\times\mathrm{i}^2+7\mathrm{i}-5\mathrm{i}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -(-\mathrm{i})+3\mathrm{i}\times(-1)+2\mathrm{i}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{i}-3\mathrm{i}+2\mathrm{i}=0 \Leftrightarrow 0=0$

Logo, $-\mathrm{i}$ é solução da equação.

55.2. $z^3+3\mathrm{i}z^2-7z-5\mathrm{i}=0 \Leftrightarrow$

C.A.

	1	3i	−7	−5i
−i		−i	$-2\mathrm{i}^2=2$	5i
	1	2i	−5	0

$\Leftrightarrow (z+\mathrm{i})\left(z^2+2\mathrm{i}z-5\right)=0 \Leftrightarrow z+\mathrm{i}=0 \vee z^2+2\mathrm{i}z-5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=-\mathrm{i} \vee z=\frac{-2\mathrm{i}\pm\sqrt{(2\mathrm{i})^2-4\times1\times(-5)}}{2\times1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=-\mathrm{i} \vee z=\frac{-2\mathrm{i}\pm4}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=-\mathrm{i} \vee z=2-\mathrm{i} \vee z=-2-\mathrm{i}$

$S=\{-\mathrm{i},2-\mathrm{i},-2-\mathrm{i}\}$

Pág. 178

Tarefas de consolidação 2

1. $w=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$; $z=4\sqrt{2}\mathrm{i}=4\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

$z=\frac{(1+\mathrm{i})^2\times w^2}{\mathrm{i}^5-1}=\frac{\left(1^2+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2\right)\times w^2}{\mathrm{i}-1}=\frac{(1+2\mathrm{i}-1)\times w^2}{\mathrm{i}-1}=$

C.A.

	5	4
	1	1

$\mathrm{i}^5=\mathrm{i}^1=\mathrm{i}$

$=\frac{2\mathrm{i}(-1-\mathrm{i})\times w^2}{(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}=\frac{\left(-2\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2\right)\times w^2}{(-1)^2-\mathrm{i}^2}=\frac{(-2\mathrm{i}+2)\times w^2}{1-(-1)}=$

$=\frac{(-2\mathrm{i}+2)\times w^2}{2}=(-\mathrm{i}+1)\times w^2=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\times w^2=$

C.A. $|1-\mathrm{i}|=\sqrt{2}$

Seja θ o argumento de $1-\mathrm{i}$:

$\begin{cases}\tan\theta=-1\\(1,-1)\in 4^{\circ}\mathrm{Q}\end{cases} \Rightarrow \arg(1-\mathrm{i})=-\frac{\pi}{4}$

$=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\times\left(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2=\sqrt{2}\rho^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}+2\theta\right)}$

$z=\sqrt{2}\rho^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}+2\theta\right)} \Leftrightarrow 4\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}\rho^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}+2\theta\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{2}=\sqrt{2}\rho^2 \wedge \frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}+2\theta+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho^2=4 \wedge \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=2\theta+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\underset{(\rho>0)}{\Leftrightarrow} \rho=2 \wedge \frac{3\pi}{4}-2k\pi=2\theta, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

MMA12DR © Porto Editora

$\Leftrightarrow \rho = 2 \wedge \frac{3\pi}{8} - k\pi = \theta, k \in \mathbb{Z}$

Se $k = 0$, $\theta = \frac{3\pi}{8} \notin]\pi, 2\pi[$

Se $k = 1$, $\theta = \frac{3\pi}{8} - \pi = -\frac{5\pi}{8} \notin]\pi, 2\pi[$

Se $k = -1$, $\theta = \frac{3\pi}{8} + \pi = \frac{11\pi}{8} \in]\pi, 2\pi[$

Outro modo:

$w = \rho e^{i\theta}$; $z = 4\sqrt{2}i = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$i^5 = i$

$i - 1 = \sqrt{2}e^{i\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z = \frac{(1+i)^2 \times w^2}{i^5 - 1} = \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 \times w^2}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{2}} \times w^2}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} =$

$= \frac{2}{\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)} \times w^2 = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \times w^2$

$z = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \times w^2 \Leftrightarrow 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \times w^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w^2 = \frac{4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} \Leftrightarrow w^2 = 4e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow w^2 = 4e^{i\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w = \sqrt{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} \Leftrightarrow w = \sqrt{4}e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{4}}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi\right)}, k = 0, 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w = 2e^{i\frac{3\pi}{8}} \vee w = 2e^{i\frac{11\pi}{8}}$

$\frac{3\pi}{8} \notin]\pi, 2\pi[$

$\frac{11\pi}{8} \in]\pi, 2\pi[$

2.1. $u = \frac{k - (1-2i) \times i^{4n+2}}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{k - (1-2i) \times i^2}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} =$

$= \frac{k - (1-2i) \times (-1)}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{k + 1 - 2i}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)} =$

$= \frac{k + 1 - 2i}{\sqrt{2}\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right]} =$

$= \frac{k + 1 - 2i}{\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{k + 1 - 2i}{\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} =$

$= \frac{(k + 1 - 2i)(-1 - i)}{(-1 + i)(-1 - i)} = \frac{-k - 1 - ki - i + 2i + 2i^2}{(-1)^2 - i^2} =$

$= \frac{-k - 1 - ki + i - 2}{2} = \frac{-k - 3 + i(-k + 1)}{2}$

Para $u \in \mathbb{R}$, $\frac{-k+1}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 1$.

2.2. Se o afixo de u pertence à bissetriz dos quadrantes pares, a parte real e a parte imaginária são simétricas.

Assim,

$\frac{-k-3}{2} = -\frac{-k+1}{2} \Leftrightarrow -k - 3 = k - 1 \Leftrightarrow -2k = 3 - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2k = 2 \Leftrightarrow k = -1$

$u = \frac{-k - 3 + i(-k + 1)}{2}$

$u = \frac{-(-1) - 3 + i[-(-1) + 1]}{2} = \frac{1 - 3 + i(1 + 1)}{2} =$

$= \frac{1 - 3 + 2i}{2} = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$

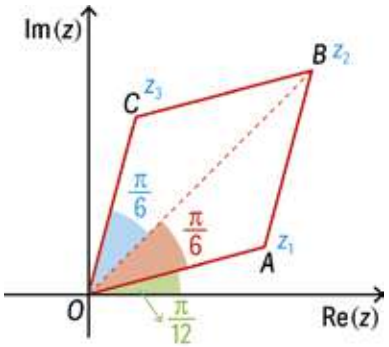
3.1. $\overline{OA} = 2 \Leftrightarrow |z_1| = 2, \arg(z_1) = \frac{\pi}{12}$

Como B pertence à bissetriz do 1.º quadrante,

$\arg(z_2) = \frac{\pi}{4}$

$\arg(z_2) - \arg(z_1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

$\arg(z_3) = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$



3.2. $\overline{OA} = \overline{OC} \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$

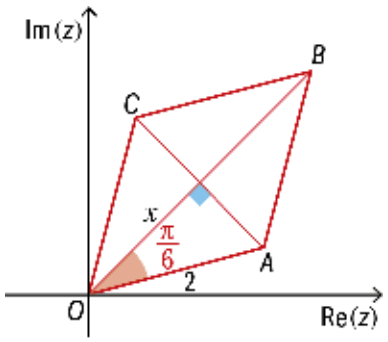
$A\hat{O}C = \arg(z_3) - \arg(z_1) = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$

Como $\overline{OA} = \overline{OC}$, $O\hat{C}A = C\hat{A}O = \frac{\pi}{3}$.

Logo, $\overline{OA} = \overline{OC} = \overline{AC}$ e o triângulo $[OAC]$ é equilátero.

MMA12DR © Porto Editora

3.3.



$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{x}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{x}{2}\Leftrightarrow x=\sqrt{3}$

$\overline{OB}=|z_2|=2\sqrt{3}$

$z_2=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$

$=\frac{2\sqrt{3}\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{2\sqrt{3}\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}+\sqrt{6}\mathrm{i}$

4. $z=\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\times(1-\mathrm{i})^2}$; $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=0$

$z=\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\times(1-\mathrm{i})^2}=\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\times(-2\mathrm{i})}=\frac{\mathrm{i}(\sqrt{3}-\mathrm{i})}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=$

C.A.

$(1-\mathrm{i})^2=1^2-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=-2\mathrm{i}$

$\mathrm{i}(\sqrt{3}-\mathrm{i})=\sqrt{3}\mathrm{i}-\mathrm{i}^2=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$

Seja $w=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$

$|w|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$

Seja θ o argumento de w:

$\begin{cases}\tan\theta=\sqrt{3}\\(1,\sqrt{3})\in 1^{\circ}\mathrm{Q}\end{cases}\Rightarrow\arg(w)=\frac{\pi}{3}$

$w=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

$\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}$

$z=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$

Como $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=0$:

$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=0\Leftrightarrow\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=$

$=-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$

Dividindo os dois membros da equação por $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$ vem:

$\tan\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=-1\Leftrightarrow\frac{\pi}{3}-\theta=-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-\theta=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}-k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\theta=\frac{7\pi}{12}-k\pi,k\in\mathbb{Z}$

$k=0,\ \theta=\frac{7\pi}{12}\notin 2^{\circ}\mathrm{Q}$

$k=-1,\ \theta=\frac{7\pi}{12}+\pi=\frac{19\pi}{12}\in 2^{\circ}\mathrm{Q}$

5. $z_1=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ e $z_2=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$

5.1. $z_1^3=\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^3=2^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=8\mathrm{i}$

$z_2=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$

$|z_2|=2$

Seja θ_2 o argumento de z_2:

$\begin{cases}\tan\theta_2=\frac{1}{-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\\(-\sqrt{3},1)\in 2^{\circ}\mathrm{Q}\end{cases}\Rightarrow\arg(z_2)=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$

$z_2=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$

$z_2^3=\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}\right)^3=2^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{15\pi}{6}}=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{2}}=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=8\mathrm{i}$

C.A. $\frac{5\pi}{2}=2\pi+\frac{\pi}{2}$

$z_1^3=z_2^3=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=8\mathrm{i}$

Logo, z_1 e z_2 são raízes cúbicas do mesmo número complexo.

5.2. $\frac{z_2}{\mathrm{i}}=\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

$\left(\frac{z_2}{\mathrm{i}}\right)^n=\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^n=2^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}}$

Para $\left(\frac{z_2}{\mathrm{i}}\right)^n$ ser um número real negativo,

$\frac{n\pi}{3}=\pi+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{n}{3}=1+2k,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=3+6k,k\in\mathbb{Z}$

Se $k=0$, $n=3\in\mathbb{N}$

MMA12DR © Porto Editora

Pág. 179

6. Seja z_0 o vértice do polígono que pertence ao eixo imaginário.

$z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$

O polígono regular inscrito na circunferência de raio 1 é um heptágono.

O ângulo entre os vértices consecutivos é $\frac{2\pi}{7}$.

Logo, todos os vértices são do tipo $z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{7}\right)}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

$(z_k)^7 = \left[e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{7}\right)}\right]^7 = e^{i\left(\frac{7\pi}{2}+2k\pi\right)} = e^{i\left(\frac{7\pi}{2}\right)} =$

$= e^{i\left(\frac{7\pi}{2}\right)} = e^{i\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = -i$

$z^7 = -i$

Na opção (A), $z^7 + i = \frac{1}{i} \Leftrightarrow z^7 + i = -i \Leftrightarrow z^7 = -2i$ (F)

Na opção (B), $z^7 - i = \frac{2}{i} \Leftrightarrow z^7 - i = -2i \Leftrightarrow z^7 = -i$ (V)

Na opção (C), $z^7 + i = 1 \Leftrightarrow z^7 = 1 - i$ (F)

Na opção (D), $z^7 + i = 2i \Leftrightarrow z^7 = i$ (F)

Outro modo:

Como a circunferência tem raio 1 e um dos vértices pertence ao eixo imaginário, um dos vértices do polígono é o afixo de $z = i$.

$z^7 = i^7 \Leftrightarrow z^7 = i^3 = -i$

Na opção (A), $z^7 + i = \frac{1}{i} \Leftrightarrow z^7 + i = -i \Leftrightarrow z^7 = -2i$ (F)

Na opção (B), $z^7 - i = \frac{2}{i} \Leftrightarrow z^7 - i = -2i \Leftrightarrow z^7 = -i$ (V)

Na opção (C), $z^7 + i = 1 \Leftrightarrow z^7 = 1 - i$ (F)

Na opção (D), $z^7 + i = 2i \Leftrightarrow z^7 = i$

7.1. $w = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

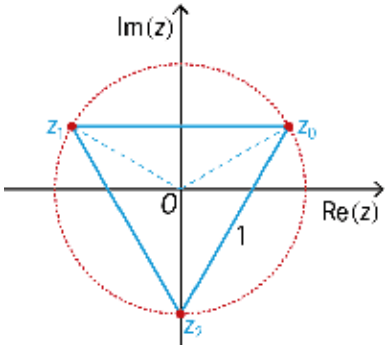
$\sqrt[3]{w} = \sqrt[3]{e^{i\frac{\pi}{2}}} = \sqrt[3]{1}e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, k = 0, 1, 2$

Se $k = 0$, $z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}$

Se $k = 1$, $z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Se $k = 2$, $z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{9\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Os afixos de z_0, z_1 e z_2 são os vértices de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de centro O e raio 1.



7.2. $w = -2 - 2i$

$|w| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$

Seja θ o argumento de w.

$\begin{cases} \tan\theta = \frac{-2}{-2} = 1 \\ (-2,-2) \in 3^{\circ}Q \end{cases} \Rightarrow \arg(w) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$w = \sqrt{8}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

$\sqrt[3]{w} = \sqrt[3]{\sqrt{8}e^{i\frac{5\pi}{4}}} = \sqrt[6]{8}e^{i\left(\frac{\frac{5\pi}{4}}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)} = \sqrt[6]{2^3}e^{i\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)} =$

$= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, k = 0, 1, 2$

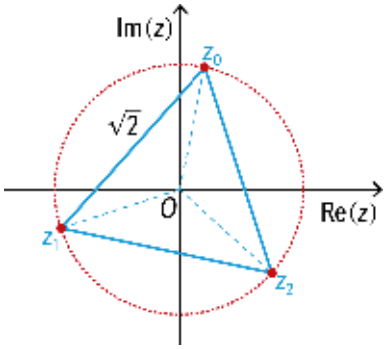
Se $k = 0$, $z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

Se $k = 1$, $z_1 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}$

Se $k = 2$, $z_2 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{21\pi}{12}} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

C.A. $\left| \frac{21\pi}{12} - 2\pi = -\frac{\pi}{4} \right.$

Os afixos de z_0, z_1 e z_2 são os vértices de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de centro O e raio $\sqrt{2}$.



8.1. $w = 1 = e^{i0}$

$\sqrt[4]{w} = \sqrt[4]{e^{i0}} = \sqrt[4]{1}e^{i\left(\frac{0}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{k\pi}{2}\right)}, k = 0, 1, 2, 3$

Se $k = 0$, $z_0 = e^{i0} = 1$

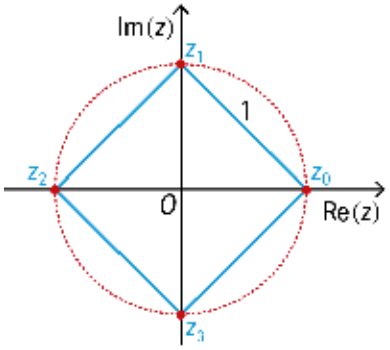
MMA12DR © Porto Editora

Se $k=1$, $z_1=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$

Se $k=2$, $z_2=e^{i\pi}=-1$

Se $k=3$, $z_3=e^{i\frac{3\pi}{2}}=-i$

Os afixos de z_0, z_1, z_2 e z_3 são os vértices de um quadrado inscrito numa circunferência de centro O e raio 1.



8.2. $w=16e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$\sqrt[4]{w}=\sqrt[4]{16e^{i\frac{2\pi}{3}}}=\sqrt[4]{16}e^{i\left(\frac{\frac{2\pi}{3}}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)}=2e^{i\left(\frac{2\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)}=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\right)}$

$k=0,1,2,3$

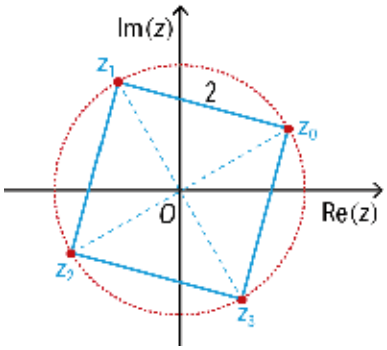
Se $k=0$, $z_0=2e^{i\frac{\pi}{6}}$

Se $k=1$, $z_1=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}=2e^{i\frac{4\pi}{6}}=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Se $k=2$, $z_2=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)}=2e^{i\frac{7\pi}{6}}$

Se $k=3$, $z_3=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)}=2e^{i\frac{10\pi}{6}}=2e^{i\frac{5\pi}{3}}$

Os afixos de z_0, z_1, z_2 e z_3 são os vértices de um quadrado inscrito numa circunferência de centro O e raio 2.



9.1. $w=-64=64e^{i\pi}$

$\sqrt[6]{w}=\sqrt[6]{64e^{i\pi}}=\sqrt[6]{64}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6}\right)}=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6}\right)}, k=0,1,2,3,4,5$

Se $k=0$, $z_0=2e^{i\frac{\pi}{6}}$

Se $k=1$ $z_1=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}\right)}=2e^{i\frac{3\pi}{6}}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$

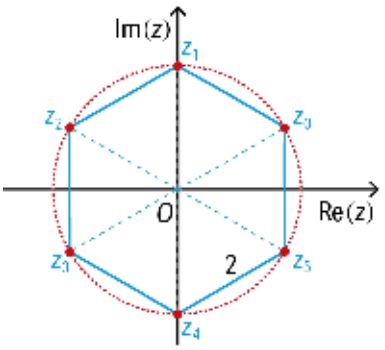
Se $k=2$, $z_2=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{6}\right)}=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Se $k=3$, $z_3=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)}=2e^{i\frac{7\pi}{6}}$

Se $k=4$, $z_4=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{8\pi}{6}\right)}=2e^{i\frac{9\pi}{6}}=2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Se $k=5$, $z_5=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{10\pi}{6}\right)}=2e^{i\frac{11\pi}{6}}$

Os afixos de z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5 são os vértices de um hexágono regular inscrito numa circunferência de centro O e raio 2.



9.2. $w=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\sqrt[6]{w}=\sqrt[6]{e^{i\frac{\pi}{2}}}=\sqrt[6]{1}e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{6}+\frac{2k\pi}{6}\right)}=e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right)}, k=0,1,2,3,4,5$

Se $k=0$, $z_0=e^{i\frac{\pi}{12}}$

Se $k=1$, $z_1=e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)}=e^{i\frac{5\pi}{12}}$

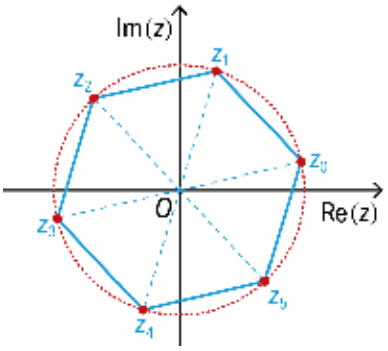
Se $k=2$, $z_2=e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{9\pi}{12}}=e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Se $k=3$, $z_3=e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)}=e^{i\frac{13\pi}{12}}$

Se $k=4$, $z_4=e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{8\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{17\pi}{12}}$

Se $k=5$, $z_5=e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{10\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{21\pi}{12}}=e^{i\frac{7\pi}{4}}$

Os afixos de z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5 são os vértices de um hexágono regular inscrito numa circunferência de centro O e raio 1.



10. $z_0=\rho e^{i\theta}$, $\theta\in 3.^{o}\,Q.$

$(1+i)z^4-16\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}=0\Leftrightarrow(1+i)z^4=16\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z^4=16\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}\Leftrightarrow z^4=\frac{16\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}\Leftrightarrow$

MMA12DR © Porto Editora

$\Leftrightarrow z^4 = 16e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow z^4 = 16e^{i(-\pi)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \sqrt[4]{16e^{i(-\pi)}} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{16}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)}, k = 0,1,2,3,4$

Se $k = 0$, $z = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}, -\frac{\pi}{4} \in 4.^{\circ}\text{Q}.$

Se $k = 1$, $z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}, \frac{\pi}{4} \in 1.^{\circ}\text{Q}.$

Se $k = 2$, $z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\pi\right)} = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}, \frac{3\pi}{4} \in 2^{\circ}\text{Q}$

Se $k = 3$, $z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{6\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}, \frac{5\pi}{4} \in 3.^{\circ}\text{Q}.$

$z_0 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) =$

$= 2\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right] = 2\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) =$

$= 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

11.1. $z_1 = -2i$

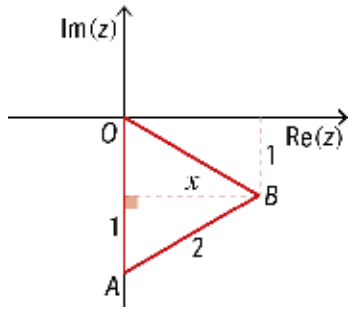
$z_2 = \sqrt{3} - i$

$|z_2| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2$

Seja θ_2 o argumento de z_2:

$$\begin{cases} \tan\theta_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ (\sqrt{3}, -1) \in 4.^{\circ}\text{Q}. \end{cases} \Rightarrow \arg(z_2) = -\frac{\pi}{6}$$

C.A.



Aplicando o teorema de Pitágoras:

$2^2 = 1^2 + x^2 \Leftrightarrow x^2 = 3 \underset{(x>0)}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{3}$

$z_2 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$z_2^{\,6} = \left[2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\right]^6 = 2^6 e^{i(-\pi)} = 64e^{i(-\pi)} =$

$= 64\left[\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right] = 64\times(-1) + 64i\times 0 = -64$

$i\times z_2^{\,6} = i\times(-64) = -64i$

Opção (A)

11.2. $z_1 = -2i$; $z_2 = \sqrt{3} - i$

$z_1 \times z_2 = -2i\left(\sqrt{3} - i\right) = -2\sqrt{3}i + 2i^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$

$|z_1 \times z_2| = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

Seja θ o argumento de $z_1 \times z_2$:

$$\begin{cases} \tan\theta = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} \\ \left(-2, -2\sqrt{3}\right) \in 3.^{\circ}\text{Q}. \end{cases} \Rightarrow \arg(z_1 \times z_2) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$z_1 \times z_2 = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$(z_1 \times z_2)^n = 4^n e^{i\frac{4n\pi}{3}}$

Para $(z_1 \times z_2)^n$ ser um número real,

$\frac{4n\pi}{3} = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{4n\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4n}{3} = k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4n = 3k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{3k}{4}, k \in \mathbb{Z}$

Se $k = 0$, $n = 0$ (F)

Se $k = 1$, $n = \frac{3}{4}$ (F)

Se $k = 2$, $n = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ (F)

Se $k = 3$, $n = \frac{9}{4}$ (F)

Se $k = 4$, $n = \frac{3\times 4}{4} = 3$ (V)

12. $(z+i)^3 = 8i$

Seja $w = z + i \Leftrightarrow z = w - i$

$w^3 = 8i \Leftrightarrow w^3 = 8e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow w = \sqrt[3]{8e^{i\frac{\pi}{2}}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w = \sqrt[3]{8}e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow w = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, k = 0,1,2$

Se $k = 0$, $w_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) =$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

$z_0 = w_0 - i = \sqrt{3} + i - i = \sqrt{3}$

Se $k = 1$,

$w_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) =$

$= 2\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right] =$

$= 2\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$

$z_1 = w_1 - i = -\sqrt{3} + i - i = -\sqrt{3}$

Se $k = 2$, $w_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{9\pi}{6}} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} =$

MMA12DR © Porto Editora

$= 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 2\left[0 + i\times(-1)\right] = -2i$

$z_2 = w_2 - i = -2i - i = -3i$

Pág. 181

Avaliação formativa 2

1.1. z_1 e z_3 são números complexos simétricos,

logo $z_1 + z_3 = 0$.

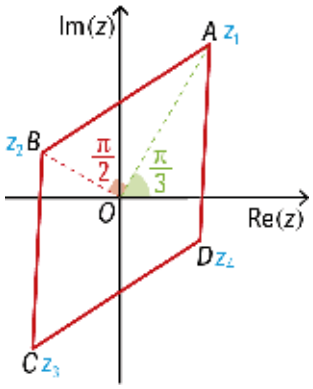
z_2 e z_4 são números complexos simétricos,

logo $z_2 + z_4 = 0$.

Assim, $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$.

Opção (C)

1.2. $z_1 = 1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$



$\arg(z_2) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$

$A(1, \sqrt{3})$

$z_3 = -z_1$

$C(-1, -\sqrt{3})$

$\overline{AC} = \sqrt{(-1-1)^2 + (-\sqrt{3}-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+4\times3} = 4$

ou $\overline{OA} = |z_1| = 2$; $\overline{AC} = 2\times\overline{OA} = 4$

$\overline{AC}$ = diagonal maior $= 4$

$D = 4$

$A_{losango} = 4 \Leftrightarrow \frac{D\times d}{2} = 4 \Leftrightarrow D\times d = 8 \Leftrightarrow 4d = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d = 2$

Diagonal menor $= 2$

$|z_2| = \frac{2}{2} = 1$

$z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} =$

$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) =$

$= -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Determinar z_2 de outro modo:

$z_2 = \frac{1}{2}z_1 \times i = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}i\right)\times i = \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

2. $u = \frac{1-i}{e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}} = \frac{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}{e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)} =$

$= \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{12}+\frac{2\pi}{12}\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}$

$\sqrt[6]{z} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)} \Leftrightarrow z = \left(\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}\right)^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6 e^{i\left(-\frac{6\pi}{12}\right)} =$

$= 2^3 e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 8e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -8i$

C.A. Seja $w = 1 - i$

$|w| = \sqrt{2}$

Seja θ o argumento de w:

$\begin{cases}\tan\theta = -1 \\ (1,-1) \in 4.^{\circ}Q\end{cases} \Rightarrow \arg(w) = -\frac{\pi}{4}$

3. $v = \frac{i-\sqrt{3}}{i^{23} + e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{i-\sqrt{3}}{-i+(-i)} = \frac{i-\sqrt{3}}{-2i} =$

$= \frac{i^2 - \sqrt{3}i}{-2i^2} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

C.A.

23	4
3	5

$i^{23} = i^3 = -i$

$|v| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

Seja θ o argumento de v:

$\begin{cases}\tan\theta = \sqrt{3} \\ \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in 3.^{\circ}Q\end{cases} \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$v = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$z^2 = v \Leftrightarrow z = \sqrt{v} \Leftrightarrow z = \sqrt{e^{i\frac{4\pi}{3}}} \Leftrightarrow z = e^{i\left(\frac{\frac{4\pi}{3}}{2}+\frac{2k\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+k\pi\right)}, \ k = 0, 1$

Se $k = 0$, $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) =$

$= -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Se $k = 1$, $z_1 = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\pi\right)} = e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{i\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} =$

$= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

MMA12DR © Porto Editora

$$S=\left\{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$$

4. $z_1=-\mathrm{i}+\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}+1;\ z_2=1-\mathrm{i};\ z_3=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

4.1. $z_1=-\mathrm{i}+\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)+1=$

$=-\mathrm{i}+\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)+1=$

$=-\mathrm{i}+\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+1=-\mathrm{i}-\cancel{1}-\mathrm{i}+\cancel{1}=-2\mathrm{i}$

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{-2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{-2\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2}{1^2-\mathrm{i}^2}=\frac{-2\mathrm{i}+2}{1+1}=1-\mathrm{i}=z_2$

4.2. $\frac{z_1\times z_3}{z_2}=\frac{z_1}{z_2}\times z_3=z_2\times z_3=$

$=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}+\theta\right)}$

C.A. $z_2=1-\mathrm{i}$

$|z_2|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

Seja θ_2 o argumento de z_2:

$\begin{cases}\tan\theta_2=-1\\(1,-1)\in 4.^{\circ}\mathrm{Q}\end{cases}\Rightarrow\theta_2=-\frac{\pi}{4}$

$z_2=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

Para $\frac{z_1\times z_3}{z_2}$ ser um imaginário puro positivo,

$-\frac{\pi}{4}+\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+2k\pi\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\theta=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Se $k=0$, $\theta=\frac{3\pi}{4}$

5. Um argumento do número complexo $-z$ é $-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$.

$\frac{3\pi}{4}-2\pi=-\frac{5\pi}{4}$

I → b)

$z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$

$=\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}$

$\overline{z}=\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}$

II → c)

$\mathrm{i}z^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{n\pi}{4}\right)}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{n\pi}{4}\right)}$

Para $\mathrm{i}z^n$ ser número real,

$\frac{\pi}{2}-\frac{n\pi}{4}=0+k\pi\Leftrightarrow-\frac{n\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow-\frac{n}{4}=-\frac{1}{2}+k\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -n=-2+4k\Leftrightarrow n=2-4k,\ k\in\mathbb{Z}$

Se $k=0$, $n=2$

III → a)

$z^4=\left[2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right]^4=2^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\pi)}=16\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\pi)}=$

$=16\left[\cos(-\pi)+\mathrm{i}\sin(-\pi)\right]=16\times(-1)+16\times\mathrm{i}\times 0=-16$

IV → b)

MMA12DR © Porto Editora

Pág. 182

Tarefa 3

1.1. O conjunto de pontos é definido por três retas:

$y=1$

$x=-2$

$y=x$

Condição que define o conjunto:

$y<1\wedge x>-2\wedge y\geq x$

1.2. O conjunto de pontos é definido por quatro retas:

$y=1$

$y=-1$

$y=x$

$y=-x$

Condição que define o conjunto:

$(y\leq 1\wedge y\geq x\wedge y\geq -x)\vee(y\geq -1\wedge y\leq x\wedge y\leq -x)$

Pág. 183

Questão 56

56.1. O conjunto de pontos é definido por três retas:

$\mathrm{Re}(z)=1$

$\mathrm{Im}(z)=-2$

$\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Re}(z)$

Condição que define o conjunto:

$\mathrm{Re}(z)<1\wedge\mathrm{Im}(z)\geq 2\wedge\mathrm{Im}(z)<\mathrm{Re}(z)$

56.2. O conjunto de pontos é definido por quatro retas:

$\mathrm{Re}(z)=-3$

$\mathrm{Re}(z)=3$

$\mathrm{Im}(z)=0$

$\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Re}(z)$

Condição que define o conjunto:

$\left[\mathrm{Re}(z)\geq -3\wedge\mathrm{Im}(z)\leq 0\wedge\mathrm{Im}(z)>\mathrm{Re}(z)\right]\vee$

$\vee\left[\mathrm{Re}(z)<3\wedge\mathrm{Im}(z)\geq 0\wedge\mathrm{Im}(z)<\mathrm{Re}(z)\right]$

Pág. 184

Questão 57

57.1. O conjunto de pontos é a interseção de regiões com fronteira incluída:

- Círculo de centro $(-2,0)$ e raio 2;
- Exterior da circunferência de centro $(-1,0)$ e raio 1;
- Semiplano inferior definido pelo eixo real.

Condição:

$$|z-(-2)|\leq 2 \wedge |z-(-1)|\geq 1 \wedge \operatorname{Im}(z)\leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |z+2|\leq 2 \wedge |z+1|\geq 1 \wedge \operatorname{Im}(z)\leq 0$$

57.2. O conjunto de pontos é a união de duas regiões $(1 \text{e} 2)$ com fronteira incluída.

Região 1: É a interseção de regiões com fronteira incluída:

- Coroa circular definida pelas circunferências de centro $(0,0)$ e raios 2 e 3;
- Semiplano à direita do eixo imaginário:
- Semiplano à esquerda definido pela reta de condição $\operatorname{Re}(z)=2$

Região 2 : É a interseção de regiões com fronteira incluída:

- Coroa circular definida pelas circunferências de centro $(0,0)$ e raios 2 e 3;
- Semiplano à esquerda do eixo imaginário;
- Semiplano inferior ao eixo real

Condição:

$$\left[2\leq |z-(0+0\text{i})|\leq 3 \wedge \operatorname{Re}(z)\geq 0 \wedge \operatorname{Re}(z)\leq 2\right] \vee$$
$$\vee \left[2\leq |z-(0+0\text{i})|\leq 3 \wedge \operatorname{Re}(z)\leq 0 \wedge \operatorname{Im}(z)\leq 0\right] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\leq |z|\leq 3 \wedge$$
$$\wedge \left[0\leq \operatorname{Re}(z)\leq 2 \vee \left(\operatorname{Re}(z)\leq 0 \wedge \operatorname{Im}(z)\leq 0\right)\right]$$

57.3. O conjunto de pontos é a união de duas regiões $(1 \text{e} 2)$ com fronteira incluída.

Região 1– é a interseção de regiões com fronteira incluída:

- Coroa circular definida pelas circunferências de centro $(0,0)$ e raios 2 e 3;
- Semiplano à esquerda do eixo real;
- Semiplano superior ao eixo imaginário.

Região 2 – é a interseção de regiões com fronteira incluída:

- Coroa circular definida pelas circunferências de centro $(0,0)$ e raios 2 e 3;
- Semiplano à direita do eixo imaginário;
- Semiplano inferior ao eixo real.

Condição:

$$\left[2\leq |z-(0+0\text{i})|\leq 3 \wedge \operatorname{Re}(z)\leq 0 \wedge \operatorname{Im}(z)\geq 0\right] \vee$$
$$\vee \left[2\leq |z-(0+0\text{i})|\leq 3 \wedge \operatorname{Re}(z)\geq 0 \wedge \operatorname{Im}(z)\leq 0\right] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\leq |z|\leq 3 \wedge$$
$$\wedge \left[\left(\operatorname{Re}(z)\leq 0 \wedge \operatorname{Im}(z)\geq 0\right) \vee \left(\operatorname{Re}(z)\geq 0 \wedge \operatorname{Im}(z)\leq 0\right)\right]$$

Pág. 185

Questão 58

Seja $z=x+y\text{i}$

$$z+\bar{z}\leq 9 \Leftrightarrow x+y\text{i}+x-y\text{i}\leq 9 \Leftrightarrow 2x\leq 9 \Leftrightarrow x\leq \frac{9}{2}$$

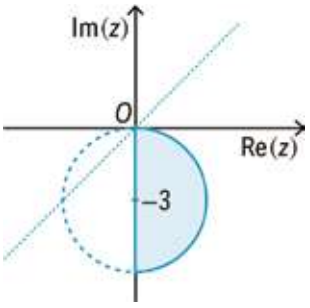
Representa o conjunto dos números complexos cuja parte real é inferior ou igual a $\frac{9}{2}$:

$$\left\{z\in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(z)\leq \frac{9}{2}\right\}$$

Questão 59

$$w=3\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}}=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\text{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$
$$=3(0-\text{i})=-3\text{i}$$
$$|z-w|\leq 3 \wedge \operatorname{Re}(z)\geq 0 \wedge \operatorname{Im}(z)\leq \operatorname{Re}(z) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |z-(-3\text{i})|\leq 3 \wedge \operatorname{Re}(z)\geq 0 \wedge \operatorname{Im}(z)\leq \operatorname{Re}(z)$$

- $|z-(-3\text{i})|\leq 3$ representa o círculo de centro $(0,-3)$ e raio 3;
- $\operatorname{Re}(z)\geq 0$ representa o semiplano à direita do eixo imaginário incluindo a fronteira;
- $\operatorname{Im}(z)\leq \operatorname{Re}(z)$ representa o semiplano inferior definido pela bissetriz dos quadrantes ímpares.



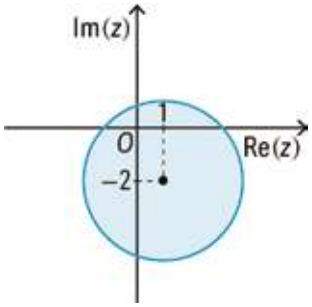
$$P=\frac{2\pi r}{2}+2r=\pi\times 3+2\times 3=(3\pi+6)\text{ u.c.}$$

Questão 60

60.1. $|z-1+2\text{i}|\leq 3 \Leftrightarrow |z-(1-2\text{i})|\leq 3$

Representa o círculo de centro $(1,-2)$ e raio 3.

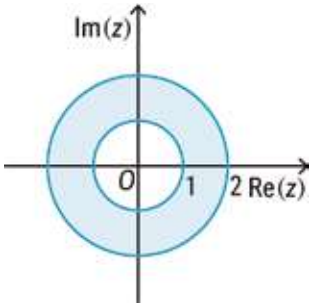
MMA12DR © Porto Editora



60.2. $|z| \geq 1 \wedge |z| \leq 2$

- $|z| \geq 1$ Representa o exterior da circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1, incluindo a fronteira;
- $|z| \leq 2$ Representa o círculo de centro $(0,0)$ e raio 2, incluindo a fronteira.

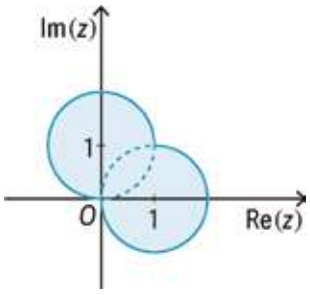
A região colorida é a interseção dos dois domínios definidos.



60.3. $|z-\mathrm{i}| \leq 1 \vee |z-1| \leq 1$

- $|z-\mathrm{i}| \leq 1 \Leftrightarrow |z-(0+\mathrm{i})| \leq 1$ representa o círculo de centro $(0,1)$ e raio 1, incluindo a fronteira;
- $|z-1| \leq 1 \Leftrightarrow |z-(1+0\mathrm{i})| \leq 1$ representa o círculo de centro $(1,0)$ e raio 1, incluindo a fronteira.

A região colorida é a união dos dois domínios definidos.



Questão 61

$z_0 = \rho e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $\rho > 0$

$|z_0| = \rho$

$|z| = |z_0| \Leftrightarrow |z| = \rho$

representa a circunferência de centro $(0,0)$ e raio ρ.

$P = 8\pi \Leftrightarrow 2\pi\rho = 8\pi \Leftrightarrow \rho = \frac{8\pi}{2\pi} \Leftrightarrow \rho = 4$

$z_0 = \rho e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 4e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) =$

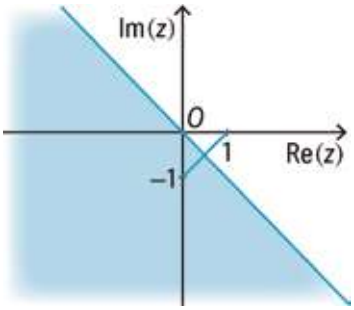
$= 2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}$

MMA12DR © Porto Editora

Pág. 186

Questão 62

$|z+\mathrm{i}| \leq |z-1| \Leftrightarrow |z-(-\mathrm{i})| \leq |z-1|$ Representa o semiplano definido pela mediatriz do segmento de reta de extremos $(0,-1)$ e $(1,0)$ e que contém o ponto $(0,-1)$.



Questão 63

A região é a interseção de três domínios planos (fronteira incluída):

- Semiplano definido pela mediatriz do segmento de reta de extremos $(2,0)$ e $(0,2)$ e que contém o ponto $(2,0)$;
- Semiplano superior ao eixo real;
- Semiplano à esquerda da reta vertical definida pela condição $\mathrm{Re}(z) = 2$.

Condição:

$|z-2| \leq |z-2\mathrm{i}| \wedge \mathrm{Im}(z) \geq 0 \wedge \mathrm{Re}(z) \leq 2$

Questão 64

A região é a interseção de três domínios planos (fronteira incluída):

- Círculo de centro $A(-2,2)$ e raio 2;
- Círculo de centro $(0,0)$ e raio $r = \overline{OA}$;
- Semiplano definido pela mediatriz do segmento de reta de extremos $(-2,0)$ e $(0,3)$ e que contém o ponto $(0,3)$.

$r = \overline{OA} = |z_A - z_O| = |-2+2\mathrm{i}-(0+0\mathrm{i})| = |-2+2\mathrm{i}| =$

$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Condição:

$|z-(-2+2\mathrm{i})| \leq 2 \wedge |z-(0+0\mathrm{i})| \leq 2\sqrt{2} \wedge$

$\wedge |z-3i| \leq |z-(-2)| \Leftrightarrow$

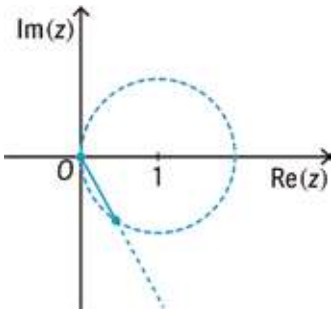
$\Leftrightarrow |z+2-2i| \leq 2 \wedge |z| \leq 2\sqrt{2} \wedge |z-3i| \leq |z+2|$

Pág. 187

Questão 65

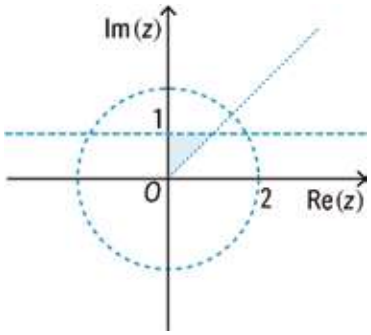
65.1. $|z-1| \leq 1 \wedge \text{Arg}(z) = \frac{5}{3}\pi$

- $|z-1| \leq 1$ representa o círculo de centro no ponto $(1,0)$ e raio 1;
- $\text{Arg}(z) = \frac{5}{3}\pi$ representa a semirreta de origem em O e que forma com a parte positiva do eixo real um ângulo de amplitude $\frac{5}{3}\pi$.



65.2. $|z| \leq 2 \wedge \text{Im}(z) < 1 \wedge \frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}$

- $|z| \leq 2$ representa o círculo de centro em $(0,0)$ e raio 2.
- $\text{Im}(z) < 1$ representa o semiplano inferior à reta horizontal definida por $\text{Im}(z) = 1$;
- $\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}$ representa o ângulo de vértice no ponto $(0,0)$ definido pelas semirretas que formam com a parte positiva do eixo real ângulos de amplitude $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$.

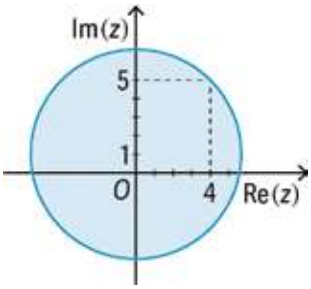


65.3. $\left|\frac{z-i}{2+2i}\right| \leq 2 \Leftrightarrow |z-i| \leq 2|2+2i| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z-i| \leq 2\sqrt{2^2+2^2} \Leftrightarrow |z-i| \leq 2\sqrt{2\times 2^2} \Leftrightarrow$

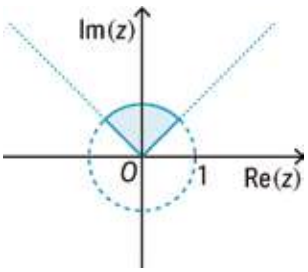
$\Leftrightarrow |z-i| \leq 2 \times 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |z-i| \leq 4\sqrt{2}$

Representa o círculo de centro $(0,1)$, afixo do número complexo i e raio $4\sqrt{2}$.



65.4. $z\bar{z} \leq \left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right| \wedge \frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{3\pi}{4}$

- $z\bar{z} \leq \left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right| \Leftrightarrow |z| \leq 1$ representa o círculo de centro $(0,0)$ e raio 1;
- $\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{3\pi}{4}$ representa o ângulo de vértice em $(0,0)$ definido pelas semirretas que formam com a parte positiva do eixo real ângulos de $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$.



66. A região é definida pela interseção de dois domínios planos:

- Exterior da circunferência de centro em $(1,2)$ e raio 4;
- Ângulo de vértice em $(1,2)$ definido pelas semirretas que formam com a parte positiva do eixo real, ângulos de 0 e $\frac{\pi}{6}$ radianos.

Condição:

$|z-(1+2i)| \geq 4 \wedge 0 < \text{Arg}(z-(1+2i)) \leq \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z-1-2i| \geq 4 \wedge 0 < \text{Arg}(z-1-2i) \leq \frac{\pi}{6}$

MMA12DR © Porto Editora

Pág. 188

Tarefas de consolidação 3

1. $z_1 = -2+3\text{i}$; $z_2 = -1-\text{i}$; $w = 3+2\text{i}$

Circunferência de centro no afixo de w e raio 5 :

$|z-(3+2\text{i})| = 5 \Leftrightarrow |z-3-2\text{i}| = 5$

$|z_1-3-2\text{i}| = |-2+3\text{i}-3-2\text{i}| = |-5+\text{i}| = \sqrt{(-5)^2+1^2} =$

$= \sqrt{26} \neq 5$

Logo, z_1 não pertence à circunferência.

$|z_2-3-2\text{i}| = |-1-\text{i}-3-2\text{i}| = |-4-3\text{i}| = \sqrt{(-4)^2+(-3)^2} =$

$= \sqrt{25} = 5$

z_2 pertence à circunferência de centro no afixo de w e raio 5 .

2. A região sombreada é a interseção de dois domínios planos:

• Exterior da circunferência de centro em $(2,2)$ e raio 2 , incluindo a fronteira.

• Ângulo de vértice $(0,0)$ definido pelas semirretas que formam com a parte positiva do eixo real ângulos de amplitudes 0 e $\frac{\pi}{4}$ radianos.

Condição:

$|z-(2+2\text{i})| \geq 2 \wedge 0 \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z-2-2\text{i}| \geq 2 \wedge 0 \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{4}$

Opção (C)

3. $z_1 = 1-\text{i}$; $z_2 = 3+\text{i}$

$w = \frac{z_1^2 - \text{i}^3 z_2}{\text{i}^{81}} = \frac{(1-\text{i})^2 - (-\text{i})(3+\text{i})}{\text{i}^1} =$

C.A. $\left|\begin{array}{r|l} 81 & 4 \\ 1 & 20 \end{array}\right.$

$= \frac{1-2\text{i}+\text{i}^2+3\text{i}+\text{i}^2}{\text{i}} = \frac{1-1-1+\text{i}}{\text{i}} = \frac{-1+\text{i}}{\text{i}} = \frac{(-1+\text{i})(-\text{i})}{-\text{i}^2} =$

$= \frac{\text{i}-\text{i}^2}{1} = 1+\text{i}$

Circunferência de centro no afixo de z_1 e raio 2 :

$|z-(1-\text{i})| = 2 \Leftrightarrow |z-1+\text{i}| = 2$

$|w-1+\text{i}| = |1+\text{i}-1+\text{i}| = |2\text{i}| = 2$

Então, w pertence à circunferência de centro no afixo de z_1 e raio 2 .

4. $z_1 = 1-\text{i}$; $z_2 = 3-2\text{i}$

$w = \frac{\overline{z_1} - \text{i}^7 z_2}{z_1+z_2} = \frac{\overline{1-\text{i}} - \text{i}^3 \times (3+2\text{i})}{1-\text{i}+3+2\text{i}} = \frac{1+\text{i}+\text{i}\times(3+2\text{i})}{4+\text{i}} =$

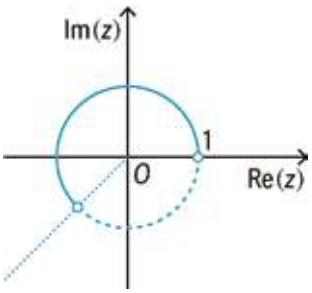
$= \frac{1+\text{i}+3\text{i}-2}{4+\text{i}} = \frac{(-1+4\text{i})(4-\text{i})}{(4+\text{i})(4-\text{i})} = \frac{-4+\text{i}+16\text{i}+4}{16+1} =$

$= \frac{17\text{i}}{17} = \text{i}$

$|w| = |\text{i}| = 1$

$|z| = |w| \Leftrightarrow |z| = 1$ define a circunferência de centro em $(0,0)$ e raio 1.

$0 < \arg(z) < \frac{5\pi}{4}$ representa o ângulo do vértice em $(0,0)$ definido pelas semirretas que formam com a parte positiva do eixo real ângulos de amplitudes 0 e $\frac{5\pi}{4}$ radianos.



Comprimento do arco de circunferência:

$c = \frac{5\pi}{4} \times 1 = \frac{5\pi}{4}$ u.c.

Pág. 189

5. Seja $z = x+y\text{i}$

$|z+9| = 3|x+y\text{i}+1| \Leftrightarrow |x+y\text{i}+9| = 3|x+y\text{i}+1| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+9)^2+y^2} = 3\sqrt{(x+1)^2+y^2} \Leftrightarrow$

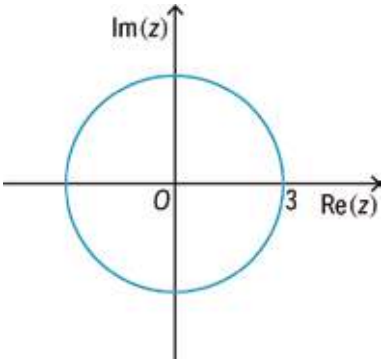
$\Leftrightarrow (x+9)^2+y^2 = 9\left((x+1)^2+y^2\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + \cancel{18x} + 81 + y^2 = 9x^2 + \cancel{18x} + 9 + 9y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8x^2 - 8y^2 = -72 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z|^2 = 9 \underset{(|z|>0)}{\Leftrightarrow} |z| = 3$

$|z| = 3$ representa a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 3 .



MMA12DR © Porto Editora

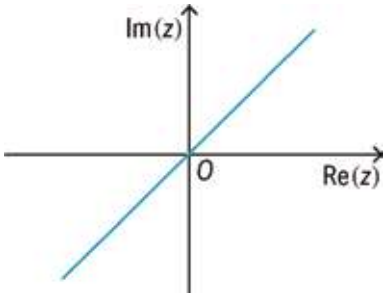
6.1. Seja $z = x + yi$

$\overline{z} + iz = 0 \Leftrightarrow x - yi + i(x + yi) = 0 \Leftrightarrow$

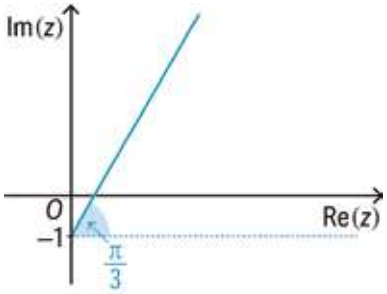
$\Leftrightarrow x - yi + xi + yi^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y) + (x - y)i = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - y = 0 \wedge x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$

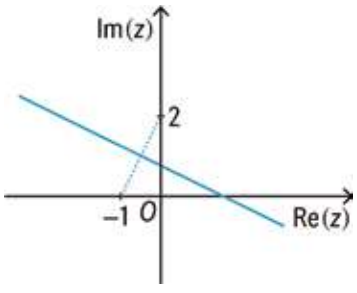
$\overline{z} + iz = 0$ representa a bissetriz dos quadrantes ímpares.



6.2. $\text{Arg}(z + i) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \text{Arg}(z - (-i)) = \frac{\pi}{3}$ representa a semirreta de origem no afixo de $-i$ e que forma com a parte positiva do eixo real um ângulo de amplitude $\frac{\pi}{3}$ radianos.



7. $|z + 1| - |z - 2i| = 0 \Leftrightarrow |z - (-1)| = |z - 2i|$ representa a mediatriz do segmento de reta de extremos nos pontos $(-1,0)$ e $(0,2)$.



8.1. Sejam A, B e C os afixos de z_A, z_B e z_C, respetivamente.

$z_A = -2$; $z_B = 2i$; $z_C = -1 + i$

$\overline{OC} = |z_C| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\overline{OA} = |z_A| = |-2| = 2$

$\overline{AC} = |z_A - z_C| = |-2 - (-1 + i)| = |-1 - i| =$

$= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$P_{[OAC]} = \overline{OA} + \overline{OC} + \overline{AC} =$

$= 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = (2 + 2\sqrt{2})$ u.c.

8.2. O triângulo é definido por dois domínios planos:

- ângulo de vértice em $(-2,0)$ e definido pelas semirretas que formam com a parte positiva do eixo real ângulos de amplitudes 0 e $\frac{\pi}{4}$ radianos, incluindo a fronteira.
- semiplano inferior à bissetriz dos quadrantes pares, incluindo a fronteira.

Condição:

$0 \leq \text{Arg}(z + 2) \leq \frac{\pi}{4} \wedge \text{Im}(z) \leq -\text{Re}(z)$, por exemplo.

9. $\frac{3\pi}{4} \leq \text{Arg}(z + 2 - i) \leq \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} \leq \text{Arg}(z - (-2 + i)) \leq \frac{5\pi}{4}$

representa o ângulo de vértice em $(-2,1)$ e definido pelas semirretas que formam com a parte positiva do eixo real ângulos de $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$ radianos.

Então, as opções (C) e (D) não podem representar a condição dada porque o vértice do ângulo não é $(-2,1)$.

$1 \leq |z + 2 - i| \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq |z - (-2 + i)| \leq 2$ representa uma coroa circular definida pelas circunferências de centro $(-2,1)$ e raios 1 e 2.

Opção (A)

Pág. 191

Avaliação formativa 3

1. I – O conjunto assinalado encontra-se limitado pela parte positiva do eixo imaginário e pela parte negativa do eixo real, ou seja, $\frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}(z) \leq \pi$.

I → b)

II – O conjunto assinalado encontra-se no círculo de centro $(-1,1)$ e raio 1.

Então, $|z - (-1 + i)| \leq 1 \Leftrightarrow |z + 1 - i| \leq 1$

II → c)

MMA12DR © Porto Editora

III – Seja z_A o número complexo cujo afixo é o ponto A.

$|z_A+1-i|=1 \wedge \text{Im}(z_A)=-\text{Re}(z_A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x_A+iy_A+1-i|=1 \wedge y_A=-x_A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x_A-x_Ai+1-i|=1 \wedge y_A=-x_A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |(x_A+1)+(-x_A-1)i|=1 \wedge y_A=-x_A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x_A+1)^2+(-x_A-1)^2}=1 \wedge y_A=-x_A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_A+1)^2+(x_A+1)^2=1 \wedge y_A=-x_A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x_A+1)^2=1 \wedge y_A=-x_A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_A+1)^2=\frac{1}{2} \wedge y_A=-x_A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_A+1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge y_A=-x_A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_A=-1\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge y_A=-x_A$

O conjunto assinalado encontra-se no semiplano à esquerda da reta definida por $\text{Re}(z)=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou no semiplano definido pela mediatriz de $[OC]$ que contém o ponto O.

Assim,

$\text{Re}(z)\le -1-\frac{\sqrt{2}}{2} \vee |z-(0+0i)|\le|z-(-1+i)| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{Re}(z)\le -1-\frac{\sqrt{2}}{2} \vee |z|\le|z+1-i|$

III $\rightarrow$ b)

2. $B(-2,0)$; $A(-2,2)$;

$C(-1,2)$; $C'(-1,-2)$

Reta BC: $m=\frac{0-2}{-2-(-1)}=\frac{-2}{-1}=2$

$y=2x+b_1$ e $B\in BC$

$0=2(-2)+b_1 \Leftrightarrow b_1=4$

BC: $y=2x+4$

$\text{Im}(z)=2\text{Re}(z)+4$

Reta BC':

$m=\frac{0-(-2)}{-2-(-1)}=\frac{2}{-1}=-2$

$y=-2x+b_2$ e $B\in BC'$

$0=-2(-2)+b_2 \Leftrightarrow b_2=-4$

BC': $y=-2x-4$

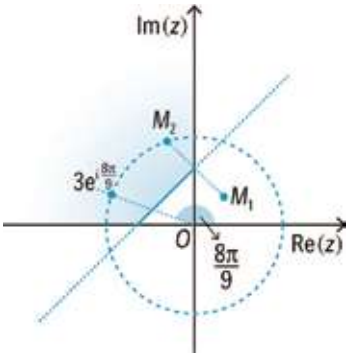
$\text{Im}(z)=-2\text{Re}(z)-4$

Condição: (por exemplo)

$\text{Re}(z)\ge -2 \wedge$

$\wedge(2\text{Re}(z)+4\le\text{Im}(z)\le 2 \vee -2\le\text{Im}(z)\le -2\text{Re}(z)-4)$

3. $z_1=1+i$; $z_2=-1+3i$



As opções (B), (C) e (D) não podem ser corretas porque $\frac{7\pi}{6}>\pi$ e $\frac{5\pi}{4}>\pi$ e sabe-se que $\frac{\pi}{2}\le \text{Arg}(z)\le\pi$.

$\frac{\pi}{2}\le\frac{8\pi}{9}\le\pi$

Opção (A)

Tarefas complementares

Pág. 192

1.1. $z_1=-\sqrt{3}-i$

1.2. $\overline{z_1}=-\sqrt{3}+i$

1.3. $-z_1=-(-\sqrt{3}-i)=\sqrt{3}+i$

2.1. $(2-i)-2\times\left(\frac{1}{2}-2i\right)=2-i-1+4i=1+3i$

2.2. $(3-i)\times(2-3i)+10i=$

$=6-9i-2i+3i^2+10i=6-i-3=3-i$

2.3. $\frac{1}{5}(2-i)^2\times(1-2i)=\frac{1}{5}(4-4i+i^2)(1-2i)=$

$=\frac{1}{5}(4-4i-1)(1-2i)=\frac{1}{5}(3-4i)(1-2i)=$

$=\frac{1}{5}(3-6i-4i+8i^2)=\frac{1}{5}(3-10i-8)=$

$=\frac{1}{5}(-5-10i)=-1-2i$

2.4. $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=$

$=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

3.1. $z_1=3i^2+\frac{1}{2}(2+4i)=-3+1+2i=-2+2i$

$z_1=-2+2i$; $-z_1=2-2i$

$\overline{z_1}=-2-2i$

MMA12DR © Porto Editora

3.2. $z_2 = i^2 - 2i^3 = -1 + 2i$

$z_2 = -1 + 2i \ ; \ -z_2 = 1 - 2i$

$\overline{z_2} = -1 - 2i$

4.1. $u_1 = -2i$

$u_2 = u_1 + (1 - i) = -2i + 1 - i = 1 - 3i$

$u_3 = u_2 + (1 - i) = 1 - 3i + 1 - i = 2 - 4i$

$u_4 = u_3 + (1 - i) = 2 - 4i + 1 - i = 3 - 5i$

4.2. (u_n) é uma progressão aritmética de razão $1 - i$ e cujo primeiro termo $i - 2i$.

Termo geral de uma progressão aritmética:

$u_n = u_1 + (n - 1) \times r$

Então,

$u_n = -2i + (n - 1)(1 - i) = -2i + n - ni - 1 + i =$

$= n - 1 + (-n - 1)i$

4.3. Soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética: $S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

$u_{10} = 10 - 1 + (-10 - 1)i = 9 - 11i$

$S_{10} = \frac{-2i + 9 - 11i}{2} \times 10 = (9 - 13i) \times 5 = 45 - 65i$

5.1. $\frac{10 - 15i}{1 + 2i} \times (7i - 4) =$

$= \frac{70i - 40 - 105i^2 + 60i}{1 + 2i} = \frac{-40 + 105 + 130i}{1 + 2i} =$

$= \frac{65 + 130i}{1 + 2i} = \frac{65(\cancel{1 + 2i})}{\cancel{1 + 2i}} = 65$

5.2. $\frac{(2 - i)^3 - i^3}{1 - i} = \frac{(2 - i)(2 - i)^2 + i}{1 - i} =$

$= \frac{(2 - 1)(4 - 4i + i^2) + i}{1 - i} = \frac{(2 - i)(4 - 4i - 1) + i}{1 - i} =$

$= \frac{(2 - i)(3 - 4i) + i}{1 - i} = \frac{6 - 8i - 3i + 4i^2 + i}{1 - i} = \frac{6 - 4 - 10i}{1 - i} =$

$\frac{(2 - 10i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2 + 2i - 10i - 10i^2}{1^2 - i^2} = \frac{2 + 10 - 8i}{1 + 1} =$

$= \frac{12 - 8i}{2} = 6 - 4i$

5.3.

$\frac{(1 - 2i^3)(3 - i) + i^{13} + i^{14}}{2i} =$

C.A.

13 |	4
1	3
14 |	4
2	3

$= \frac{(1 + 2i)(3 - i) + i^1 + i^2}{2i} = \frac{3 - i + 6i - 2i^2 + i - 1}{2i} =$

$= \frac{2 + 6i + 2}{2i} = \frac{(4 + 6i)(-2i)}{2i(-2i)} = \frac{-8i - 12i^2}{-4i^2} == 3 - 2i$

Pág. 193

6. $(a - 4i) \times (2 - 3i) = 10 + bi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a - 3ai - 8i + 12i^2 = 10 + bi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2a - 12) + (-3a - 8)i = 10 + bi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 12 = 10 \\ -3a - 8 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 22 \\ b = -3a - 8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 11 \\ b = -3 \times 11 - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 11 \\ b = -41 \end{cases}$

7. $z = (1 - ai)^2 + (a + 1)i^5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 1 - 2ai + (ai)^2 + (a + 1)i^1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 1 - 2ai - a^2 + ai + i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = (1 - a^2) + (-a + 1)i$

7.1. z é um número real $\Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$

7.2. z é um número imaginário puro

$\Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0 \wedge \text{Im}(z) \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - a^2 = 0 \wedge -a + 1 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 = 1 \wedge a \neq 1 \Leftrightarrow a = \pm 1 \wedge a \neq 1 \Leftrightarrow a = -1$

7.3. $z = -3 - i \Leftrightarrow (1 - a^2) + (-a + 1)i = -3 - i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a^2 = -3 \\ -a + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 = -4 \\ -a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 2 \\ a = 2 \end{cases}$

8. $z = 2 + 3i \ ; \ w = 1 + i$

$zw = (2 + 3i)(1 + i) = 2 + 2i + 3i + 3i^2 = 2 - 3 + 5i =$

$= -1 + 5i$

$\frac{1}{w} = \frac{1}{1 + i} = \frac{1 - i}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - i}{1^2 - i^2} = \frac{1 - i}{1 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

$\frac{\overline{w}}{z} = \frac{1 - i}{2 + 3i} = \frac{(1 - i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{2 - 3i - 2i + 3i^2}{2^2 - (3i)^2} =$

$= \frac{2 - 3 - 5i}{4 + 9} = -\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$

9. $z_1 = 1 - i \ ; \ z_2 = 3 - 4i \ ; \ z_3 = 2i$

9.1. $\frac{z_2 \times z_3}{z_1} = \frac{(3 - 4i) \times 2i}{1 - i} = \frac{6i - 8i^2}{1 - i} = \frac{(8 + 6i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} =$

$= \frac{8 + 8i + 6i + 6i^2}{1^2 - i^2} = \frac{8 - 6 + 14i}{1 + 1} = \frac{2 + 14i}{2} = 1 + 7i$

MMA12DR © Porto Editora

9.2. $\dfrac{5\times z_1}{z_2}=\dfrac{5\times(1+\mathrm{i})}{3-4\mathrm{i}}=\dfrac{(5+5\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}=$

$=\dfrac{15+20\mathrm{i}+15\mathrm{i}+20\mathrm{i}^2}{3^2-(4\mathrm{i})^2}=\dfrac{15-20+35\mathrm{i}}{9+16}=-\dfrac{5}{25}+\dfrac{35}{25}\mathrm{i}=$

$=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{7}{5}\mathrm{i}$

9.3. $\dfrac{\mathrm{i}z_3}{|z_2|+z_2}=\dfrac{\mathrm{i}\times 2\mathrm{i}}{5+3-4\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}^2}{8-4\mathrm{i}}=$

C.A. $\left|\ |z_2|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=5\right.$

$=\dfrac{-2(8+4\mathrm{i})}{(8-4\mathrm{i})(8+4\mathrm{i})}=\dfrac{-16-8\mathrm{i}}{8^2-(4\mathrm{i})^2}=\dfrac{-16-8\mathrm{i}}{64+16}=$

$=-\dfrac{16}{80}-\dfrac{8}{80}\mathrm{i}=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{10}\mathrm{i}$

9.4. $\dfrac{(z_3-\mathrm{i})^{11}+|z_3|}{2+z_1}=\dfrac{(2\mathrm{i}-\mathrm{i})^{11}+|2\mathrm{i}|}{2+1-\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}^{11}+2}{3-\mathrm{i}}=\dfrac{2+\mathrm{i}^3}{3-\mathrm{i}}=$

C.A. $\left|\begin{array}{r|l} 11 & 4 \\ \hline 3 & 2 \end{array}\right.$

$=\dfrac{(2-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}=\dfrac{6+2\mathrm{i}-3\mathrm{i}-\mathrm{i}^2}{3^2-\mathrm{i}^2}=\dfrac{6+1-\mathrm{i}}{9+1}=\dfrac{7}{10}-\dfrac{1}{10}\mathrm{i}$

10.1. $2z+1=\mathrm{i}\Leftrightarrow 2z=-1+\mathrm{i}\Leftrightarrow z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

$S=\left\{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$

10.2. $z+\mathrm{i}=2-\mathrm{i}z\Leftrightarrow z+\mathrm{i}z=2-\mathrm{i}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(1+\mathrm{i})z=2-\mathrm{i}\Leftrightarrow z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\Leftrightarrow z=\dfrac{(2-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{2-2\mathrm{i}-\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{1^2-\mathrm{i}^2}\Leftrightarrow z=\dfrac{2-1-3\mathrm{i}}{1+1}\Leftrightarrow z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$

$S=\left\{\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right\}$

10.3. $2\bar{z}+z+6=5\mathrm{i}$

Seja $z=a+b\mathrm{i}$

$\bar{z}=a-b\mathrm{i}$

$2\bar{z}+z+6=5\mathrm{i}\Leftrightarrow 2(a-b\mathrm{i})+(a+b\mathrm{i})+6=5\mathrm{i}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a-2b\mathrm{i}+a+b\mathrm{i}+6=5\mathrm{i}\Leftrightarrow(3a+6)-b\mathrm{i}=0+5\mathrm{i}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3a+6=0\\-b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a=-6\\b=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=-5\end{cases}$

$S=\{-2-5\mathrm{i}\}$

10.4. $2z^2-10z+17=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\times 2\times 17}}{2\times 2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{10\pm\sqrt{-36}}{4}\Leftrightarrow z=\dfrac{10\pm 6\mathrm{i}}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\vee z=\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$

$S=\left\{\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i},\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right\}$

10.5. $z^3-2z^2+10z=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\left(z^2-2z+10\right)=0\Leftrightarrow z=0\vee z^2-2z+10=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0\vee z=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\times 1\times 10}}{2\times 1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0\vee z=\dfrac{2\pm\sqrt{-36}}{2}\Leftrightarrow z=0\vee z=\dfrac{2\pm 6\mathrm{i}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0\vee z=1-3\mathrm{i}\vee z=1+3\mathrm{i}$

$S=\{0,1-3\mathrm{i},1+3\mathrm{i}\}$

10.6. Fazendo $w=z^2$ e substituindo em $z^4-2z^2-8=0$, vem:

$w^2-2w-8=0\Leftrightarrow w=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\times 1\times(-8)}}{2\times 1}\Leftrightarrow$

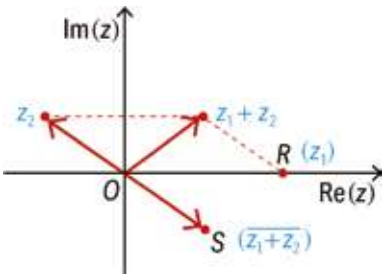
$\Leftrightarrow w=\dfrac{2\pm\sqrt{36}}{2}\Leftrightarrow w=\dfrac{2\pm 6}{2}\Leftrightarrow w=-2\vee w=4\Leftrightarrow$

$\underset{(w=z^2)}{\Leftrightarrow} z^2=-2\vee z^2=4\Leftrightarrow z=\pm\sqrt{-2}\vee z=\pm 2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\pm\sqrt{2}\mathrm{i}\vee z=\pm 2$

$S=\{-\sqrt{2}\mathrm{i},\sqrt{2}\mathrm{i},-2,2\}$

11.



Se S é o afixo de $\overline{z_1+z_2}$, então o afixo de z_1+z_2 pertence ao 1.º quadrante.

Para que z_1+z_2 esteja no 1.º quadrante, o afixo de z_2 tem que pertencer ao 2.º quadrante.

Opção (B)

MMA12DR © Porto Editora

Pág. 194

12.1. $z^4-2z^3+6z^2-2z+5=0$

$(1-2i)^4-2(1-2i)^3+6(1-2i)^2-2(1-2i)+5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[(1-2i)^2\right]^2-2(1-2i)(1-2i)^2+$

$+6(1-4i+4i^2)-2+4i+5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-3-4i)^2-(2-4i)(-3-4i)+$

$+6(-3-4i)+3+4i=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9+24i+16i^2-(-6-8i+12i+16i^2)-$

$-18-24i+3+4i=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -22+4i-(-22+4i)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -22+4i+22-4i=0 \Leftrightarrow 0=0$

Logo, $1-2i$ é uma solução da equação.

12.2. Se $1-2i$ é solução de uma equação de coeficientes reais, então $\overline{1-2i}=1+2i$ também é solução.

	1	−2	6	−2	5
$1-2i$		$1-2i$	-5	$1-2i$	-5
	1	$-1-2i$	1	$-1-2i$	0
$1+2i$		$1+2i$	0	$1+2i$	
	1	0	1	0	

C.A. $(1-2i)(-1-2i)=-1-2i+2i+4i^2=-5$

$z^4-2z^3+6z^2-2z+5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z-(1-2i))(z-(1+2i))(z^2+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z-(1-2i)=0 \vee z-(1+2i)=0 \vee z^2+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=1-2i \vee z=1+2i \vee z^2=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=1-2i \vee z=1+2i \vee z=\pm\sqrt{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=1-2i \vee z=1+2i \vee z=\pm i$

$S=\{1-2i, 1+2i, -i, i\}$

As restantes soluções são: $1+2i$, $-i$ e i.

13.1. $\bar{z}z+iz=0 \Leftrightarrow z(\bar{z}+i)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \vee \bar{z}+i=0 \Leftrightarrow z=0 \vee \bar{z}=-i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z=i$; $S=\{0, i\}$

13.2. $z\bar{z}-z^2=8-12i$

Seja $z=a+bi$:

$z\bar{z}-z^2=8-12i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a+bi)(a-bi)-(a+bi)^2=8-12i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2-(bi)^2-\left(a^2+2abi+(bi)^2\right)=8-12i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-a^2-2abi+b^2=8-12i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2b^2-2abi=8-12i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2=8 \\ -2ab=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2=4 \\ ab=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\pm 2 \\ ab=6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ a=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} b=2 \\ a=3 \end{cases}$

$z=-3-2i \vee z=3+2i$

$S=\{-3-2i, 3+2i\}$

13.3. $z-i=\dfrac{z}{3-2i} \Leftrightarrow z-\dfrac{z}{3-2i}=i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\left(1-\dfrac{1}{3-2i}\right)=i \Leftrightarrow z\left(\dfrac{3-2i-1}{3-2i}\right)=i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{i(3-2i)}{2-2i} \Leftrightarrow z=\dfrac{3i-2i^2}{2-2i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{(2+3i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} \Leftrightarrow z=\dfrac{4+4i+6i+6i^2}{2^2-(2i)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{4-6+10i}{4+4} \Leftrightarrow z=-\dfrac{2}{8}+\dfrac{10}{8}i \Leftrightarrow z=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{4}i$

$S=\left\{-\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{4}i\right\}$

13.4. $\dfrac{1}{z+1}-\dfrac{1+2i}{z}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{z-(1+2i)(z+1)}{z(z+1)}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z-(z+1+2iz+2i)=0 \wedge z(z+1)\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z-z-1-2iz-2i=0 \wedge z\neq 0 \wedge z+1\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2iz=1+2i \wedge z\neq 0 \wedge z\neq -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{1+2i}{-2i} \Leftrightarrow z=\dfrac{(1+2i)\times 2i}{-2i\times 2i} \Leftrightarrow z=\dfrac{2i+4i^2}{-4i^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{-4+2i}{4} \Leftrightarrow z=-1+\dfrac{1}{2}i$

$S=\left\{-1+\dfrac{1}{2}i\right\}$

14. $z_1=\dfrac{1-i}{2}$; $z_2=\left(k^2-3i^{20}\right)+\dfrac{k}{2i^{15}}, k\in\mathbb{R}$

$z_2=\left(k^2-3i^{4\times 5+0}\right)+\dfrac{k}{2i^{4\times 3+3}}=\left(k^2-3i^0\right)+\dfrac{k}{2i^3}=$

$=\left(k^2-3\right)+\dfrac{k}{-2i}=\left(k^2-3\right)+\dfrac{k(2i)}{-2i\times 2i}=$

$=\left(k^2-3\right)+\dfrac{2ki}{4}=\left(k^2-3\right)+\dfrac{1}{2}ki$

14.1. $\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{2}{1-i}=\dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2+2i}{1^2-i^2}=\dfrac{2+2i}{2}=1+i$

$z_2=\dfrac{1}{z_1} \Leftrightarrow \left(k^2-3\right)+\dfrac{1}{2}ki=1+i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k^2-3=1 \\ \dfrac{1}{2}k=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2=4 \\ k=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\pm 2 \\ k=2 \end{cases}$

14.2. $z_1\times z_2=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)\times\left(\left(k^2-3\right)+\dfrac{1}{2}ki\right)=$

$=\dfrac{1}{2}\left(k^2-3\right)+\dfrac{1}{4}ki-\dfrac{1}{2}\left(k^2-3\right)i-\dfrac{1}{4}ki^2=$

$=\left(\dfrac{1}{2}k^2-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{4}k\right)+\left(\dfrac{1}{4}k-\dfrac{1}{2}k^2+\dfrac{3}{2}\right)i$

$z_1\times z_2$ é um número real $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z_1\times z_2)=0 \Leftrightarrow$

MMA12DR © Porto Editora

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k-\frac{1}{2}k^2+\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow -2k^2+k+6=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(-2)\times 6}}{2\times(-2)} \Leftrightarrow k=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{-8}{-4}\vee k=\frac{6}{-4} \Leftrightarrow k=2\vee k=-\frac{3}{2}$$

Pág. 195

15.1. z é um número real $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2-4=0 \Leftrightarrow k^2=4 \Leftrightarrow k=\pm 2$

15.2. z é um imaginário puro $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z)=0 \wedge \operatorname{Im}(z)\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2-k-2=0 \wedge k^2-4\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 1\times(-2)}}{2\times 1} \wedge k^2\neq 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2} \wedge k\neq -2 \wedge k\neq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(k=-\frac{2}{2}\vee k=\frac{4}{2}\right) \wedge k\neq -2 \wedge k\neq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (k=-1\vee k=2) \wedge k\neq -2 \wedge k\neq 2$

15.3. $z=0 \Leftrightarrow \left(k^2-k-2\right)+\left(k^2-4\right)\mathrm{i}=0+0\mathrm{i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2-k-2=0 \wedge k^2-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (k=-1\vee k=2) \wedge (k=-2\vee k=2) \Leftrightarrow k=2$

16. w pertence à bissetriz dos quadrantes pares $(y=-x)$

$w=x-x\mathrm{i}, x<0$

$$\frac{w}{\overline{w}}=\frac{x-x\mathrm{i}}{x+x\mathrm{i}}=\frac{(x-x\mathrm{i})(x-x\mathrm{i})}{(x+x\mathrm{i})(x-x\mathrm{i})}=\frac{x^2-2x^2\mathrm{i}+(x\mathrm{i})^2}{x^2-(x\mathrm{i})^2}=$$

$$=\frac{x^2-x^2-2x^2\mathrm{i}}{x^2+x^2}=-\frac{2x^2\mathrm{i}}{2x^2}=-\mathrm{i}$$

Opção (D)

17.

$$z_1=\frac{(1+\mathrm{i})^2}{1-\mathrm{i}}\times 2\mathrm{i}^7-\mathrm{i}=\frac{1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{1-\mathrm{i}}\times 2\mathrm{i}^{4\times 1+3}-\mathrm{i}=$$

$$=\frac{1-1+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\times 2\mathrm{i}^3-\mathrm{i}=\frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\times(-2\mathrm{i})-\mathrm{i}=\frac{-4\mathrm{i}^2}{1-\mathrm{i}}-\mathrm{i}=$$

$$=\frac{4(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}-\mathrm{i}=\frac{4+4\mathrm{i}}{1^2-\mathrm{i}^2}-\mathrm{i}=\frac{4+4\mathrm{i}}{2}-\mathrm{i}=2+\mathrm{i}$$

$z_1\times z_2=-4+3\mathrm{i} \Leftrightarrow (2+\mathrm{i})\times z_2=-4+3\mathrm{i} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z_2=\frac{-4+3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} \Leftrightarrow z_2=\frac{(-4+3\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_2=\frac{-8+4\mathrm{i}+6\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2}{2^2-\mathrm{i}^2} \Leftrightarrow z_2=\frac{-8+3+10\mathrm{i}}{4+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_2=-\frac{5}{5}+\frac{10}{5}\mathrm{i} \Leftrightarrow z_2=-1+2\mathrm{i}$$

18. Seja $z=a+b\mathrm{i}$.

$$u=\frac{z-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{a+b\mathrm{i}-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(a+b\mathrm{i}-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=$$

$$=\frac{a-a\mathrm{i}+b\mathrm{i}-b\mathrm{i}^2-\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{1^2-\mathrm{i}^2}=\frac{a+b-1+(-a+b-1)\mathrm{i}}{1+1}=$$

$$=\frac{a+b-1}{2}+\frac{-a+b-1}{2}\mathrm{i}$$

$\operatorname{Re}(u)=\operatorname{Im}(u) \Leftrightarrow \frac{a+b-1}{2}=\frac{-a+b-1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a+b-1=-a+b-1 \Leftrightarrow a=-a \Leftrightarrow 2a=0 \Leftrightarrow a=0$

Então, $\operatorname{Re}(z)=0$.

19.1.

$$\overline{z+w}=\overline{a+b\mathrm{i}+c+d\mathrm{i}}=\overline{(a+c)+(b+d)\mathrm{i}}=$$

$$=(a+c)-(b+d)\mathrm{i}=a+c-b\mathrm{i}-d\mathrm{i}=$$

$$=(a-b\mathrm{i})+(c-d\mathrm{i})=\overline{z}+\overline{w}$$

Então, $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$.

19.2.

$$\overline{z\times w}=\overline{(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})}=\overline{ac+ad\mathrm{i}+bc\mathrm{i}+bd\mathrm{i}^2}=$$

$$=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}}=(ac-bd)-(ad+bc)\mathrm{i}=$$

$$=ac-bd-ad\mathrm{i}-bc\mathrm{i}=a(c-d\mathrm{i})-b(d+c\mathrm{i})=$$

$$=a(c-d\mathrm{i})-b\mathrm{i}\left(\frac{d}{\mathrm{i}}+c\right)=a(c-d\mathrm{i})-b\mathrm{i}(-d\mathrm{i}+c)=$$

$$=(c-d\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=\overline{w}\times\overline{z}=\overline{z}\times\overline{w}$$

Então, $\overline{z\times w}=\overline{z}\times\overline{w}$.

19.3.

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\overline{\left(\frac{1}{a+b\mathrm{i}}\right)}=\overline{\left(\frac{a-b\mathrm{i}}{(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})}\right)}=\frac{\overline{a-b\mathrm{i}}}{a^2+b^2}=$$

$$=\frac{\overline{a}}{a^2+b^2}-\frac{\overline{b}}{a^2+b^2}\mathrm{i}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}=$$

$$=\frac{a+b\mathrm{i}}{a^2+b^2}=\frac{\cancel{a+b\mathrm{i}}}{\cancel{(a+b\mathrm{i})}(a-b\mathrm{i})}=\frac{1}{a-b\mathrm{i}}=\frac{1}{\overline{z}}$$

Então, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$.

19.4.

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\overline{\left(z\times\frac{1}{w}\right)}=\overline{z}\times\overline{\left(\frac{1}{w}\right)}=\overline{z}\times\frac{1}{\overline{w}}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

Então, $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

19.5.

$$\frac{z+\overline{z}}{2}=\frac{a+b\mathrm{i}+a-b\mathrm{i}}{2}=\frac{2a}{2}=a=\operatorname{Re}(z)$$

Então, $\frac{z+\overline{z}}{2}=\operatorname{Re}(z)$.

19.6.

$$\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}=\frac{a+b\mathrm{i}-(a-b\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}=\frac{a+b\mathrm{i}-a+b\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}=\frac{2b\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}=$$

$$=b=\operatorname{Im}(z)$$

Então, $\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}=\operatorname{Im}(z)$.

MMA12DR © Porto Editora

Pág. 196

20.1. $z_1 = 3 + \sqrt{3}\text{i}$

$$|z_1| = \rho_1 = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} =$$

$$= \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

Seja θ_1 o argumento de z_1:

$$\begin{cases} \tan\theta_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \left(3, \sqrt{3}\right) \in 1.^{\text{o}}\text{Q.} \end{cases} \Rightarrow \arg(z_1) = \frac{\pi}{6}$$

$$z_1 = 2\sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$$

20.2. $z_2 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\text{i}$

$$|z_2| = \rho_2 = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4\times 2 + 4\times 2} = 4$$

Seja θ_2 o argumento de z_2:

$$\begin{cases} \tan\theta_2 = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1 \\ \left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right) \in 1.^{\text{o}}\text{Q.} \end{cases} \Rightarrow \arg(z_2) = \frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = 4\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$$

20.3. $z_3 = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}$

$$|z_3| = \rho_3 = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9\times 3}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{36}{4}} = \sqrt{9} = 3$$

Seja θ_3 o argumento de z_3:

$$\begin{cases} \tan\theta_3 = \dfrac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2}} = \sqrt{3} \\ \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \in 3.^{\text{o}}\text{Q.} \end{cases} \Rightarrow \arg(z_3) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$z_3 = 3\text{e}^{\text{i}\frac{4\pi}{3}} = 3\text{e}^{\text{i}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$$

C.A. $\left| \dfrac{4\pi}{3} - 2\pi = -\dfrac{2\pi}{3} \right.$

20.4. $z_4 = 2 - 2\text{i}$

$$|z_4| = \rho_4 = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

Seja θ_4 o argumento de z_4:

$$\begin{cases} \tan\theta_4 = \dfrac{-2}{2} = -1 \\ (2, -2) \in 4.^{\text{o}}\text{Q.} \end{cases} \Rightarrow \arg(z_4) = -\frac{\pi}{4}$$

$$z_4 = 2\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

20.5. $z_5 = -\dfrac{3\sqrt{3}}{4} - \dfrac{3}{4}\text{i}$

$$|z_5| = \rho_5 = \sqrt{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9\times 3}{16} + \frac{9}{16}} =$$

$$= \sqrt{\frac{36}{16}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Seja θ_5 o argumento de z_5:

$$\begin{cases} \tan\theta_5 = \dfrac{-\frac{3}{4}}{-\frac{3\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}\right) \in 3.^{\text{o}}\text{Q.} \end{cases} \Rightarrow \arg(z_5) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

$$z_5 = \frac{3}{2}\text{e}^{\text{i}\frac{7\pi}{6}} = \frac{3}{2}\text{e}^{\text{i}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$$

C.A. $\left| \dfrac{7\pi}{6} - 2\pi = -\dfrac{5\pi}{6} \right.$

20.6. $z_6 = -2$

$$|z_6| = \rho_6 = 2$$

$$\arg(z_6) = \arg(-2) = \pi$$

$$z_6 = 2\text{e}^{\text{i}\pi}$$

20.7. $z_7 = 2\text{i}$

$$|z_7| = \rho_7 = 2$$

$$\arg(z_7) = \arg(2\text{i}) = \frac{\pi}{2}$$

$$z_7 = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$$

20.8. $z_8 = -\sqrt{2}\text{i}$

$$|z_8| = \rho_8 = \sqrt{2}$$

$$\arg(z_8) = \arg\left(-\sqrt{2}\text{i}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$z_8 = \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

21.1. $2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \text{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\times\dfrac{1}{2}\right) =$

$$= \sqrt{3} + \text{i}$$

$$2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + \text{i}$$

21.2. $2\sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + \text{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) =$

$$= 2\sqrt{3}\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= 2\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + \text{i}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= -\sqrt{3} + 3\text{i}$$

$$2\sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}} = -\sqrt{3} + 3\text{i}$$

MMA12DR © Porto Editora

21.3. $e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} =$

$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} =$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

21.4. $4e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = 4\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right] =$

$= 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$

$= 4\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right] =$

$= 4\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 4\times\left(-\frac{1}{2} - i\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= -2 - 2\sqrt{3}i$

$4e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = -2 - 2\sqrt{3}i$

21.5. $2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] =$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\times\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$

$2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{3} - i$

21.6. $2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) =$

$= 2\left[\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right] =$

$= 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$

$= 2\left(\frac{1}{2} - i\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}i$

$2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 1 - \sqrt{3}i$

21.7. $e^{i\times 0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + i\times 0 = 1$

$e^{i\times 0} = 1$

21.8. $3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3(0 + i\times 1) = 3i$

$3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i$

22. $z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$; $z_2 = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

22.1. $\overline{z_1} = \overline{2e^{i\frac{5\pi}{3}}} = 2e^{i\left(-\frac{5\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

C.A. $\left|\ 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\right.$

22.2. $-z_1 = -2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{3}+\pi\right)} = 2e^{i\frac{8\pi}{3}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

C.A. $\left|\ \frac{8\pi}{3} - 2\pi = \frac{2\pi}{3}\right.$

22.3. $\overline{z_2} = \overline{3e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}} = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$

22.4. $-z_2 = -3e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}$

23. $z = \frac{4k(2-i)}{1-i^{17}} + \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} =$

C.A. $\left|\ \begin{array}{r|l} 17 & 4 \\ 1 & 4 \end{array}\right.$

$i^{17} = i^1 = i$

$= \frac{4k(2-i)}{1-i} + \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] =$

$= \frac{4k(2-i)}{1-i} + \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) =$

$= \frac{4k(2-i)}{1-i} + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4k(2-i)}{1-i} + 1 - i =$

$= \frac{4k(2-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} + 1 - i = \frac{4k(2+2i-i-i^2)}{1-i^2} + 1 - i =$

$= \frac{4k(2+i-(-1))}{1-(-1)} + 1 - i = \frac{4k(2+i+1)}{2} + 1 - i =$

$= 2k(3+1) + 1 - i = 6k + 2ki + 1 - i =$

$= 6k + 1 + i(2k - 1)$

Para o afixo de z pertencer à bissetriz dos quadrantes ímpares $(y = x)$, a parte real de z tem de ser igual à parte imaginária.

Assim,

$6k + 1 = 2k - 1 \Leftrightarrow 6k - 2k = -1 - 1 \Leftrightarrow 4k = -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$

$z = 6\times\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 + i\left(2\times\left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right) = -3 + 1 + i(-1 - 1) =$

$= -2 - 2i$

$z = -2 - 2i$

$|z| = \rho = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = \sqrt{2^2\times 2} = 2\sqrt{2}$

Seja θ o argumento de z:

$\begin{cases} \tan\theta = \frac{-2}{-2} = 1 \\ (-2, -2) \in 3.^{\circ}\text{Q}. \end{cases} \Rightarrow \arg(z) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$

C.A. $\left|\ \frac{5\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4}\right.$

MMA12DR © Porto Editora

24.1. $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z_2 = 3e^{i\frac{11\pi}{6}} = 3e^{i\left(-\frac{11\pi}{6}\right)}$

$|z_1| = |z_2| = 3$

$\frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6} = -\frac{11}{6} + 2k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 1 = -11 + 12k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$12 = 12k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k = 1 \in \mathbb{Z}$

Como $|z_1| = |z_2|$ e $\frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6} + 4\pi$, $z_1 = z_2$.

24.2. $z_1 = -2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\pi\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

C.A. $\left|\ \frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3}\right.$

$z_2 = 2e^{i\left(-\frac{7\pi}{3}\right)}$

$|z_1| = |z_2| = 2$

$-\frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{7}{3} + 2k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 = -7 + 6k \Leftrightarrow 6 = 6k \Leftrightarrow k = 1 \in \mathbb{Z}$

Como $|z_1| = |z_2|$ e $-\frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{3} + 2\pi$, $z_1 = z_2$.

Pág. 197

25. $z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$

25.1. $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Seja θ o argumento de z:

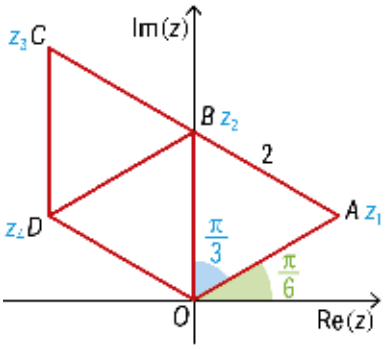
$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}} = -\sqrt{3} \\ \left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \in 4.^{\circ}\,Q. \end{cases} \Rightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{3}$$

25.2. $z = \frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

$z^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^7 e^{i\left(-7\times\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{128}e^{i\left(-\frac{7\pi}{3}\right)} = \frac{1}{128}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

C.A. $\left|\ -\frac{7\pi}{3} + 2\pi = -\frac{\pi}{3}\right.$

26.



Como $[OABD]$ e $[OBCD]$ são losangos, os seus lados têm a mesma medida de comprimento.

Assim, $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OD} = \overline{BD} = \overline{DC} = 2$.

O $\Delta[OAB]$ é equilátero, logo $A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$ e

$\arg(z_1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

$z_1 = 2e^{-\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

$z_4 = -\overline{z_1} \Leftrightarrow z_4 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) =$

C.A. $\left|\ \overline{z_1} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\right.$

$\left.-\overline{z_1} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right.$

$= 2\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$

$z_3 = z_2 + z_4 = 2i + \left(-\sqrt{3} + i\right) = -\sqrt{3} + 3i$

C.A. $\left|\ |z_3| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\right.$

Seja θ_3 o argumento de z_3:

$$\left.\begin{cases} \tan\theta_3 = \dfrac{3}{-\sqrt{3}} = -\sqrt{3} \\ \left(-\sqrt{3}, 3\right) \in 2.^{\circ}\,Q. \end{cases} \Rightarrow \theta_3 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}\right.$$

$\left.z_3 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}\right.$

27. $z_1 = e^{i\theta}$

$z_2 = \frac{4z_1}{\sqrt{3} - i} = \frac{4e^{i\theta}}{2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}} = 2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}$

C.A. Seja $z = \sqrt{3} - i$

$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$

Seja θ o argumento de z:

MMA12DR © Porto Editora

$$\begin{cases} \tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \arg(z) = -\dfrac{\pi}{6} \\ (\sqrt{3}, -1) \in 4.^{\circ}\,\text{Q.} \end{cases}$$

$$z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$z_1^{\,2} = e^{i2\theta}$$

$$\overline{z_2} = 2e^{i\left(-\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\overline{z_2} \times z_1^{\,2} = 2e^{i\left(-\theta-\frac{\pi}{6}\right)} \times e^{i2\theta} = 2e^{i\left(-\theta-\frac{\pi}{6}+2\theta\right)} = 2e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{4}{6}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 0$, $\theta = \dfrac{2\pi}{3} \in]0, \pi[$

28.1. $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

$$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

Seja θ o argumento de z_1:

$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \\ (-1, \sqrt{3}) \in 2.^{\circ}\,\text{Q.} \end{cases} \Rightarrow \arg(z) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z = (z_1 \times z_2)^n = \left(2e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\right)^n =$$

$$= \left(2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)}\right)^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$$

Para z ser um número real positivo,

$$\frac{n\pi}{6} = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{n}{6} = 2k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 12k, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 1$, $n = 12$.

28.2. Para z ser um número real negativo,

$$\frac{n\pi}{6} = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{n}{6} = 1 + 2k \Leftrightarrow n = 6 + 12k, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 0$, $n = 6$.

28.3. Para z ser um número imaginário puro,

$$\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{n}{6} = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 3 + 6k, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 0$, $n = 3$.

Pág. 198

29. $z_1 = 1 + \sqrt{3}i^{15} = 1 - \sqrt{3}i$

C.A. $\begin{array}{r|l} 15 & 4 \\ 3 & 3 \end{array}$

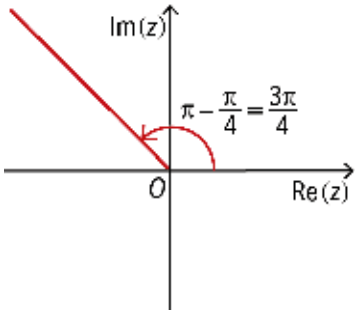
$i^{15} = i^3 = -i$

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

Seja θ_1 o argumento de z_1:

$$\begin{cases} \tan\theta_1 = -\sqrt{3} \\ (1, -\sqrt{3}) \in 4.^{\circ}\,\text{Q.} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{3}$$

$$z_1 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$$



$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{e^{i\theta}}{2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{1}{2}e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$z_3 = \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 e^{i(3\theta+\pi)} = \frac{1}{8}e^{i(3\theta+\pi)}$$

$$3\theta + \pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow 3\theta = -\pi + \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 0$, $\theta = -\dfrac{\pi}{12}$ (F)

Se $k = 1$, $\theta = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{7\pi}{12}$ (F)

Se $k = 2$, $\theta = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{4}$ (V)

$$z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} =$$

$$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= -\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

MMA12DR © Porto Editora

Pág. 199

30. $z_1 = 1+\mathrm{i}$

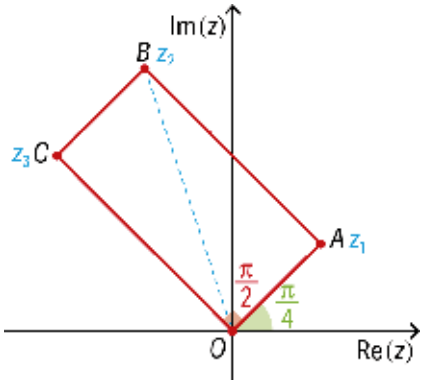
$|z_1| = \sqrt{2}$

$z_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

$A\hat{O}C = \frac{\pi}{2}$

$A_{[OABC]} = 4 \Leftrightarrow \overline{OA} \times \overline{AB} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{2} \times \overline{AB} = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$



$z_3 = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}$

$z_3 = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$

$= 2\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$= -2 + 2\mathrm{i}$

$z_2 = z_1 + z_3 = 1+\mathrm{i}-2+2\mathrm{i} = -1+3\mathrm{i}$

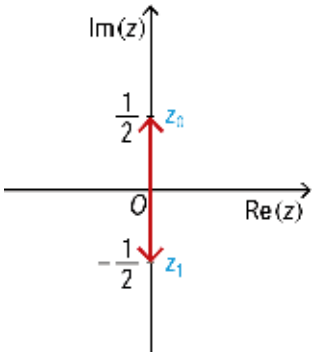
31.1. $4z^2+1=0 \Leftrightarrow z^2 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow z = \sqrt{-\frac{1}{4}} \Leftrightarrow z = \sqrt{\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}} =$

$= \sqrt{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}, k = 0,1$

Se $k=0$, $z_0 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

Se $k=1$, $z_1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

$S = \left\{-\frac{1}{2}\mathrm{i}, \frac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$



Outro modo:

$z^2 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow z = \pm\frac{1}{2}\mathrm{i}$

$S = \left\{-\frac{1}{2}\mathrm{i}, \frac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$

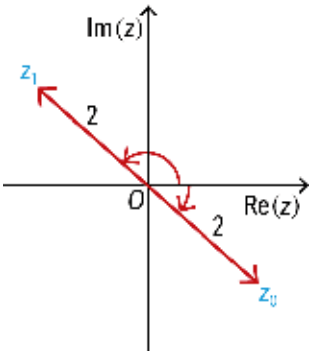
31.2. $z^2 + 4\mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow z^2 = -4\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \sqrt{-4\mathrm{i}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \sqrt{4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}} \Leftrightarrow z = \sqrt{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\right)}$

Se $k=0$, $z_0 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

Se $k=1$, $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}+\pi\right)} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

$S = \left\{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}, 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right\}$



31.3. $z^4 + 8z = 0 \Leftrightarrow z\left(z^3+8\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee z^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^3 = -8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt[3]{-8} \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt[3]{8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt[3]{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, k = 0,1,2$

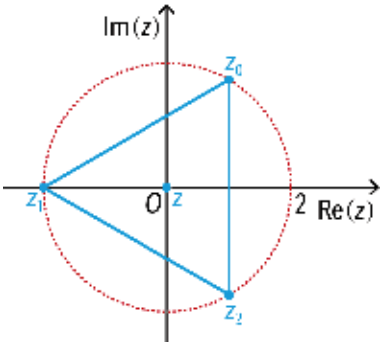
Se $k=0$, $z_0 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

Se $k=1$, $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -2$

Se $k=2$, $z_2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$

$S = \left\{0, -2, 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}, 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}\right\}$

Os afixos de z_0, z_1 e z_2 são os vértices de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de centro O e raio 2.



MMA12DR © Porto Editora

31.4. $z^3+4\sqrt{2}=4\sqrt{2}\mathrm{i}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^3=-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\mathrm{i}\Leftrightarrow z^3=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\Leftrightarrow z=\sqrt[3]{8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}}\Leftrightarrow$

C.A.

Seja $w=-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\mathrm{i}$:

$|w|=\sqrt{\left(-4\sqrt{2}\right)^2+\left(4\sqrt{2}\right)^2}=$

$=\sqrt{16\times2+16\times2}=8$

Seja α o argumento de w:

$$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{4\sqrt{2}}{-4\sqrt{2}}=-1\\ \left(-4\sqrt{2},4\sqrt{2}\right)\in 2.^{\circ}\text{Q.}\end{cases}\Rightarrow\alpha=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

$w=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow z=\sqrt[3]{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\frac{3\pi}{4}}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}\Leftrightarrow z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)},k=0,1,2$

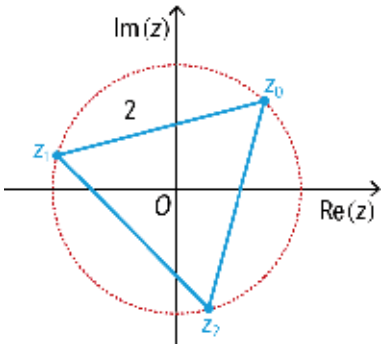
Se $k=0$, $z_0=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

Se $k=1$, $z_1=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$

Se $k=2$, $z_2=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{19\pi}{12}}$

$S=\left\{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}},2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}},2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{19\pi}{12}}\right\}$

Os afixos de z_0, z_1 e z_2 são os vértices de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de centro O e raio 2.



31.5. $16z^3+\sqrt{3}\mathrm{i}=1\Leftrightarrow16z^3=1-\sqrt{3}\mathrm{i}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^3=\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{16}\Leftrightarrow z^3=\frac{1}{16}-\frac{\sqrt{3}}{16}\mathrm{i}\Leftrightarrow z^3=\frac{1}{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\Leftrightarrow$

C.A.

Seja $w=\frac{1}{16}-\frac{\sqrt{3}}{16}\mathrm{i}$:

$|w|=\sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{16}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{256}+\frac{3}{256}}=$

$=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$

Seja α o argumento de w:

$$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{16}}{\frac{1}{16}}=-\sqrt{3}\\ \left(\frac{1}{16},-\frac{\sqrt{3}}{16}\right)\in 4.^{\circ}\text{Q.}\end{cases}\Rightarrow\alpha=-\frac{\pi}{3}$$

$w=\frac{1}{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

$\Leftrightarrow z=\sqrt[3]{\frac{1}{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}\Leftrightarrow z=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{-\frac{\pi}{3}}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)},k=0,1,2$

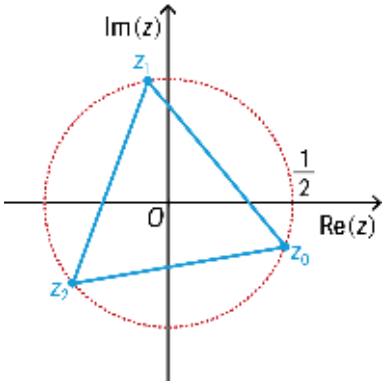
Se $k=0$, $z_0=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{9}\right)}$.

Se $k=1$, $z_1=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}\right)}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{9}}$.

Se $k=2$, $z_2=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}\right)}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{9}}$.

$S=\left\{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{9}\right)},\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{9}},\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{9}}\right\}$

Os afixos de z_0, z_1 e z_2 são os vértices de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de centro O e raio $\frac{1}{2}$.



31.6. Seja $w=z+1\Leftrightarrow z=w-1$:

$w^4=1\Leftrightarrow w^4=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\times0}\Leftrightarrow w=\sqrt[4]{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\times0}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w=\sqrt[4]{1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{0}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)}\Leftrightarrow w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{2}},k=0,1,2,3$

Se $k=0$, $w_0=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\times0}=1$, $z_0=1-1=0$

Se $k=1$, $w_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=\mathrm{i}$, $z_1=\mathrm{i}-1=-1+\mathrm{i}$

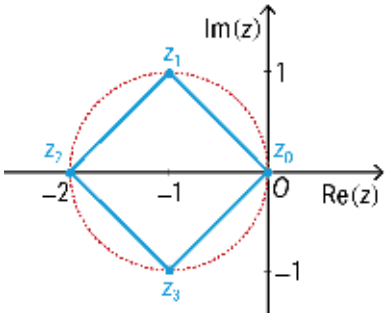
Se $k=2$, $w_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-1$, $z_2=-1-1=-2$

Se $k=3$, $w_3=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}=-\mathrm{i}$, $z_3=-\mathrm{i}-1=-1-\mathrm{i}$

$S=\{0,-1+\mathrm{i},-2,-1-\mathrm{i}\}$

MMA12DR © Porto Editora

Os afixos de z_0, z_1, z_2, e z_3 são os vértices de um quadrado inscrito numa circunferência de centro $(-1, 0)$ e raio 1.



32. $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = -i = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

$iz^3 + 3z_1^2 \times z_2^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow iz^3 + 3\left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 \times \left(e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\right)^3 + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow iz^3 + 3 \times 2^2 e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\left(-\frac{3\pi}{2}\right)} + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow iz^3 + 12e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}\right)} + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow iz^3 + 12e^{i(-\pi)} + 4 = 0 \Leftrightarrow iz^3 + 12(-1) + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow iz^3 - 12 + 4 = 0 \Leftrightarrow iz^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow z^3 = \frac{8}{i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^3 = -8i \Leftrightarrow z^3 = 8e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8}e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, k = 0, 1, 2$

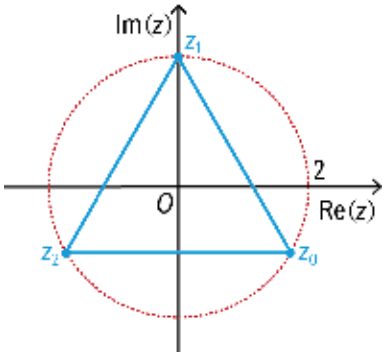
Se $k = 0$, $z_0 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi\right)} = 2e^{i\frac{11\pi}{6}}$

Se $k = 1$, $z_1 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

Se $k = 2$, $z_2 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$

$S = \left\{2e^{i\frac{\pi}{2}}, 2e^{i\frac{7\pi}{6}}, 2e^{i\frac{11\pi}{6}}\right\}$

Os afixos de z_0, z_1 e z_2 são os vértices de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de centro O e raio 2.



33. $z = 8\sqrt{2} - 8\sqrt{2}i$

33.1. $|z| = \sqrt{\left(8\sqrt{2}\right)^2 + \left(-8\sqrt{2}\right)^2} =$

$= \sqrt{64 \times 2 + 64 \times 2} = 16$

Seja θ o argumento de z:

$$\begin{cases} \tan\theta = -\frac{8\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = -1 \\ \left(8\sqrt{2}, -8\sqrt{2}\right) \in 4^{\circ}\,Q \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$z = 16e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} = \sqrt[4]{16}e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right)} =$

$= 2e^{i\left(-\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}\right)}, k = 0, 1, 2, 3$

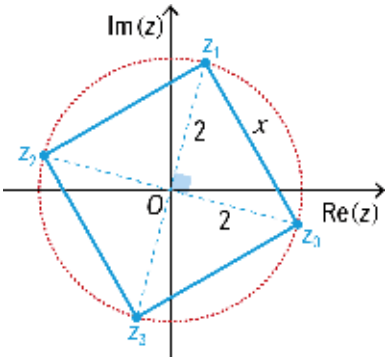
Se $k = 0$, $z_0 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{16}\right)}$

Se $k = 1$, $z_1 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{16}}$

Se $k = 2$, $z_2 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{16} + \pi\right)} = 2e^{i\frac{15\pi}{16}}$

Se $k = 3$, $z_3 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2}\right)} = 2e^{i\frac{23\pi}{16}}$

$S = \left\{2e^{i\left(-\frac{\pi}{16}\right)}, 2e^{i\frac{7\pi}{16}}, 2e^{i\frac{15\pi}{16}}, 2e^{i\frac{23\pi}{16}}\right\}$



33.2. Aplicando o teorema de Pitágoras, vem:

$x^2 = 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow x^2 = 8$

Logo a área do quadrado é 8 u.a.

34.1. $z_1 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$, $z_2 = 2e^{-i\frac{5\pi}{12}}$

$z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$

$z_1 = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{4} - 2\pi\right)} = 2e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$

$\text{Arg}(z_2) - \text{Arg}(z_1) = -\frac{5\pi}{12} + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{6}$

Logo, $n = 6$.

34.2. $z_3 = 2e^{i\left(\frac{-5\pi}{12} + \frac{2\pi}{6}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}$

$z_4 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

MMA12DR © Porto Editora

$z_5 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{12}}$

$z_6 = 2e^{i\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{2\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{11\pi}{12}}$

Restantes raízes:

$2e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}, 2e^{i\frac{\pi}{4}}, 2e^{i\frac{7\pi}{12}}, 2e^{i\frac{11\pi}{12}}$

34.3. Por exemplo,

$z = z_1^{\,6} = z^6 e^{i\left(-\frac{3\times 6\pi}{4}\right)} = 64e^{i\left(-\frac{18\pi}{4}\right)} = 64e^{i\left(-\frac{18\pi}{4}+4\pi\right)} =$

$= 64e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -64i$

Pág. 200

35. $\frac{2\pi}{5}$

$z = 1e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)} = e^{i\frac{9\pi}{10}}$

$z^5 = e^{i\left(\frac{5\times 9\pi}{10}\right)} = e^{i\frac{9\pi}{2}} = e^{i\left(\frac{9\pi}{2}-4\pi\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$i \times e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\pi} = -1$

Opção (D)

Outro modo:

$z = 0 + 1i = i$

$z^5 = i^5 = i$

$iz^5 = i \times i = i^2 = -1$

Pág. 201

36. $z_A = i$, $z_B = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_C = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

36.1. $z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$z_{A'} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{7\pi}{6}} = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} =$

$= -\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$A'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$z_{B'} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{6}} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} =$

$= -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

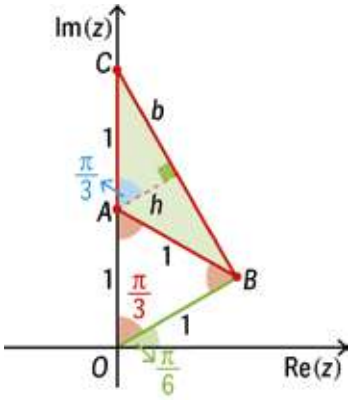
$B'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$z_{C'} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) =$

$= 2\left(-\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = -2\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\times\frac{1}{2}i = -\sqrt{3} - i$

$C'\left(-\sqrt{3}, -1\right)$

36.2.



O $\Delta[OAB]$ é equilátero.

$B\hat{A}C = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\frac{B\hat{A}C}{2} = \frac{\pi}{3}$

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{h}{1} \Leftrightarrow h = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow h = \frac{1}{2}$

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{b}{1} \Leftrightarrow b = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$A_{[ABC]} = A_{[A'B'C']} = \frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ u.a.

Outro modo:

$h = x_B = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{AC} = 2 - 1 = 1$

$A_{[ABC]} = \frac{1\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ u.a.

37.1. Como A pertence à bissetriz do 4.º quadrante,

$z_0 = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

$z_0^{\,2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 e^{i\left(-\frac{2\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

$-z_0^{\,2} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\pi\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

$-z_0^{\,2} \times e^{i(-\theta)} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i(-\theta)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

$\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < -\theta < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{2} - \theta < \frac{\pi}{2}$

O afixo de $-z_0^{\,2} \times e^{i(-\theta)}$ pertence ao 1.º quadrante.

Opção (A)

MMA12DR © Porto Editora

37.2. $\sqrt[3]{z}=z_0 \Leftrightarrow z={z_0}^3 \Leftrightarrow z=\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$

$z_1=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$

$z\times z_1=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}\times\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}=2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{4}+\frac{5\pi}{12}\right)}=$

$=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=$

$=4\left(\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=4\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2-2\sqrt{3}\mathrm{i}$

38.1. $\overline{AC}=\overline{OB}$

$\overline{OA}=\overline{OC}=\overline{AC}$

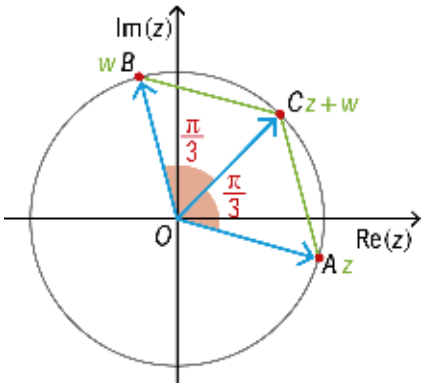
O $\Delta[AOC]$ é equilátero.

$\overline{BC}=\overline{OA}$

$\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{BC}$

O $\Delta[OBC]$ é equilátero.

$AOB=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$



38.2. $z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $w=|w|=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)}$

$z^3=|z|^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3\theta)}$

$w^3=|z|^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(3\theta+3\times\frac{2\pi}{3}\right)}=|z|^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3\theta+2\pi)}=|z|^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3\theta)}$

Logo, $z^3=w^3$

38.3. $z^2+w^2+zw=0$

$z^2+w^2+zw=$

$=\left(|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2+\left(|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)}\right)+|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\times|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)}=$

$=|z|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}+|z|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(2\theta+\frac{4\pi}{3}\right)}+|z|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta+\theta+\frac{2\pi}{3}\right)}=$

$=|z|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta)}+|z|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(2\theta+\frac{4\pi}{3}\right)}+|z|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(2\theta+\frac{2\pi}{3}\right)}=$

$=|z|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta)}\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)=$

$=|z|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta)}\left(1+\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)=$

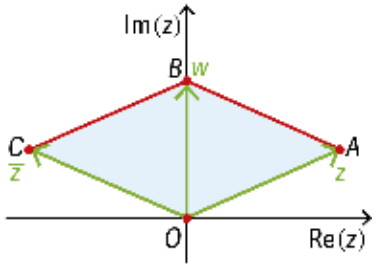
$=|z|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta)}\left(1-\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=$

$=|z|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta)}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=|z|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta)}\times 0=0$

Pág. 202

39. $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

39.1. Como $[OABC]$ é um paralelogramo,



$w=z+\left(-\bar{z}\right)\Leftrightarrow w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\alpha)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha-\left[\cos(-\alpha)+\mathrm{i}\sin(-\alpha)\right]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha-(\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w=2\mathrm{i}\sin\alpha=\underbrace{2\sin\alpha}_{|w|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

($\alpha\in 1.^{\circ}Q.$ e $\sin(\alpha)>0$)

Logo, $|w|=2\sin\alpha$.

39.2. $\mathrm{i}\times z^3=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3\alpha)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right)}$

Para $\mathrm{i}\times z^3$ ser um número real negativo:

$\frac{\pi}{2}+3\alpha=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\alpha=-\frac{\pi}{2}+\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\alpha=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

Se $k=0$, $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$

40. $w=\frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}}{1+\mathrm{i}}=\frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

$w^2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{6}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

$z^4=w^2\Leftrightarrow z^4=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\frac{\pi}{3}}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)}\Leftrightarrow z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)}, k=0,1,2,3$

MMA12DR © Porto Editora

Se $k=0$, $z_0=e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Se $k=1$, $z_1=e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right)}=e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

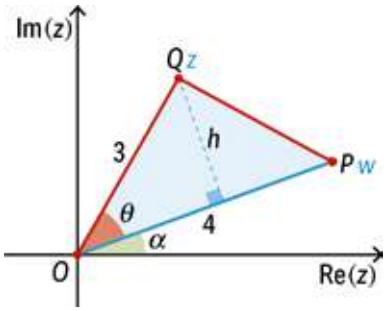
Se $k=2$, $z_2=e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)}=e^{i\frac{13\pi}{12}}$.

Se $k=3$, $z_3=e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{2}\right)}=e^{i\frac{19\pi}{12}}$.

$S=\left\{e^{i\frac{\pi}{12}},e^{i\frac{7\pi}{12}},e^{i\frac{13\pi}{12}},e^{i\frac{19\pi}{12}}\right\}$

41.1. $\sin\theta=\frac{h}{3}\Leftrightarrow h=3\sin\theta$

$A_{[OPQ]}=\frac{4\times 3\sin\theta}{2}=6\sin\theta$



41.2. $z=3e^{i(\alpha+\theta)}$, $\overline{z}=3e^{i(-\alpha-\theta)}$

$w=4e^{i\theta}$, $\overline{w}=4e^{i(-\theta)}$

$z\overline{w}-\overline{z}w=4iA$

$zw-zw=3e^{i(\alpha+\theta)}\times 4e^{i(-\theta)}-3e^{i(-\alpha-\theta)}\times 4e^{i\theta}=$

$=12e^{i(\alpha+\theta-\theta)}-12e^{i(-\alpha-\theta+\theta)}=12e^{i\alpha}-12e^{i(-\alpha)}=$

$=12\left(e^{i\alpha}-e^{i(-\alpha)}\right)=$

$=12\left[\cos\alpha+i\sin\alpha-\left(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)\right)\right]=$

$=12\left[\cos\alpha+i\sin\alpha-\left(\cos\alpha-i\sin\alpha\right)\right]=$

$=12\left(\cancel{\cos\alpha}+i\sin\alpha-\cancel{\cos\alpha}+i\sin\alpha\right)=12\left(2i\sin\alpha\right)=$

$=24i\sin\alpha=6\times 4i\sin\alpha=4i\underbrace{6\sin\alpha}_{A}=4iA$

42. $z=\sqrt{2}e^{i\theta}$, $\theta\in 2.^{\circ}\,Q.$

$z^2+4z\overline{z}+2i=8\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}e^{i\theta}\right)^2+4\left(\sqrt{2}e^{i\theta}\right)\left(\sqrt{2}e^{i(-\theta)}\right)+2i=8\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2e^{i(2\theta)}+4\times 2e^{i(\theta-\theta)}+2i=8\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2e^{i(2\theta)}+8e^{i\times 0}+2i=8\Leftrightarrow 2e^{i(2\theta)}+\cancel{8}+2i=\cancel{8}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2e^{i(2\theta)}=-2i\Leftrightarrow e^{i(2\theta)}=-i\Leftrightarrow e^{i(2\theta)}=e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\theta=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\theta=-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Se $k=0$, $\theta=-\frac{\pi}{4}$ (F)

Se $k=1$, $\theta=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$ (V)

Pág. 203

43.1. $|z_1|=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=2$

Seja θ_1 o argumento de z_1:

$\begin{cases}\tan\theta_1=\frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=1\\ \left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)\in 3.^{\circ}\,Q.\end{cases}\Rightarrow\theta_1=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$

$z_1=2e^{i\frac{5\pi}{4}}$

C:

$2e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+2\times\frac{2\pi}{3}\right)}=2e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)}=2e^{i\frac{31\pi}{12}}=2e^{i\left(\frac{31\pi}{12}-2\pi\right)}=2e^{i\frac{7\pi}{12}}$

Opção (D)

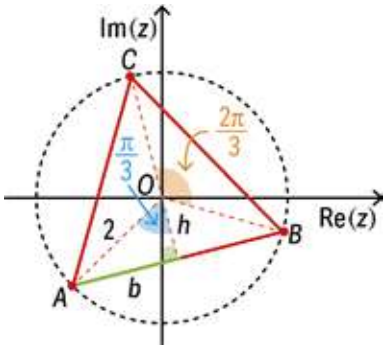
43.2. $z_1^3=\left(2e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)^3=8e^{i\frac{15\pi}{4}}=8e^{i\left(\frac{15\pi}{4}-4\pi\right)}=8e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

$z^3=8e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$, por exemplo.

43.3.

$\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

$|z_1|=2$



$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{h}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{h}{2}\Leftrightarrow h=1$

$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{b}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{b}{2}\Leftrightarrow b=\sqrt{3}$

$A_{[ABC]}=3\times\cancel{2}\times\frac{\sqrt{3}\times 1}{\cancel{2}}=3\sqrt{3}$ u.a.

44. $\frac{z_2}{z_1}=e^{i\frac{\pi}{3}}\Leftrightarrow z_2=z_1\times e^{i\frac{\pi}{3}}$

44.1. $z_1^2+z_2^2=z_1\times z_2$

$z_1^2+z_2^2=z_1^2+z_1^2e^{i\frac{2\pi}{3}}=z_1^2\left(1+e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)=$

$=z_1^2\left(1+\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=$

$=z_1^2\left(1-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=z_1^2\left(1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$

MMA12DR © Porto Editora

$= z_1^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$

$z_1 \times z_2 = z_1 \times z_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = z_1^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = z_1^2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) =$

$= z_1^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$

Logo, $z_1^2 + z_2^2 = z_1 \times z_2$.

44.2. $\frac{z_2}{z_1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z_2 = z_1 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

O módulo de z_2 vai ser igual ao módulo de z_1 porque o módulo não se altera quando multiplicamos um número complexo por $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

$|z_2| = |z_1|$; $\overline{OA} = |z_1|$; $\overline{OB} = |z_2|$

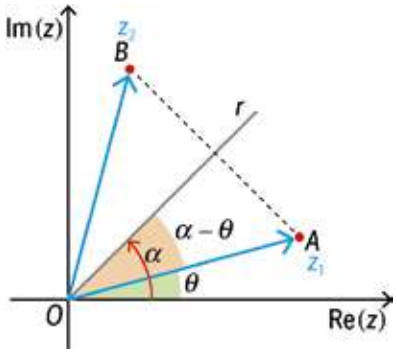
O argumento de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ é $\frac{\pi}{3}$.

O vetor $\overrightarrow{OB}$ é o vetor $\overrightarrow{OA}$ pela rotação de centro O e amplitude $\frac{\pi}{3}$, ou seja $A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$.

Como $\overline{OA} = \overline{OB}$ e $A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$, $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{AB}$.

Logo, o triângulo $[OAB]$ é equilátero.

45.1.



Seja θ o argumento de z_1:

$\arg(z_2) = \theta + 2(\alpha - \theta) = \theta + 2\alpha - 2\theta =$

$= 2\alpha - \theta = 2\alpha - \mathrm{Arg}(z_1)$

45.2. $z_1 = |z_1|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$z_2 = |z_2|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\alpha-\theta)}$

$|z_2| = |z_1|$

$z_1 \times z_2 = |z_1|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times |z_1|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\alpha-\theta)} = |z_1|^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2\alpha-\theta)} =$

$= |z_1|^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\alpha)}$

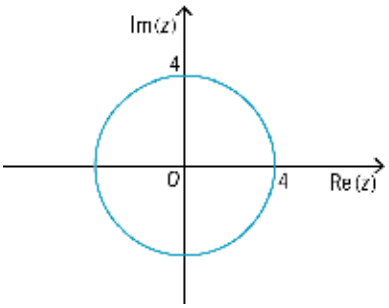
45.3. $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$\arg(z_2) = 2\times\frac{\pi}{4} - \theta = \frac{\pi}{2} - \theta$

Como os afixos de z_1 e de z_2 são dois vértices de um hexágono regular inscrito na circunferência de centro O e raio $|z_1| = |z_2|$.

Pág. 204

46.1. $|z| = 4$ representa a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 4.



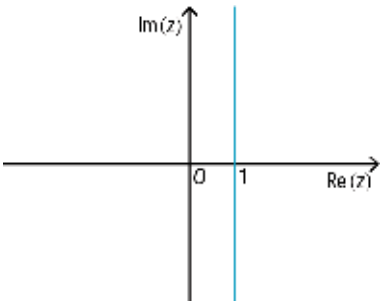
46.2. $z + \bar{z} = 2$

Seja $z = x + y\mathrm{i}$

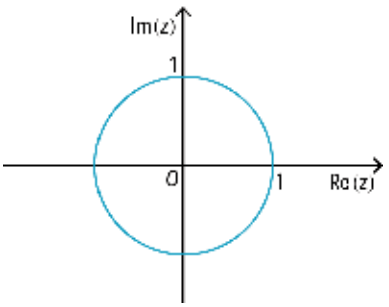
$z + \bar{z} = 2 \Leftrightarrow x + y\mathrm{i} + x - y\mathrm{i} = 2 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 1$

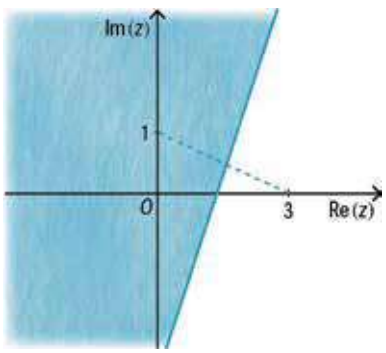
$z + \bar{z} = 2$ representa uma reta vertical que contém o ponto $(1,0)$.



46.3. $z \times \bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$ representa a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1.

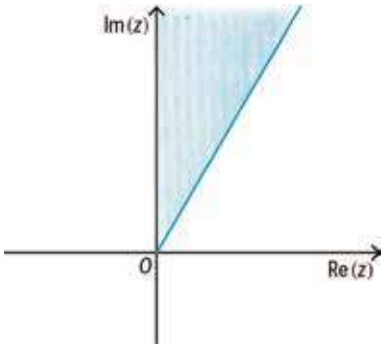


46.4. $|z - \mathrm{i}| \leq |z - 3|$ representa o semiplano definido pela mediatriz do segmento de reta de extremos $(0,1)$ e $(3,0)$ e que contém o ponto $(0,1)$.



MMA12DR © Porto Editora

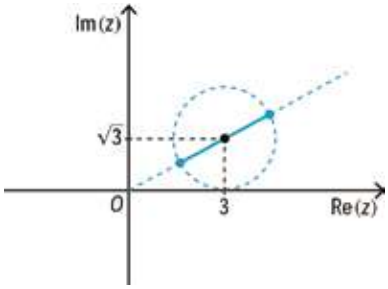
46.5. $\frac{\pi}{3} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}$ representa o ângulo de vértice em $(0,0)$ definido pelas semirretas que formam com a parte positiva do eixo real ângulos de amplitudes $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{2}$.



46.6. $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{6} \wedge \left|z - 3 - \text{i}\sqrt{3}\right| \leq \sqrt{3}$

$\arg(z) = \frac{\pi}{6}$ representa a semirreta de origem em $(0,0)$ e que forma com a parte positiva do eixo real um ângulo de amplitude $\frac{\pi}{6}$.

$\left|z - 3 - \text{i}\sqrt{3}\right| \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow \left|z - \left(3 + \sqrt{3}\text{i}\right)\right| \leq \sqrt{3}$ representa o círculo de centro $\left(3, \sqrt{3}\right)$ e raio $\sqrt{3}$.



47.1. A região apresentada pode ser definida pela semirreta de origem em $(1,1)$ e que forma com a parte positiva do eixo real um ângulo de amplitude $\frac{\pi}{4}$ radianos.

Condição:

$\text{Arg}\left(z - (1 + \text{i})\right) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \text{Arg}(z - 1 - \text{i}) = \frac{\pi}{4}$, por exemplo.

47.2. A região apresentada pode ser definida pela interseção de três domínios planos:

- reta vertical que contém o ponto $(-2,0)$.
- semiplano inferior à reta horizontal que contém o ponto $(0,3)$.
- semiplano superior à reta horizontal que contém o ponto $(0,-1)$.

Condição:

$\text{Re}(z) = -2 \wedge -1 \leq \text{Im}(z) \leq 3$, por exemplo.

47.3. A região apresentada pode ser definida pelo ângulo de vértice no ponto $(-2,-2)$ definido pelas semirretas que formam com a parte positiva do eixo real ângulos de amplitudes 0 e $\frac{\pi}{4}$ radianos.

Condição:

$0 \leq \arg\left(z - (-2 - 2\text{i})\right) \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 \leq \arg\left(z + 2 + 2\text{i}\right) \leq \frac{\pi}{4}$, por exemplo.

47.4. A região apresentada pode ser definida pela interseção de quatro domínios planos:

- semiplano inferior à reta horizontal que contém o ponto $(0,3)$;
- semiplano superior à reta horizontal que contém o ponto $(0,-3)$;
- semiplano à esquerda da reta vertical que contém o ponto $(3,0)$;
- semiplano à direita da reta vertical que contém o ponto $(-3,0)$.

Condição:

$-3 \leq \text{Re}(z) \leq 3 \wedge -3 \leq \text{Im}(z) \leq 3$, por exemplo.

47.5. A região apresentada pode ser definida pela interseção de dois domínios planos:

- ângulo de vértice no ponto $(2,2)$ definido pelas semirretas que formam com a parte positiva do eixo real ângulos de amplitudes $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$ radianos;
- exterior da circunferência de centro em $(2,2)$ e raio 2, incluindo a fronteira.

Condição:

$\frac{\pi}{4} < \text{Arg}\left(z - (2 + 2\text{i})\right) < \frac{\pi}{2} \wedge \left|z - (2 + 2\text{i})\right| \geq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \text{Arg}\left(z - 2 - 2\text{i}\right) < \frac{\pi}{2} \wedge \left|z - 2 - 2\text{i}\right| \geq 2$

47.6. $A(2,0)$, $B(0,2)$, $C(-2,0)$

Reta AB: $m = \frac{2-0}{0-2} = -1 \wedge b = 2$

$y = -x + 2$

$\text{Im}(z) = -\text{Re}(z) + 2$

Reta BC: $m = \frac{0-2}{-2-0} = 1 \wedge b = 2$

$y = x + 2$

$\text{Im}(z) = \text{Re}(z) + 2$

A região apresentada pode ser definida por três domínios planos:

- círculo de centro $(0,0)$ e raio 2;
- semiplano superior à reta definida por $\text{Im}(z) = -\text{Re}(z) + 2$;

MMA12DR © Porto Editora

• semiplano superior à reta definida por $\operatorname{Im}(z)=\operatorname{Re}(z)+2$.

Condição:

$|z|\leq 2 \wedge \left(\operatorname{Im}(z)\geq \operatorname{Re}(z)+2 \vee \operatorname{Im}(z)\geq -\operatorname{Re}(z)+2\right)$, por exemplo.

Pág. 205

48. $\overline{OC}=|z_C|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

A região da figura pode ser definida pela interseção de dois domínios planos:

• círculo de centro $(-1,1)$ e raio $\sqrt{2}$;

• ângulo de vértice em $(0,0)$ definido pelas semirretas que formam com a parte positiva do eixo real ângulos de amplitudes $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{4}$.

Condição:

$|z-(-1+\mathrm{i})|\leq\sqrt{2}\wedge\frac{\pi}{2}\leq\operatorname{Arg}(z)\leq\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|z+1-\mathrm{i}|\leq\sqrt{2}\wedge\frac{\pi}{2}\leq\operatorname{Arg}(z)\leq\frac{3\pi}{4}$

49. $z_1=-2-3\mathrm{i}$

O quarto quadrante pode ser definido pela interseção de dois semiplanos:

• semiplano fechado à direita do eixo imaginário $(\operatorname{Re}(z)\geq 0)$;

• semiplano fechado inferior ao eixo real $(\operatorname{Im}(z)\leq 0)$.

Condição:

$|z-(-2-3\mathrm{i})|\geq 3\wedge\operatorname{Re}(z)\geq 0\wedge\operatorname{Im}(z)\leq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|z+2+3\mathrm{i}|\geq 3\wedge\operatorname{Re}(z)\geq 0\wedge\operatorname{Im}(z)\leq 0$

50. $z_1=3$, $z_4=3\mathrm{i}$

50.1. z_1 é um número real positivo.

Então, $z_1=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 0}$.

z_4 é um número imaginário puro de coeficiente positivo. Então, $z_4=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

50.2. Centro da circunferência: $(3,3)$

Raio da circunferência $=\frac{\overline{AD}}{2}=\frac{|z_1-z_4|}{2}=\frac{|3-3\mathrm{i}|}{2}=$

$=\frac{\sqrt{3^2+(-3)^2}}{2}=\frac{\sqrt{18}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Circunferência inscrita no quadrado:

$|z-(3+3\mathrm{i})|=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow|z-3-3\mathrm{i}|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

50.3. Sejam E, F, G e H os pontos médios de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ e $[AD]$, respetivamente.

$A(3,0)$, $B(6,3)$, $C(3,6)$, $D(0,3)$

$E\left(\frac{3+6}{2},\frac{0+3}{2}\right)=\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$

$F\left(\frac{6+3}{2},\frac{3+6}{2}\right)=\left(\frac{9}{2},\frac{9}{2}\right)$

$G\left(\frac{3+0}{2},\frac{6+3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$

$H\left(\frac{3+0}{2},\frac{0+3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

O quadrado que a Maria desenhou pode ser definido por:

$\frac{3}{2}\leq\operatorname{Re}(z)\leq\frac{9}{2}\wedge\frac{3}{2}\leq\operatorname{Im}(z)\leq\frac{9}{2}$

51. A: $|z-\mathrm{i}|=|z-3|$ representa a mediatriz do segmento de reta de extremos $(0,1)$ e $(3,0)$.

Então, é uma reta.

A $\rightarrow$ 3

B: $|z-3+\mathrm{i}|=5\Leftrightarrow|z-(3-\mathrm{i})|=5$ representa a circunferência de centro $(3,-1)$ e raio 5.

B $\rightarrow$ 5

C: $z\times 2\overline{z}=0\Leftrightarrow 2|z|^2=0\Leftrightarrow|z|=0$ representa o ponto $(0,0)$

C $\rightarrow$ 1

D: $|z-1+\mathrm{i}|\leq 4\Leftrightarrow|z-(1-\mathrm{i})|\leq 4$ representa o círculo de centro $(1,-1)$ e raio 4.

D $\rightarrow$ 6

E: $\operatorname{Arg}(z)=-\frac{3\pi}{4}$ representa a semirreta de origem O e que forma com a parte positiva do eixo real um ângulo de amplitude $-\frac{3\pi}{4}$.

E $\rightarrow$ 2

F: $\operatorname{Re}(z)\leq\operatorname{Im}(z)$ representa o semiplano superior à bissetriz dos quadrantes ímpares.

F $\rightarrow$ 4

Pág. 206

52.1. $|z-1+\mathrm{i}|\leq 3\Leftrightarrow|z-(1-\mathrm{i})|\leq 3$ representa o círculo de centro $(1,-1)$ e raio 3.

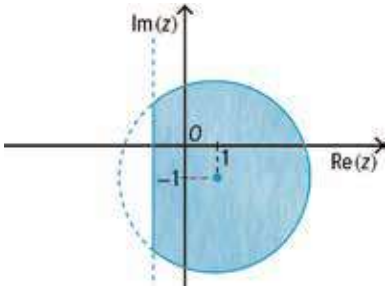
Seja $z=x+y\mathrm{i}$:

$\operatorname{Re}(z-3-\mathrm{i})\geq -2\Leftrightarrow\operatorname{Re}(x+y\mathrm{i}-3-\mathrm{i})\geq -2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\operatorname{Re}((x-3)+(y-1)\mathrm{i})\geq -2\Leftrightarrow x-3\geq -2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\geq 1$ representa o semiplano fechado à direita da reta vertical de equação $x=1$.

MMA12DR © Porto Editora



52.2. Seja $z = x + yi$:

$\text{Im}(-z+2-2i) < -3 \Leftrightarrow \text{Im}(-(x+yi)+2-2i) < -3 \Leftrightarrow$

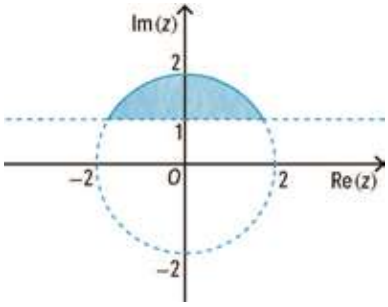
$\Leftrightarrow \text{Im}(-x-yi+2-2i) < -3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{Im}(-x+2+(-y-2)i) < -3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -y-2 < -3 \Leftrightarrow -y < -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y > 1$ representa o semiplano superior à reta de equação $y = 1$.

$|z| \leq 2$ representa o círculo de centro $(0,0)$ e raio 2.



52.3. $|z+2-3i| \geq |z-1+2i| \Leftrightarrow$

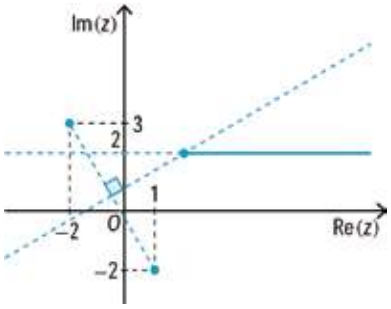
$\Leftrightarrow |z-(-2+3i)| \geq |z-(1-2i)|$ representa o semiplano definido pela mediatriz do segmento de reta de extremos em $(-2,3)$ e $(1,-2)$ que contém o ponto $(1,-2)$.

Seja $z = x + yi$:

$\text{Re}(iz+2) = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(i(x+yi)+2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{Re}(xi - y + 2) = 0 \Leftrightarrow -y + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 2$ representa uma reta horizontal.



53. $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + i$

$$w = \frac{z_2^{\,2} - i^3}{i^{81}} = \frac{(3+i)^2 - (-i)}{i^1} =$$

C.A. $\left|\begin{array}{cc} 81 & 4 \\ 1 & 20 \end{array}\right.$

$$= \frac{9 + 6i + i^2 + i}{i} = \frac{(8+7i)(-i)}{i(-i)} = \frac{-8i - 7i^2}{1} = 7 - 8i$$

$$|w - z_1| = |7 - 8i - (1-i)| = |7 - 8i - 1 + i| = |6 - 7i| =$$

$$= \sqrt{6^2 + (-7)^2} = \sqrt{85} > 6$$

Logo, w pertence ao exterior da circunferência de centro no afixo de z_1 e raio 6.

MMA12DR © Porto Editora

Pág. 207

54. $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 - 2i$

$$w = \frac{\overline{z_1} + i^7 (z_2)}{z_1 + z_2} = \frac{\overline{1-i} + i^3 (3-2i)}{1 - i + 3 - 2i} =$$

$$= \frac{1 + i - i(3-2i)}{4 - 3i} = \frac{1 + i - 3i + 2i^2}{4 - 3i} = \frac{(-1-2i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} =$$

$$= \frac{-4 - 3i - 8i - 6i^2}{4^2 - (3i)^2} = \frac{-4 + 6 - 11i}{25} = \frac{2}{25} - \frac{11}{25}i$$

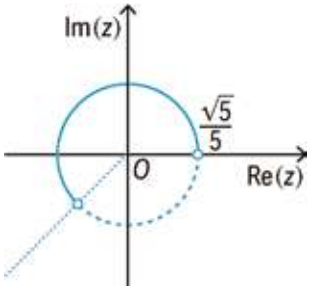
$$|w| = \sqrt{\left(\frac{2}{25}\right)^2 + \left(-\frac{11}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$|z| = |w|$ é a circunferência de centro $(0,0)$ e raio $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$0 < \arg(z) < \frac{5\pi}{4}$ é o ângulo de vértice $(0,0)$ definido pelas semirretas que fazem com a parte positiva do eixo real ângulos de 0 e $\frac{5\pi}{4}$ radianos.

Comprimento do arco de circunferência:

$$c = \frac{5\pi}{4} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}\pi}{4} \text{ u.c.}$$



55. $z_1 = 3$, $z_2 = -3 + 2\text{i}$, $z_3 = 1 + 4\text{i}$, $z_4 = 3 + 5\text{i}$

55.1. $|z_1| = |3| = 3$

$|z_2| = |-3 + 2\text{i}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

$|z_3| = |1 + 4\text{i}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

$|z_4| = |3 + 5\text{i}| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$

55.2. $|z_3 - z_2| = |1 + 4\text{i} - (-3 + 2\text{i})| = |1 + 4\text{i} + 3 - 2\text{i}| =$

$= |4 + 2\text{i}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$|z_4 - z_3| = |3 + 5\text{i} - (1 + 4\text{i})| = |3 + 5\text{i} - 1 - 4\text{i}| =$

$= |2 + \text{i}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$|z_4 - z_2| = |3 + 5\text{i} - (-3 + 2\text{i})| = |3 + 5\text{i} + 3 - 2\text{i}| =$

$= |6 + 3\text{i}| = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$\overline{BC} = 2\sqrt{5}$

$\overline{CD} = \sqrt{5}$

$\overline{BD} = 3\sqrt{5}$

Se B, C e D não forem colineares então formam um triângulo.

$\overline{BC} + \overline{CD} = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5} = \overline{BD}$ o que não é possível (pela desigualdade triangular, o comprimento de qualquer lado de um triângulo é menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois).

Então, B, C e D são colineares.

55.3. $\overline{AB} = |z_2 - z_1| = |-3 + 2\text{i} - 3| = |-6 + 2\text{i}| =$

$= \sqrt{(-6)^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$\overline{AC} = |z_3 - z_1| = |1 + 4\text{i} - 3| = |-2 + 4\text{i}| =$

$= \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\overline{BC} = 2\sqrt{5}$

$\overline{AC} = \overline{BC}$, pelo que o triângulo $[ABC]$ é isósceles.

$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \sqrt{40}^2 = \sqrt{20}^2 + \sqrt{20}^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 40 = 20 + 20 \Leftrightarrow 40 = 40$ (Verdadeira)

O triângulo $[ABC]$ verifica o teorema de Pitágoras, pelo que é um triângulo retângulo.

Logo, o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C e é isósceles.

55.4. Como $[ABC]$ é um triângulo retângulo em C, está inscrito na circunferência de diâmetro $[AB]$, sendo o seu centro o ponto médio de $[AB]$.

$A(3,0)$, $B(-3,2)$

Centro da circunferência: $\left(\frac{3-3}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (0,1)$

Raio $= \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$

Equação cartesiana da circunferência:

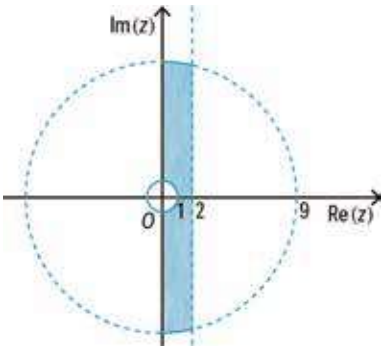
$x^2 + (y-1)^2 = 10$

56.1. $1 \le z\bar{z} \le 9 \Leftrightarrow 1 \le |z| \le 9$ representa a coroa circular definida pelas circunferências de centro $(0,0)$ e raios 1 e 9.

Seja $z = x + y\text{i}$

$0 \le z + \bar{z} \le 4 \Leftrightarrow 0 \le x + y\text{i} + x - y\text{i} \le 4 \Leftrightarrow$

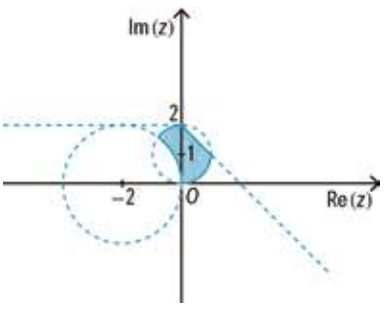
$\Leftrightarrow 0 \le 2x \le 4 \Leftrightarrow 0 \le x \le 2$ representa a região do plano limitada pelas retas verticais de equações $x = 0$ e $x = 2$.



56.2. $|z + 2| \ge 2 \Leftrightarrow |z - (-2)| \ge 2$ representa o exterior da circunferência de centro $(-2,0)$ e raio 2, incluindo a fronteira.

$|z - \text{i}| \le 1$ representa o círculo de centro $(0,1)$ e raio 1.

$-\pi \le \arg(z - 2\text{i}) \le -\frac{\pi}{4}$ representa o ângulo de vértice $(0,2)$ definido pelas semirretas que fazem com a parte positiva do eixo real ângulos de amplitudes $-\pi$ e $-\frac{\pi}{4}$ radianos.



56.3. $|z - \text{i}| \le |z - 1|$ representa o semiplano fechado definido pela mediatriz do segmento de reta de extremos nos pontos $(0,1)$ e $(1,0)$ e que contém o ponto $(0,1)$.

MMA12DR © Porto Editora

$\frac{\pi}{2} \leq \arg(z-1) \leq \pi$ representa o ângulo de vértice em $(1,0)$ definido pelas semirretas que formam com a parte positiva do eixo real ângulos de amplitudes $\frac{\pi}{2}$ e π radianos.

Seja $z = x + yi$:

$|z + iz| \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |x + yi + i(x + yi)| \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x + yi + xi - y| \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |(x - y) + (x + y)i| \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$

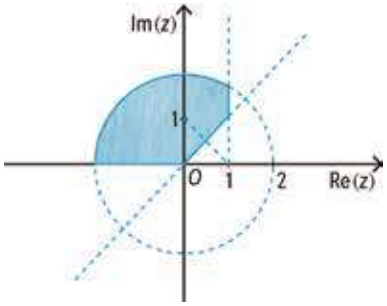
$\Leftrightarrow \sqrt{(x-y)^2 + (x+y)^2} \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x+y)^2 \leq 4 \times 2 \Leftrightarrow$

$x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 \leq 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 \leq 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$ representa o círculo de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{4} = 2$.



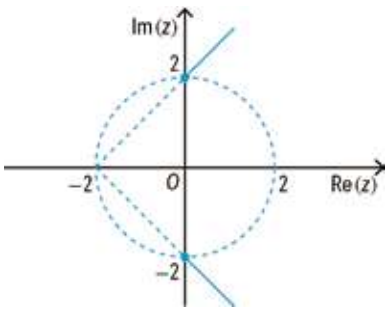
56.4. $\left|\frac{4}{z}\right| \leq 2 \Leftrightarrow \frac{4}{|z|} \leq 2 \Leftrightarrow 4 \leq 2|z| \wedge |z| \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z| \geq 2 \wedge |z| \neq 0$ representa o exterior da circunferência de centro $(0,0)$ e raio 2, incluindo a fronteira.

$|\arg(z+2)| = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \arg(z-(-2)) = -\frac{\pi}{4} \vee \arg(z-(-2)) = \frac{\pi}{4}$

representa as semirretas de origem em $(-2,0)$ e que fazem com a parte positiva do eixo real ângulos de amplitudes $-\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$.



56.5. Seja $z = x + yi$

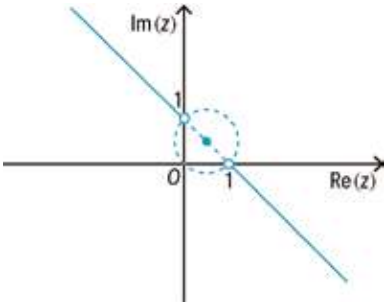
$\text{Re}(z - iz) = 1 \Leftrightarrow \text{Re}(x + yi - i(x + yi)) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{Re}(x + yi - xi + y) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{Re}((x+y) + (y-x)i) = 1 \Leftrightarrow x + y = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -x + 1$ representa uma reta.

$\left|z - \frac{1-i}{2}\right| > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left|z - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right| > \frac{\sqrt{2}}{2}$ representa o exterior da circunferência de centro $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



57. $z_1 = -3i$

57.1. $z_1 = -3i = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

$z_2 = z_1 \times \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^3 = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \times e^{i\frac{6\pi}{5}} = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{6\pi}{5}\right)} = 3e^{i\frac{7\pi}{10}}$

57.2. $z_E = z_1 \times e^{i\frac{2\pi}{5}} = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{5}\right)} = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{10}\right)}$

$z_A = z_1 \times \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^2 = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \times e^{i\frac{4\pi}{5}} = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{5}\right)} = 3e^{i\frac{3\pi}{10}}$

A região sombreada pode ser definida pela interseção de dois domínios planos:

- círculo de centro $(0,0)$ e raio 3 (excluindo a fronteira).
- ângulo de vértice $(0,0)$ definido pelas semirretas que formam com a parte positiva do eixo real ângulos de amplitudes $\frac{\pi}{10}$ e $\frac{3\pi}{10}$.

Condição:

$|z| < 3 \wedge -\frac{\pi}{10} < \text{Arg}(z) < \frac{3\pi}{10}$

Pág. 208

Avaliação global 1

1. $z = \frac{(2-i)^2 + 2k + i}{i^8 + i^{15}} = \frac{4 - 4i + i^2 + 2k + i}{i^0 + i^3} =$

$= \frac{4 - 1 + 2k - 3i}{1 - i} = \frac{(3 + 2k - 3i)(1 + i)}{(1-i)(1+i)} =$

MMA12DR © Porto Editora

$$= \frac{3+3\mathrm{i}+2k+2k\mathrm{i}-3\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2}{1^2-\mathrm{i}^2} = \frac{3+3+2k+2k\mathrm{i}}{1+1} =$$

$$= \frac{6+2k}{2} + \frac{2k}{2}\mathrm{i} = 3+k+k\mathrm{i}$$

$$z = 0 \Leftrightarrow 3+k=0 \wedge k=0 \Leftrightarrow \underbrace{k=-3 \wedge k=0}_{\text{condição impossível}}$$

Opção (D)

2. $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

$$\frac{-z}{\overline{z}} = \frac{-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{\overline{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}} = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}+\pi+\frac{\pi}{6}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} =$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{4\pi}{3}-2\pi\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$$

Opção (A)

3. $$|\mathrm{i}z+1| = \left|\mathrm{i}\left(z+\frac{1}{\mathrm{i}}\right)\right| = |\mathrm{i}| \times \left|z+\frac{1(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}(-\mathrm{i})}\right| =$$

$$= 1 \times |z-\mathrm{i}| = |z-\mathrm{i}|$$

Opção (C)

4. $z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{-\overline{z}} = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}{-\overline{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}} = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}{-\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta)}} = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta+\pi)}} =$$

C.A.

Seja $z_1 = 1-\sqrt{3}\mathrm{i}$:

$$|z_1| = \sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Seja θ_1 um argumento de z_1:

$$\begin{cases} \tan\theta_1 = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \\ \left(1,-\sqrt{3}\right) \in 4.^{\circ}\mathrm{Q} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{3}$$

$$z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{2}{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}+\theta-\pi\right)} = \frac{2}{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta-\frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{2}{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta-\frac{4\pi}{3}+2\pi\right)} = \frac{2}{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)}$$

Opção (B)

5. As opções (B) e (C) não podem ser corretas porque $|z+\mathrm{i}| = |z+1|$ e $|z-\mathrm{i}| = |z-1|$ são mediatrizes dos segmentos de reta de extremos $(0,-1)$ e $(-1,0)$ e de extremos $(0,1)$ e $(1,0)$, respetivamente. Estas mediatrizes representam a bissetriz dos quadrantes ímpares e o segmento de reta apresentado não está contido nessa reta.
A opção (A) não é a correta porque $|z+\mathrm{i}| = |z-1|$ é a mediatriz do segmento de reta de extremos $(0,-1)$ e $(1,0)$, ou seja, é a bissetriz dos quadrantes pares. Embora o segmento de reta apresentado possa pertencer a esta reta, teria que ter outro segmento de reta no segundo quadrante, uma vez que $2 \leq |z| \leq 4$ é uma coroa circular definida pelas circunferências de centro $(0,0)$ e raios 2 e 4.
Na opção (C), $|z-\mathrm{i}| = |z+1|$ é a mediatriz do segmento de reta de extremos $(0,1)$ e $(-1,0)$, ou seja, é a bissetriz dos quadrantes pares e $-4 \leq \mathrm{Im}(z) \leq -2$ é a região do plano compreendida entre as retas horizontais de equações $y=-4$ e $y=-2$.
Logo, esta condição pode definir o conjunto de pontos apresentado.
Opção (C)

Pág. 209

6. Seja $z = a+a\mathrm{i}, a \in \mathbb{R}^-$

$$|z| = \sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2a^2} = |a|\sqrt{2} = -a\sqrt{2}$$

Seja θ um argumento de z:

$$\begin{cases} \tan\theta = \frac{a}{a} = 1 \\ (a,a) \in 3.^{\circ}\mathrm{Q}. \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$z = -a\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$$

$$(a+a\mathrm{i})^n = \left(-a\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{4}\right)}\right)^n = \left(-a\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5n\pi}{4}\right)}$$

z é um número real positivo. Então,

$$\frac{5n\pi}{4} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 5n = 8k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{5n}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

5×64 é múltiplo de 8. Então, 64 pode ser o valor de n.
Opção (C)

7. $w = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$

$$\frac{11\pi}{12} - 2 \times \frac{2\pi}{6} = \frac{11\pi-8\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$$

Opção (B)

8. $z_1 = -2\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

I. $$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{2\pi}{6}\right)} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)} =$$

$$= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = 1-\sqrt{3}\mathrm{i}$$

I $\rightarrow$ a)

MMA12DR © Porto Editora

II. $z_2 z_1^{\,3} = e^{i\frac{\pi}{5}} \Leftrightarrow z_2 \times \left(2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\right)^3 = e^{i\frac{\pi}{5}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_2 \times 8e^{i\left(-\frac{3\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{\pi}{5}} \Leftrightarrow z_2 = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{5}}}{8e^{i\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_2 = \dfrac{1}{8}e^{i\left(\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow z_2 = \dfrac{1}{8}e^{i\frac{17\pi}{10}}$

II $\rightarrow$ c)

III. $|z_1 - z_2| = \left|z_1 - z_1 e^{i\frac{\pi}{5}}\right| = \left|z_1\left(1 - e^{i\frac{\pi}{5}}\right)\right| = |z_1|\left|1 - e^{i\frac{\pi}{5}}\right| =$

$= 2\left|1 - \cos\dfrac{\pi}{5} - i\sin\dfrac{\pi}{5}\right| = 2\sqrt{\left(1-\cos\dfrac{\pi}{5}\right)^2 + \sin^2\dfrac{\pi}{5}} =$

$= 2\sqrt{1 - 2\cos\dfrac{\pi}{5} + \cos^2\dfrac{\pi}{5} + \sin^2\dfrac{\pi}{5}} = 2\sqrt{2 - 2\cos\dfrac{\pi}{5}} =$

$= 2\sqrt{2\left(1-\cos\dfrac{\pi}{5}\right)} = 2\sqrt{2} \times \sqrt{1-\cos\dfrac{\pi}{5}} \approx 1{,}236 < 2$

III $\rightarrow$ b)

IV. $\dfrac{\left(\rho e^{i\theta}\right)^2}{z_1} = 1 + \sqrt{3}i \Leftrightarrow$

C.A. Seja $z = 1 + \sqrt{3}i$ e θ_1 um argumento de z:

$|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

$\begin{cases} \tan\theta_1 = \sqrt{3} \\ \left(1, \sqrt{3}\right) \in 1.^{\circ}Q \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \dfrac{\pi}{3}$

$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\rho^2 e^{i(2\theta)}}{2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \rho^2 e^{i(2\theta)} = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho^2 e^{i(2\theta)} = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$2\theta = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Se $k = 0$, $\theta = -\dfrac{\pi}{12} \notin]\pi, 2\pi[$

Se $k = 1$, $\theta = -\dfrac{\pi}{12} + \pi = \dfrac{11\pi}{12} \notin]\pi, 2\pi[$

Se $k = 2$, $\theta = -\dfrac{\pi}{12} + 2\pi = \dfrac{23\pi}{12} \in]\pi, 2\pi[$

IV $\rightarrow$ c)

Pág. 210

Avaliação global 2

1.1. $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-\left(-4\sqrt{3}\right) \pm \sqrt{\left(-4\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 16}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{16 \times 3 - 64}}{2} \Leftrightarrow z = \dfrac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{-16}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{4\sqrt{3} \pm 4i}{2} \Leftrightarrow z_1 = 2\sqrt{3} - 2i \vee z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$

$|z_1| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 \times 3 + 4} = 4$

Seja θ_1 o argumento de z_1:

$\begin{cases} \tan\theta_1 = \dfrac{-2}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \left(2\sqrt{3}, -2\right) \in 4.^{\circ}Q \end{cases} \Rightarrow \arg(z) = -\dfrac{\pi}{6}$

$z_1 = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

Como $z_2 = \overline{z_1}$, $z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$S = \left\{4e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}, 4e^{i\frac{\pi}{6}}\right\}$

1.2. $z^3 + \dfrac{1}{z^2} = 0 \Leftrightarrow z^5 + 1 = 0 \wedge z \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^5 = -1 \Leftrightarrow z = \sqrt[5]{-1} \Leftrightarrow z = \sqrt[5]{e^{i\pi}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \sqrt[5]{1}e^{i\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\right)} \Leftrightarrow z = e^{i\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\right)},\ k = 0, 1, 2, 3, 4$

Se $k = 0$, $z_0 = e^{i\frac{\pi}{5}}$

Se $k = 1$, $z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}\right)} = e^{i\frac{3\pi}{5}}$

Se $k = 2$, $z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}\right)} = e^{i\pi}$

Se $k = 3$, $z_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{5}+\frac{6\pi}{5}\right)} = e^{i\frac{7\pi}{5}}$

Se $k = 4$, $z_4 = e^{i\left(\frac{\pi}{5}+\frac{8\pi}{5}\right)} = e^{i\frac{9\pi}{5}}$

$S = \left\{e^{i\frac{\pi}{5}}, e^{i\frac{3\pi}{5}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{7\pi}{5}}, e^{i\frac{9\pi}{5}}\right\}$

2. $w = \dfrac{\sqrt{2}i^{4n-9} + 2e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}}}$

2.1. $w = \dfrac{\sqrt{2}i^{-9} + 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}}} =$

C.A.

9	4
1	2

$i^9 = i$

$= \dfrac{\sqrt{2}i^{-1} + 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}}} = \dfrac{\sqrt{2}\dfrac{1}{i} + \sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}}} =$

$= \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}i}{i^2} + \sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}}} = \dfrac{\cancel{-\sqrt{2}i} + \sqrt{2} \cancel{+ i\sqrt{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}}} = \dfrac{1}{e^{i\frac{\pi}{5}}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{5}\right)}$

Como w é uma raiz índice 5 de z,

MMA12DR © Porto Editora

$\sqrt[5]{z} = w \Leftrightarrow z = w^5 \Leftrightarrow z = \left(e^{i\left(-\frac{\pi}{5}\right)}\right)^5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = e^{i(-\pi)} \Leftrightarrow z = -1$

2.2. $\sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{e^{i(-\pi)}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\right)}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$

Se $k = 0$, $z_0 = e^{i\left(-\frac{\pi}{5}\right)}$

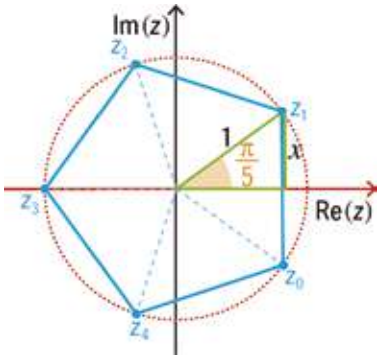
Se $k = 1$, $z_1 = e^{i\left(-\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}\right)} = e^{i\frac{\pi}{5}}$

Se $k = 2$, $z_2 = e^{i\left(-\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}\right)} = e^{i\frac{3\pi}{5}}$

Se $k = 3$, $z_3 = e^{i\left(-\frac{\pi}{5}+\frac{6\pi}{5}\right)} = e^{i\pi}$

Se $k = 4$, $z_4 = e^{i\left(-\frac{\pi}{5}+\frac{8\pi}{5}\right)} = e^{i\frac{7\pi}{5}}$

Os afixos de z_0, z_1, z_2, z_3 e z_4 são os vértices de um pentágono equilátero inscrito na circunferência de centro O e raio 1.



$\sin\frac{\pi}{5} = x$

$x \approx 0,5878$

O lado do pentágono mede, aproximadamente, $2 \times 0,5878 \approx 1,1756$.

$P = 5 \times 1,1756 \approx 5,88$ u. c.

3. $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$, $z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

3.1. $z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) =$

$= 2\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$

3.2. $O(0, 0)$, $A\left(2\sqrt{3}, -2\right)$, $B\left(-\sqrt{3}, 1\right)$

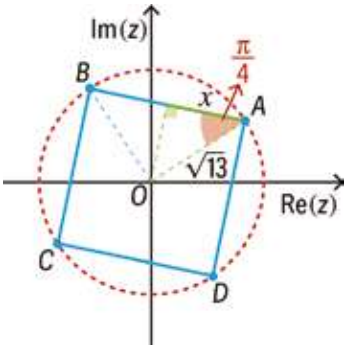
$\overrightarrow{OA} = A - O = \left(2\sqrt{3}, -2\right)$

$\overrightarrow{OB} = B - O = \left(-\sqrt{3}, 1\right)$

O, A e B são colineares se e só se os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ forem colineares.

$\frac{2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = \frac{-2}{1} \Leftrightarrow -2 = -2$ (V)

4.1.



$z_1 = 3 + 2i$

$|z_1| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{x}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow 2x = \sqrt{26}$

O lado do quadrado mede $\sqrt{26}$ u.c.

$A_{[ABCD]} = |\times| = 2x \times 2x = \sqrt{26} \times \sqrt{26} = 26$ u.a.

4.2. z_2 é simétrico de z_1.

$z_2 = -z_1 = -(3 + 2i) = -3 - 2i$

5. $\bar{z} = \frac{9}{z} \Leftrightarrow \bar{z}z = 9 \wedge z \neq 0 \Leftrightarrow$

C.A. $z = x + yi$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\bar{z} = x - yi$

$\bar{z}z = x^2 + y^2 = |z|^2$

$\Leftrightarrow |z|^2 = 9 \underset{(|z|>0)}{\Leftrightarrow} |z| = 3$

O conjunto de pontos do plano complexo que são os afixos das soluções da condição $\bar{z} = \frac{9}{z}$ são uma circunferência de centro na origem e raio 3.

6. $z = e^{i\frac{4\pi}{5}}$

A expressão $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$ representa a soma de 5 termos de uma progressão geométrica de razão z e primeiro termo 1.

$S_n = u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

$S_5 = 1 \times \frac{1 - z^5}{1 - z} = \frac{1 - e^{i\left(\frac{4\pi}{5}\right)^5}}{1 - e^{i\frac{4\pi}{5}}} = \frac{1 - e^{i4\pi}}{1 - e^{i\frac{4\pi}{5}}} = \frac{1 - e^{i\times 0}}{1 - e^{i\frac{4\pi}{5}}} =$

$= \frac{1 - 1}{1 - e^{i\frac{4\pi}{5}}} = 0$

MMA12DR © Porto Editora

MMA12DR © Porto Editora

Pág. 211

7. A região apresentada pode ser definida por três domínios planos:

- coroa circular definida pelas circunferências de centro $(0, 0)$ e raios 2 e 4;
- semiplano fechado superior à reta horizontal que contém o ponto $(0, 1)$;
- semiplano fechado à direita da reta que contém o ponto $(1, 0)$.

Condição:

$2 \leq |z| \leq 4 \wedge \left(\text{Re}(z) \geq 1 \vee \text{Im}(z) \geq 1\right)$

8.1. $P(z) = 0 \Leftrightarrow z^3 + z^2 + 16z + 16 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2(z+1) + 16(z+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z+1)(z^2 + 16) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z + 1 = 0 \vee z^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = -1 \vee z^2 = -16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = -1 \vee z = \pm\sqrt{-16} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = -1 \vee z = -4\text{i} \vee z = 4\text{i}$

8.2. $z_1 \times z_2 = 4\text{i} \times \text{e}^{\text{i}\frac{n\pi}{20}} = 4\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}} \times \text{e}^{\text{i}\frac{n\pi}{20}} =$

$= 4\text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{20}\right)}$

Para $z_1 \times z_2$ pertencer à bissetriz do 2.º quadrante:

$\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{20} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{n}{20} = \frac{3}{4} + 2k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{n}{20} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 2k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = -10 + 15 + 40k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = 5 + 40k,\ k \in \mathbb{Z}$

Se $k = 0$, $n = 5$.

9. Seja $z = x + y\text{i}$ e $\overline{z} = x - y\text{i}$

$(\text{i} - 2)(x - y\text{i}) - (2 + \text{i})(x + y\text{i}) = 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\text{i} - y\text{i}^2 - 2x + 2y\text{i} - \left(2x + 2y\text{i} + \text{i}x + y\text{i}^2\right) = 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{x\text{i}} + y - 2x + \cancel{2y\text{i}} - 2x - \cancel{2y\text{i}} - \cancel{x\text{i}} + y = 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x + 2y = 10 \Leftrightarrow 2y = 4x + 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 2x + 5$

$|z| \leq 5$

Os extremos do segmento são as interseções da reta com $|z| = 5$.

$|z|^2 = x^2 + y^2 = 25$

Como $y = 2x + 5$

$x^2 + (2x + 5)^2 = 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x^2 + 20x + \cancel{25} = \cancel{25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x^2 + 20x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x(x + 4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -4$

Se $x = 0$, $y = 2 \times 0 + 5 = 5$

$A(0, 5)$

$z_A = 5\text{i}$

Se $x = -4$, $y = 2 \times (-4) + 5 = -3$

$B(-4, -3)$

$z_B = -4 - 3\text{i}$

10. $z = \frac{2\text{e}^{\text{i}(2\theta)}}{\sqrt{2} - \sqrt{2}\text{i}} = \frac{2\text{e}^{\text{i}(2\theta)}}{2\text{e}^{\text{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} = \text{e}^{\text{i}\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$

Para z ser um imaginário puro:

$2\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\theta = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

Se $k = 0$, $\theta = \frac{\pi}{8}$. (F)

$\frac{\pi}{8} \notin \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

Se $k = 1$, $\theta = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}$. (V)

$\frac{5\pi}{8} \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

11. Queremos provar que se $|z| = 1$, $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$.

Seja $z = \text{e}^{\text{i}\theta}$.

$z + \frac{1}{z} = \text{e}^{\text{i}\theta} + \frac{1}{\text{e}^{\text{i}\theta}} = \text{e}^{\text{i}\theta} + \frac{\text{e}^{\text{i}\times 0}}{\text{e}^{\text{i}\theta}} = \text{e}^{\text{i}\theta} + \text{e}^{\text{i}(-\theta)} =$

$= \cos\theta + \text{i}\sin\theta + \cos(-\theta) + \text{i}\sin(-\theta) =$

$= \cos\theta + \text{i}\sin\theta + \cos\theta - \text{i}\sin\theta =$

$= 2\cos\theta \in \mathbb{R}$

12. $w \neq 0$

w e $\frac{1}{w}$ são raízes de índice n do mesmo número z.

$w^n = z$

$\left(\frac{1}{w}\right)^n = z$

Logo, $w^n = \left(\frac{1}{w}\right)^n \Leftrightarrow w^n = w^{-n} \Leftrightarrow w^{2n} = w^0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w^{2n} = 1 \Leftrightarrow \left(w^n\right)^2 = 1 \Leftrightarrow w^n = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w^n = -1 \vee w^n = 1$

Como $w^n = z$, $z = -1 \vee z = 1$.

Máximo On

Pág. 212

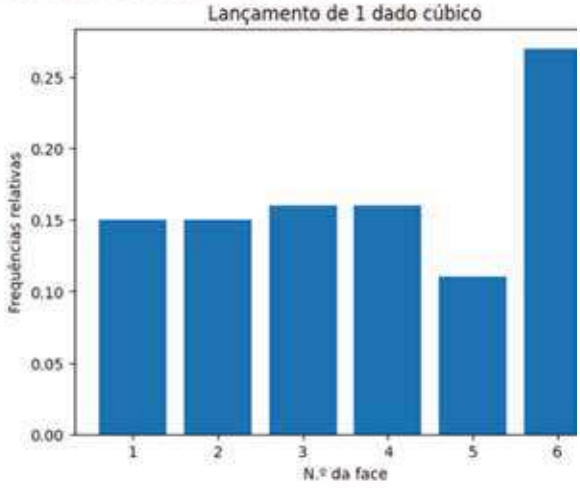
Tarefa 1 – A simulação do lançamento de dados

1.1. Aumenta em 1 o número de vezes que a face sorteada acabou de sair.
Isto é, vai à posição da lista f correspondente ao valor obtido no lançamento (r) e soma 1 ao contador dessa face.

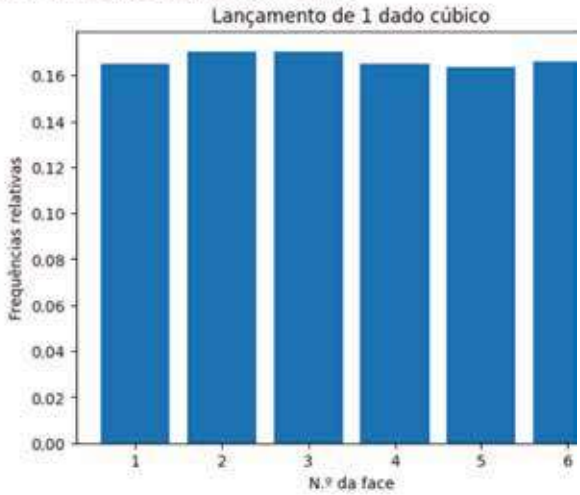
1.2. Acrescenta a frequência relativa da face $k+1$ à lista fr.

2. Exemplo do resultado das simulações:

```
Quantos lançamentos queres simular?100
Freq. relativa da saída da face 1 = 0.15
Freq. relativa da saída da face 2 = 0.15
Freq. relativa da saída da face 3 = 0.16
Freq. relativa da saída da face 4 = 0.16
Freq. relativa da saída da face 5 = 0.11
Freq. relativa da saída da face 6 = 0.27
```




```
Quantos lançamentos queres simular?5000
Freq. relativa da saída da face 1 = 0.165
Freq. relativa da saída da face 2 = 0.1702
Freq. relativa da saída da face 3 = 0.1704
Freq. relativa da saída da face 4 = 0.1648
Freq. relativa da saída da face 5 = 0.1636
Freq. relativa da saída da face 6 = 0.166
```



Com 5000 lançamentos, as frequências relativas de cada face ficam muito próximas de $\frac{1}{6}$. Quanto maior é o número de lançamentos, mais as frequências relativas se aproximam da probabilidade teórica.

MMA12DR © Porto Editora

3.

```
print("Tipos de dado platónico disponíveis:")
print("1 - Tetraedro (4 faces)")
print("2 - Cubo (6 faces)")
print("3 - Octaedro (8 faces)")
print("4 - Dodecaedro (12 faces)")
print("5 - Icosaedro (20 faces)")
op = int(input("Escolhe o tipo de dado (1, 2, 3, 4 ou 5): "))
if op == 1:
    n_faces = 4
    nome_dado = "Tetraedro"
elif op == 2:
    n_faces = 6
    nome_dado = "Cubo"
elif op == 3:
    n_faces = 8
    nome_dado = "Octaedro"
elif op == 4:
    n_faces = 12
    nome_dado = "Dodecaedro"
elif op == 5:
    n_faces = 20
    nome_dado = "Icosaedro"
else:
    print("Opção inválida.")
    exit()

import random
n=int(input("Quantos lançamentos queres simular?"))

f=[0 for k in range(n_faces)]
for i in range(n):
  r=random.randint(1,n_faces)
  f[r-1]=f[r-1]+1

fr=[]
for k in range(n_faces):
  print("Freq. relativa da saída da face",k+1,"=",f[k]/n)
  fr.append(f[k]/n)

import matplotlib.pyplot as plt
plt.bar(list(range(1, n_faces+1)), fr)
plt.title('Lançamento de 1 dado cúbico')
plt.xlabel('N.º da face')
plt.ylabel('Frequências relativas')
plt.show()
```

MMA12DR © Porto Editora

Pág. 213

Tarefa 2 – Resolução de equações do 2.º grau de coeficiente reais

1. Representa o binómio discriminante da equação do 2.º grau.

2. Quando o delta é negativo, isto é, as soluções são complexas não reais.

3.1. As duas soluções complexas são sempre conjugadas, isto é, têm a mesma parte real e as partes imaginárias são simétricas.

Parte real: $-\frac{b}{2a}$. Parte imaginária: $\pm\frac{\sqrt{-delta}}{2a}$.

3.2. Por exemplo:

```
print("ax^2+bx+c=0")
a = float(input("a? "))
if a==0:
  print("A equação não é do 2.º grau!")
else:
  b = float(input("b? "))
  c = float(input("c? "))
  delta = b**2 - 4*a*c
  if delta == 0:
    x1 = (-b) / (2*a)
    print("Solução:", x1)
  elif delta > 0:
    x1 = (-b - (delta)**0.5) / (2*a)
    x2 = (-b + (delta)**0.5) / (2*a)
    print("Duas soluções reais:", x1, " e ", x2)
  else:
    parte_real = -b / (2*a)
    parte_imag = ((-delta)**0.5) / (2*a)
    print("Duas soluções complexas:")
    print("x1 =", parte_real, "-", parte_imag, "i")
    print("x2 =", parte_real, "+", parte_imag, "i")
```

3.3. a) $\pm i$

```
ax^2+bx+c=0
a? 1
b? 0
c? 1
Duas soluções complexas:
x1 = -0.0 - 1.0 i
x2 = -0.0 + 1.0 i
```

b) $1-2i$ e $1+2i$

```
ax^2+bx+c=0
a? 1
b? -2
c? 5
Duas soluções complexas:
x1 = 1.0 - 2.0 i
x2 = 1.0 + 2.0 i
```

$f(0)=0^3-5\times0^2+2\times0-3=-3$

$f(5)=5^3-5\times5^2+2\times5-3=7$

MMA12DR © Porto Editora

Questões para preparar o exame

Probabilidade

Pág. 214

1. $P(A)=0,4$

$P(A\cap B)=0,3$

$P(B\mid \overline{A})=0,6$

$P(A)=0,4 \Leftrightarrow P(\overline{A})=1-0,4 \Leftrightarrow P(\overline{A})=0,6$

$P(B\mid \overline{A})=0,6 \Leftrightarrow \dfrac{P(B\cap \overline{A})}{P(\overline{A})}=0,6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{P(B)-P(A\cap B)}{0,6}=0,6 \Leftrightarrow P(B)-0,3=0,36$

$\Leftrightarrow P(B)=0,66 \Leftrightarrow P(B)=\dfrac{66}{100} \Leftrightarrow P(B)=\dfrac{33}{50}$

2.1. Sejam *C* e *G* os acontecimentos assim definidos:
C: "os turistas preferem a modalidade de pensão completa"
G: "os turistas alugam carro de golfe".

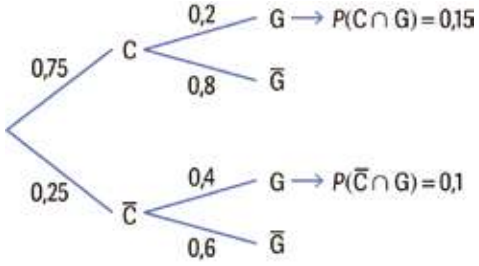
$P(C)=0,75$

$P(G\mid C)=0,20$

$P(\overline{G}\mid \overline{C})=0,6$

Pretende-se determinar $P(C\mid G)$.

Organizando a informação num diagrama em árvore, vem:



C.A.

$P(\overline{C})=1-P(C)=1-0,75=0,25$

$P(\overline{G}\mid C)=1-P(G\mid C)=1-0,2=0,8$

$P(G\mid \overline{C})=1-P(\overline{G}\mid \overline{C})=1-0,6=0,4$

$P(C\cap G)=P(C)\times P(G\mid C)$

$=0,75\times 0,2=0,15$

$P(\overline{C}\cap G)=P(\overline{C})\times P(G\mid \overline{C})$

$=0,25\times 0,4=0,1$

$P(C\mid G)=\dfrac{P(C\cap G)}{P(G)}=\dfrac{0,15}{P(C\cap G)+P(\overline{C}\cap G)}=$

$=\dfrac{0,15}{0,15+0,1}=\dfrac{0,15}{0,25}=\dfrac{3}{5}$.

A probabilidade de o turista ter optado pela modalidade de pensão completa, sabendo que está instalado com utilização de carro de golfe, é $\dfrac{3}{5}$.

2.2. Sejam *F* e *I* os acontecimentos assim definidos:
F: O turista fala francês".
I: "O turista fala Inglês"

$P(F)=50\%$

$P(I)=60\%$

$P(\overline{F}\cap \overline{I})=25\%$

Organizando a informação numa tabela de dupla entrada:

	I	$\overline{I}$	**Total**
F	35%	15%	50%
$\overline{F}$	25%	25%	50%
Total	60%	40%	100%

$P(\overline{F})=100\%-P(F)=100\%-50\%=50\%$

$P(\overline{I})=100\%-P(I)=100\%-60\%=40\%$

$P(\overline{F}\cap I)=P(\overline{F})-P(\overline{F}\cap \overline{I})=50\%-25\%=25\%$

$P(F\cap I)=P(I)-P(\overline{F}\cap I)=60\%-25\%=35\%$

$P(F\cap \overline{I})=P(F)-P(F\cap I)=50\%-35\%=15\%$

$P(A)=P(F\cap I)=35\%$

$P(B)=P(I\cap \overline{F})=25\%$

$P(A)>P(B)$

Logo, o acontecimento *A* é mais provável.

3. Seja *n* o número de bolas verdes no saco.
Então, há $25-n$ bolas amarelas no saco.
Seja *A* o acontecimento: "As duas bolas retiradas têm cores diferentes.".
Número de resultados possíveis: ${}^{25}C_2$ (número de maneiras de selecionar aleatoriamente 2 das 25 bolas do saco).
Número de resultados favoráveis: $n\times(25-n)$

$P(A)=\dfrac{n(25-n)}{{}^{25}C_2}$

Como $P(A)=\dfrac{1}{3}$, tem-se que:

$\dfrac{n(25-n)}{{}^{25}C_2}=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{25n-n^2}{300}=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 25n-n^2=100$

$\Leftrightarrow -n^2+25n-100=0$

$\Leftrightarrow n=\dfrac{-25\pm\sqrt{25^2-4(-1)(-100)}}{2(-1)}$

$\Leftrightarrow n=\dfrac{-25\pm\sqrt{225}}{-2}$

MMA12DR © Porto Editora

$\Leftrightarrow n = \frac{-25 \pm 15}{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = 20 \vee n = 5$

Como $25 - n > n \Leftrightarrow 2n < 25 \Leftrightarrow n < 12{,}5$, tem-se que $n = 5$.

Foram colocadas 5 bolas verdes no saco.

Pág. 215

4. 8 rapazes
8 raparigas
Para que cada um dos dois grupos fique com o mesmo número de rapazes e raparigas, terão que ter 4 rapazes e 4 raparigas.
Número de resultados possíveis: $^{16}C_8 = 12870$
É o número de maneiras diferentes de selecionar 8 dos 16 jovens para formar um grupo.
Os restantes ficarão no outro grupo.
Número de resultados favoráveis:
$^8C_4 \times {}^8C_4 = 70 \times 70 = 4900$, em que $^8C_4$ é o número de maneiras de selecionar 4 das 8 raparigas para integrar um grupo. As restantes ficarão no outro grupo. E $^8C_4$ designa o número de maneiras de selecionar 4 das 8 raparigas para integrar um grupo. Os restantes ficarão no outro grupo.

$$P = \frac{^8C_4 \times {}^8C_4}{^{16}C_8} = \frac{4900}{12870} \approx 0{,}38 = 38\%$$

5. Número de resultados possíveis:
$P_{12} = 12! = 479\,001\,600$
É o número de maneiras diferentes de ordenar os 12 alunos.
Número de resultados favoráveis:
$P_3 \times P_9 \times 10 = 3! \times 9! \times 10 =$
$= 6 \times 362\,880 \times 10 = 21\,771\,800$
em que: P_3 é o número de maneiras de ordenar os alunos que fazem exame de Matemática B;
P_9 é o número de maneiras de ordenar os alunos que fazem exame de Matemática A;
10 é o número de maneiras de colocar os 3 alunos que fazem o exame de Matemática B juntos (nos extremos ou entre 2 alunos que fazem o exame de Matemática A).

$$P = \frac{P_3 \times P_p \times 10}{P_{12}} = \frac{21772800}{479001600} = \frac{1}{22}$$

6. 300 camisas
45% brancas → $0{,}45 \times 300 = 135$ camisas brancas
30% azuis → $0{,}30 \times 300 = 90$ camisas azuis;
Restantes brancas com riscas azuis:
$300 - 135 - 90 = 75$ camisas brancas com riscas azuis.
Segundo a regra de Laplace, numa experiência em que os acontecimentos elementares são equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de resultados favoráveis ao acontecimento e o número e resultados possíveis.
No contexto da situação descrita, o número de resultados possíveis é dado por $^{300}C_3$, que representa todas as maneiras diferentes de selecionar 3 das 300 camisas produzidas.
O número de resultados favoráveis ao acontecimento "Foi selecionada pelo menos uma camisa de uma só cor." é dado pela diferença entre o número de resultados possíveis ($^{300}C_3$) e o número de maneiras diferentes de selecionar as 3 camisas com duas cores, isto é, o número de maneiras diferentes de escolher 3 das 75 camisas brancas com riscas azuis.
Assim,
$P(\text{"Ser selecionada pelo menos uma camisa de uma só cor"}) =$
$= \frac{^{300}C_3 - {}^{75}C_3}{^{300}C_3}$

7. 9 lápis verdes
7 lápis amarelos
5 lápis azuis
Número de resultados possíveis: $^{21}C_6 = 54264$ é o número de maneiras diferentes de selecionar 6 dos 21 lápis disponíveis.
Número de resultados favoráveis:
$^9C_2 \times {}^7C_2 \times {}^5C_2 = 36 \times 21 \times 10 = 7560$
Em que:
$^9C_2$ é o número de maneiras de selecionar 2 dos 9 lápis verdes.
$^7C_2$ é o número de maneiras de selecionar 2 dos 7 lápis amarelos.
$^5C_2$ é o número de maneiras de selecionar 2 dos 5 lápis azuis.

$$P = \frac{^9C_2 \times {}^7C_2 \times {}^5C_2}{^{21}C_6} = \frac{7560}{54264} \approx 0{,}14 = 14\%$$

A probabilidade de a maria selecionar o mesmo número de lápis de cada cor é de 14%.

8. Bolas vermelhas: de 1 a 6

Bolas azuis: de 7 a 12

8.1. Número de resultados possíveis: $^{12}C_2 = 66$
É o número de maneiras diferentes de tirar do saco 2 das 12 bolas.
Número de resultados favoráveis (para que sejam selecionadas 2 bolas da mesma cor, podem ser selecionadas 2 bolas vermelhas ou 2 bolas azuis):
$^6C_2 + {}^6C_2 = 15 + 15 = 30$, em que:
$^6C_2$ designa o número de maneiras de selecionar 2 das 6 bolas vermelhas.

MMA12DR © Porto Editora

MMA12DR © Porto Editora

${}^6C_2$ é o número de maneiras de selecionar 2 das 6 bolas azuis.

Então, $P = \dfrac{{}^6C_2 + {}^6C_2}{{}^{12}C_2} = \dfrac{30}{66} = \dfrac{5}{11}$.

A probabilidade de as duas bolas terem a mesma cor é $\dfrac{5}{11}$

8.2. Podemos construir uma tabela de dupla entrada com os vários resultados possíveis.

	1	2	3	4	5	6	7
1		1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
2	2,1		2,3	2,4	2,5	2,6	
3	3,1	3,2		3,4	3,5		
4	4,1	4,2	4,3				
5	5,1	5,2	5,3				
6	6,1	6,2					
7	7,1						

$P(A \mid B)$ é a probabilidade de as duas bolas terem cor diferente, sabendo que a soma dos seus números é inferior a 9.
Então,
Número de resultados possíveis: 24
Número de resultados favoráveis: 2
Então, pela regra de Laplace:

$$P(A \mid B) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

Pág. 216

9.1. a) Número de resultados possíveis: ${}^8C_2 = 28$

É o número de maneiras diferentes de selecionar 2 dos 8 vértices do prisma.
Número de resultados favoráveis (é dado pela diferença entre o número de resultados possíveis e o número de arestas do prisma):

${}^8C_2 - 12 = 28 - 12 = 16$

Então,

$$P = \frac{{}^8C_2 - 12}{{}^8C_2} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$$

9.1. b) $P(A \mid \overline{B})$ é a probabilidade de a reta *r* conter uma diagonal de uma face do prisma, sabendo que não está contida no plano de uma das bases do prisma.
Segundo a regra de Laplace, numa experiência em que os acontecimentos elementares são equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de resultados favoráveis ao acontecimento e o número de resultados possíveis.
No contexto da situação descrita, como sabemos que a reta *r* não está contida no plano de uma das bases do prisma, o número de resultados possíveis é dado pela diferença entre o número total de retas definidas por dois vértices do prisma (${}^8C_2$) e o número de retas existentes nas bases do prisma, definidas por 2 dos seus 4 vértices ($2 \times {}^4C_2$). Assim, o número de resultados possíveis é ${}^8C_2 - 2 \times {}^4C_2$.
O número de resultados favoráveis é dado por 2×4, uma vez que cada face do prisma tem 2 diagonais e existem 4 faces que não são bases do prisma.
Então, segundo a regra de Laplace,

$$P(A \mid \overline{B}) = \frac{2 \times 4}{{}^8C_2 - 2 \times {}^4C_2} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

9.2. Existem apenas 3 formas de pintar o prisma nas condições referidas. 2 faces laterais opostas terão que ser pintadas de azul e as outras 2 de vermelho para que faces laterais com uma aresta comum não tenham a mesma cor. Assim, o número de maneiras de colorir o prisma depende apenas do número de maneiras de colorir as 2 bases e estas, ou são ambas pintadas de azul, ou ambas pintadas de vermelho ou uma de vermelho e uma de azul, ou seja, de 3 maneiras.

10.1. $P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B}) \Leftrightarrow \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(\overline{B}) \times P(A \cap B) = P(B) \times P(A \cap \overline{B}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [1 - P(B)] \times P(A \cap B) = P(B) \times [P(A) - P(A \cap B)]$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) - P(B) \times P(A \cap B) =$

$= P(B) \times P(A) - P(B) \times P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B) \times P(A) \cancel{- P(B) \times P(A \cap B)} +$

$\cancel{+ P(B) \times P(A \cap B)}$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B) \times P(A)$

$\Leftrightarrow$ *A* e *B* são independentes.

Logo, $P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B})$ se, e só se, *A* e *B* são independentes.

10.2. $P(A \cap B) = \dfrac{1}{15}$

$\Leftrightarrow P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{15}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{3} P(B) = \dfrac{1}{15}$

$\Leftrightarrow P(B) = \dfrac{1}{5}$

$P(\overline{A} \mid B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)}$

$= \dfrac{\frac{1}{5} - \frac{1}{15}}{\frac{1}{5}} = \dfrac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{5}} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$

$P(\overline{A} \mid B) = \dfrac{2}{3}$

11. Sejam A e B os acontecimentos assim definidos:
A: "o turista está pela primeira vez no Porto".
B: "o turista é inglês".

- $P(A) < 1$
- $P(B) = 2P(A)$
- $P\left(A \mid \overline{B}\right) = \frac{1}{2}$
- $P\left(\overline{A} \mid B\right) = \frac{5}{6}$

$$P\left(\overline{A} \mid B\right) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P(B)} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(B) - P(A \cap B)}{2P(A)} = \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow 2P(A) - P(A \cap B) = \frac{5}{6} \times 2P(A)$$

$$\Leftrightarrow 2P(A) - \frac{5}{3}P(A) = P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3}P(A)$$

$$P\left(A \mid \overline{B}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P\left(A \cap \overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow P(A) - \frac{1}{3}P(A) = \frac{1}{2}\left(1 - 2P(A)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}P(A) = \frac{1}{2} - P(A)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}P(A) + P(A) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3}P(A) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{3}}$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{10}$$

A probabilidade de o turista estar pela primeira vez no Porto é $\frac{3}{10}$.

Pág. 217

12.1. Número de resultados possíveis: ${}^{16}C_4 = 1820$

É o número de maneiras de selecionar 4 das 16 casas do tabuleiro.
Número de resultados favoráveis:
$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, em que:
4 é o número de posições possíveis para colocar uma peça na primeira fila.
3 designa o número de maneiras de a peça a colocar na 2.ª fila não poderá ficar na mesma coluna que a peça colocada na 1.ª fila.
2 representa a peça a colocar na 3.ª fila não poderá ficar em nenhuma das 2 colunas já ocupadas.
1: a peça a colocar na 4.ª fila não poderá ficar em nenhuma das 3 colunas já ocupadas.
Assim,

$$P = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{{}^{16}C_4} = \frac{24}{1820} = \frac{6}{455}$$

12.2. Número de resultados possíveis: ${}^{16}C_{12} = 1820$

É o número de maneiras de ocupar 12 das 16 casas do tabuleiro com 12 peças iguais.
Número de resultados favoráveis:

$2 \times {}^{12}C_8 - {}^{8}C_4 = 2 \times 495 - 70 = 920$

em que:
2: designa o número de possibilidades uma vez que o tabuleiro tem 2 diagonais.
${}^{12}C_8$: ocupando uma diagonal com 4 peças, ${}^{12}C_8$ representa o número de maneiras de ocupar 8 das 12 restantes casas com as restantes 8 peças.
${}^{8}C_4$: ocupando as duas diagonais com 8 peças, ${}^{8}C_4$, representa o número de maneiras de ocupar 4 das 8 restantes 4 peças (subtrai-se este valor porque estes casos foram contabilizados 2 vezes).
Assim,

$$P = \frac{2 \times {}^{12}C_8 - {}^{8}C_4}{{}^{16}C_{12}} = \frac{920}{1820} \simeq 0{,}505$$

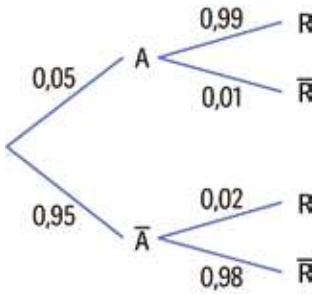
13. Sejam os acontecimentos:
A: "O avião está presente numa determinada área".
R: "O radar detetou a presença do avião".
Sabe-se que:

$P(R \mid A) = 0{,}99$

$P\left(R \mid \overline{A}\right) = 0{,}02$

$P(A) = 0{,}05$

Podemos organizar os dados numa árvore de probabilidade:



$P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

$P\left(\overline{R} \mid A\right) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$

$P\left(\overline{R} \mid \overline{A}\right) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$

MMA12DR © Porto Editora

MMA12DR © Porto Editora

13.1. Pretendemos determinar $P(\overline{A} \mid R)$:

$$P(\overline{A} \mid R) = \frac{P(\overline{A} \cap R)}{P(R)} = \frac{P(\overline{A} \cap R)}{P(A \cap R) + P(\overline{A} \cap R)} =$$

$$= \frac{0,95 \times 0,02}{0,05 \times 0,99 + 0,95 \times 0,02} = \frac{0,019}{0,0495 + 0,019} =$$

$$= \frac{0,019}{0,0685} \approx 0,28$$

13.2. Pretendemos determinar $P(A \cap \overline{R})$:

$$P(A \cap \overline{R}) = P(A) \times P(A \mid \overline{R}) =$$

$$= 0,05 \times 0,01 = 0,0005 = \frac{5}{10000} = \frac{1}{2000}$$

14. 30 cartões com prémio de uma *T-shirt*
18 cartões sem prémio
Total: 48 cartões
Sabemos que o primeiro cartão extraído tem prémio e o segundo cartão extraído não tem prémio.
Assim, quando se vai extrair o terceiro cartão, estão no saco $48 - 2 = 46$ cartões, sendo $30 - 1 = 29$ com prémio e $18 - 1 = 17$ sem prémio.
Como pretendemos tirar o terceiro cartão com prémio, o número de casos favoráveis são 29 e o número de casos possíveis são 46.
Logo, $P\left[C \mid (\overline{A} \cap \overline{B})\right] = \frac{29}{46}$

15. Para $P(X > 5) > P(X < 4,5)$, o valor 5 tem de estar mais perto da média do que 4,5.
Pretendemos que: $|5 - \mu| < |4,5 - \mu|$
Se $\mu = 5,6$:
$|5 - 5,6| < |4,5 - 5,6|$
$\Leftrightarrow 0,6 < 1,1$ Verdadeiro
Se $\mu = 4,5$:
$|5 - 4,5| < |4,5 - 4,5|$
$\Leftrightarrow 0,5 < 0$ Falso
Se $\mu = 4,7$:
$|5 - 4,7| < |4,5 - 4,7|$
$\Leftrightarrow 0,3 < 0,2$ Falso
Se $\mu = 0,125$:
$|5 - 0,125| < |4,5 - 0,125|$
$\Leftrightarrow 4,875 < 4,375$ Falso
Opção (A)

Pág. 218

16. Pretendemos mostrar que:

$$P(B \mid A) \times P(A) + P(\overline{B}) = 1 - P(\overline{A} \cap B)$$

$$P(B \mid A) \times P(A) + P(\overline{B}) =$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{\cancel{P(A)}} \times \cancel{P(A)} + P(\overline{B}) =$$

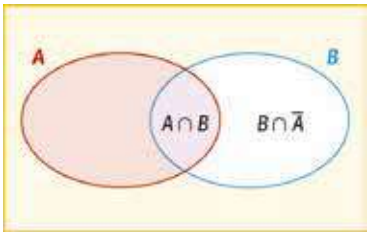
$$= P(A \cap B) + P(\overline{B}) =$$

$$= P(A \cap B) + 1 - P(B) =$$

$$= 1 - P(B) + P(A \cap B) =$$

$$= 1 - \left[P(B) - P(A \cap B)\right] =$$

$$= 1 - P(\overline{A} \cap B)$$



17. Número de resultados possíveis:
$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$

17.1. Número de resultados favoráveis:
$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

$$P = \frac{5040}{10000} = 0,504$$

17.2. Número de resultados favoráveis:
$^4C_2 \times 10 \times 9 \times 8 = 4320$
em que:
$^4C_2$ é o número de maneiras onde podem ser colocados os 2 algarismos iguais;
10: número de maneiras de escolher os dois algarismos iguais;
9×8 : número de maneiras de escolher ordenadamente os 2 restantes algarismos.

17.3. Número de resultados favoráveis:
Soma igual a 4: $0 + 0 + 3 + 1 = 4$
$0 + 0 + 2 + 2 = 4$
$^4C_2 \times 2 + {}^4C_2 \times 1 = 12 + 6 = 18$
em que:
$^4C_2$: número de maneiras de colocar os 2 algarismos 0
2: número de maneiras de colocar ordenadamente os algarismos 3 e 1 (31 ou 13)
$^4C_2$: número de maneiras de colocar os 2 algarismos 0
1: número de maneiras de colocar os algarismos 2.

$$P = \frac{18}{10000} = 0,0018$$

18.1. **a)** Número de resultados possíveis: $^{10}C_4$
Para o produto dos números das bolas extraídas ser igual a 0, uma das bolas tem de ser o 0.
Número de resultados favoráveis: $^9C_3$

$$P = \frac{^9C_3}{^{10}C_4} = \frac{84}{210} = \frac{2}{5}$$

b) Número de resultados possíveis:

$^{10}A_4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

Número de resultados favoráveis:

N.º par, último algarismo 0, 2, 4, 6, 8

N.º maior do que 2000, primeiro algarismo 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

• Se o último algarismo for 0, o primeiro tem 8 possibilidades (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)

$8 \times 8 \times 7 \times 1 = 448$, onde:

8×7 é o número de possibilidades de colocar ordenadamente o segundo e terceiro algarismos.

• Se o último algarismo não for 0, o primeiro tem 7 possibilidades.

$7 \times 8 \times 7 \times 4 = 1568$, em que:

7: é o número de possibilidades de colocar o algarismo dos milhares que tem de ser maior ou igual que dois e diferente do último.

8×7 : é o número de possibilidades de colocar ordenadamente o segundo e terceiro algarismos.

4: é o número de possibilidades de escolher um algarismo par diferente de zero.

Total de resultados favoráveis:

$448 + 1568 = 2016$

$P = \frac{2016}{5040} = \frac{2}{5}$

18.2. O acontecimento pelo menos duas bolas azuis seguidas é o acontecimento contrário ao acontecimento não há duas bolas azuis seguidas.

N.º de resultados possíveis: $10! = 3628800$

N.º de resultados favoráveis:

$^{7}A_4 \times 6! = 604\,800$, em que:

$^{7}A_4$ é o número de maneiras de colocar ordenadamente as 4 bolas azuis nos 7 lugares disponíveis;

$6!$ é o número de maneiras de colocar ordenadamente as 6 bolas vermelhas.

A probabilidade de não haver bolas azuis consecutivas é:

$P = \frac{^{7}A_4 \times 6!}{10!} = \frac{640\,800}{3\,628\,800} = \frac{1}{6}$

A probabilidade de, pelo menos, duas bolas azuis ficarem seguidas é:

$P = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

19. 15 bolas: 5 brancas e 10 pretas.

Consideremos que foram acrescentadas n bolas de cada cor. Assim, temos:

$15 + 2n$ bolas: $5 + n$ brancas e $10 + n$ pretas.

N.º de resultados possíveis: $^{15+2n}C_2$

N.º de resultados favoráveis:

Se as duas bolas retiradas são da mesma cor, podem ser as duas brancas ou as duas pretas.

Assim, o número de resultados favoráveis é

$^{5+n}C_2 + {}^{10+n}C_2$

$$P = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{^{5+n}C_2 + {}^{10+n}C_2}{^{15+2n}C_2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{(5+n)!}{2!(5+n-2)!} + \frac{(10+n)!}{2!(10+n-2)!}}{\frac{(15+2n)!}{2!(15+2n-2)!}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{(5+n)!}{2!(n+3)!} + \frac{(10+n)!}{2!(n+8)!}}{\frac{(15+2n)!}{2!(2n+13)!}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{(5+n)(4+n)\cancel{(n+3)!}}{2\cancel{(n+3)!}} + \frac{(10+n)(9+n)\cancel{(n+8)!}}{2\cancel{(n+8)!}}}{\frac{(15+2n)(14+2n)\cancel{(2n+13)!}}{2\cancel{(2n+13)!}}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(5+n)(4+n)+(10+n)(9+n)}{(15+2n)(14+2n)} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{20+5n+4n+n^2+90+10n+9n+n^2}{210+30n+28n+4n^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n^2+28n+110}{4n^2+58n+210} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{4n^2} + 56n + 220 = \cancel{4n^2} + 58n + 210$$

$$\Leftrightarrow -2n = -10$$

$$\Leftrightarrow n = 5$$

Foram acrescentadas 10 bolas, 5 brancas e 5 pretas.

20. Consideremos os acontecimentos:

F: "O professor é o do sexo feminino."

D: "O professor é diretor de turma."

Sabe-se que:

• $P(F) = 80\% = 0,8$

• $P(D \mid \overline{F}) = \frac{2}{5} = 0,4$

• $P(F \mid D) = \frac{7}{8} = 0,875$

Pretendemos determinar $P(F \cap \overline{D})$:

$P(\overline{F}) = 1 - 0,8 = 0,2$

$P(D \mid \overline{F}) = 0,4 \Leftrightarrow P(D \cap \overline{F}) = 0,4 \times P(\overline{F}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(D \cap \overline{F}) = 0,4 \times 0,2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(D \cap \overline{F}) = 0,08 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(D) - P(D \cap F) = 0,08 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(D) = 0,08 + P(D \cap F)$

MMA12DR © Porto Editora

$$P(F \mid D) = 0{,}875 \Leftrightarrow \frac{P(F \cap D)}{P(D)} = 0{,}875 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(F \cap D) = 0{,}875 \times P(D) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(D) = 0{,}08 + 0{,}875 \times P(D) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(D) - 0{,}875 \times P(D) = 0{,}08 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}125P(D) = 0{,}08 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(D) = 0{,}64$$

$$P(F \cap D) = 0{,}875 \times 0{,}64 \Leftrightarrow P(F \cap D) = 0{,}56$$

$$P\left(F \cap \overline{D}\right) = P(F) - P(F \cap D)$$

$$= 0{,}8 - 0{,}56 = 0{,}24$$

A probabilidade pedida é 0,24.

Pág. 219

21. Sejam os acontecimentos:
A: "O trabalhador almoça na cantina."
J: "O trabalhador janta na cantina."
Sabe-se que:

$P(A) = 75\% = 0{,}75$

$P(J \mid A) = \frac{1}{3}$

$P\left(\overline{A} \cap \overline{J}\right) = 5\% = 0{,}05$

21.1. Pretende-se determinar $P(J)$.

$$P(J \mid A) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(J \cap A) = \frac{1}{3} \times P(A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(J \cap A) = \frac{1}{3} \times 0{,}75$$

$$\Leftrightarrow P(J \cap A) = 0{,}25$$

Vamos organizar os dados numa tabela de contingência. Na tabela os dados estão a vermelho.

	A	$\overline{A}$	Total
J	0,25	0,2	0,45
$\overline{J}$	0,5	0,05	0,55
Total	0,75	0,25	1

C.A.

$P\left(A \cap \overline{J}\right) = 0{,}75 - 0{,}25 = 0{,}5$

$P\left(\overline{J}\right) = 0{,}5 + 0{,}05 = 0{,}55$

$P(J) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$

$P\left(J \cap \overline{A}\right) = 0{,}45 - 0{,}25 = 0{,}2$

$P\left(\overline{A}\right) = 0{,}2 + 0{,}05 = 0{,}25$

A probabilidade de o trabalhador jantar na cantina é 0,45.

21.2. 80 trabalhadores.
Escolher 10 ao acaso
$P(A) = 0{,}75$
Número de trabalhadores que almoçam na cantina = $0{,}75 \times 80 = 60$
Número de trabalhadores que não almoçam na cantina = $80 - 60 = 20$
Vamos determinar a probabilidade de, pelo menos, nove trabalhadores almoçarem na cantina, isto é, a probabilidade de almoçarem 9 ou 10 trabalhadores.
N.º de resultados possíveis: ${}^{80}C_{10}$
N.º de resultados favoráveis: ${}^{60}C_9 \times {}^{20}C_1 + {}^{60}C_{10}$

$$P = \frac{{}^{60}C_9 \times {}^{20}C_1 + {}^{60}C_{10}}{{}^{80}C_{10}} \approx 0{,}225 = 22{,}5\%$$

22. Sejam os acontecimentos:
A: "O cliente tem apólice de seguro automóvel."
H: "O cliente tem apólice de seguro de habitação."
Sabe-se que:

$P(A) = 2P(H)$

$P(A \cup H) = 4P(A \cap H)$

Pretende-se determinar $P\left(\overline{A} \mid H\right)$.

$$P(A \cup H) = P(A) + P(H) - P(A \cap H) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4P(A \cap H) = 2P(H) + P(H) - P(A \cap H)$$

$$\Leftrightarrow 5P(A \cap H) = 3P(H)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap H) = \frac{3}{5}P(H)$$

$$P\left(\overline{A} \mid H\right) = \frac{P\left(\overline{A} \cap H\right)}{P(H)} = \frac{P(H) - P(A \cap H)}{P(H)} =$$

$$= \frac{P(H) - \frac{3}{5}P(H)}{P(H)}$$

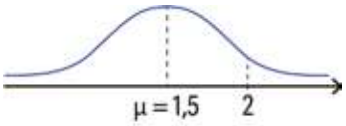
$$= \frac{\frac{5}{5}P(H) - \frac{3}{5}P(H)}{P(H)}$$

$$= \frac{\frac{2}{5}\cancel{P(H)}}{\cancel{P(H)}} = \frac{2}{5}$$

23. $\mu = 1{,}5$ min ; $P(X > 2) = 0{,}2$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(1{,}5 < X < 2)}{P(X > 1{,}5)} =$$

$$= \frac{0{,}5 - 0{,}2}{0{,}5} = \frac{0{,}3}{0{,}5} = \frac{3}{5}$$



MMA12DR © Porto Editora

24. 5 bolas: 3 brancas e 3 pretas.

N.º de casos possíveis: ${}^5C_3$

24.1.

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	0,1	0,6	0,3

Cálculos auxiliares:

$P(X=0)=\dfrac{{}^3C_3}{{}^5C_3}=\dfrac{1}{10}=0{,}1$, em que $P(X=0)$ designa a probabilidade de não retirar nenhuma bola preta, isto é, retirar as 3 brancas.

$P(X=1)=\dfrac{{}^2C_1\times{}^3C_2}{{}^5C_3}=\dfrac{2\times3}{10}=\dfrac{6}{10}=0{,}6$, em que $P(X=1)$ designa a probabilidade de retirar uma bola preta e duas brancas.

$P(X=2)=\dfrac{{}^2C_2\times{}^3C_1}{{}^5C_3}=\dfrac{1\times3}{10}=\dfrac{3}{10}=0{,}3$, em que $P(X=2)$ designa a probabilidade de retirar duas bolas pretas e uma branca.

24.2. $\mu=0\times0{,}1+1\times0{,}6+2\times0{,}3=1{,}2$

24.3. $P(X=0\mid X<\mu)=\dfrac{P(X=0)}{P(X=0)+P(X=1)}=$

$=\dfrac{0{,}1}{0{,}1+0{,}6}=\dfrac{0{,}1}{0{,}7}=\dfrac{1}{7}$

Números complexos

Pág. 220

1. $z=\dfrac{(2-\mathrm{i})^2+4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}+3\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}}+8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

$=\dfrac{4-4\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+4\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)+3\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}}+8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

$=\dfrac{4-4\mathrm{i}-1+4(0+\mathrm{i}\times1)+3\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}}+8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

$=\dfrac{3-\cancel{4\mathrm{i}}+\cancel{4\mathrm{i}}+3\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}}+8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

$=\dfrac{3+3\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}}+8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

$=\dfrac{\cancel{3}\left(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)}{\cancel{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}}+8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

$=\dfrac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}}+8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)}+8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{12}}+8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=$

$=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}+8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=10\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=10\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=$

$=10\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=5\sqrt{2}+5\sqrt{2}\,\mathrm{i}$

C.A. Seja $z=1+\sqrt{3}i$

$|z|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$

Seja θ o argumento de z

$\begin{cases}\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}\\ \left(1,\sqrt{3}\right)\in 1.^{\text{o}}\text{Q.}\end{cases}\Rightarrow \arg(z)=\dfrac{\pi}{3}$

$z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

2. $\dfrac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}-4k\mathrm{i}^{13}}{\mathrm{i}-\sqrt{3}}=\dfrac{2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)-4k\mathrm{i}^{13}}{\mathrm{i}-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{2\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right]-4k\,\mathrm{i}^{13}}{\mathrm{i}-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{2\left(-\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)-4k\mathrm{i}}{\mathrm{i}-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\frac{1}{2}\right)-4k\mathrm{i}}{\mathrm{i}-\sqrt{3}}$

C.A. $\begin{array}{r|l}14 & 4\\ 1 & 3\end{array}$ $\mathrm{i}^{13}=\mathrm{i}^1=\mathrm{i}$

$=\dfrac{-\sqrt{3}+\mathrm{i}-4k\mathrm{i}}{\mathrm{i}-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}-4k\mathrm{i}\right)\left(-\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)}{\left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)\left(-\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)}$

$=\dfrac{3+\cancel{\sqrt{3}\,\mathrm{i}}-\cancel{\sqrt{3}\,\mathrm{i}}-\mathrm{i}^2+4\sqrt{3}k\mathrm{i}+4k\mathrm{i}^2}{3-\mathrm{i}^2}$

$=\dfrac{3+1+4\sqrt{3}k\mathrm{i}-4k}{3-(-1)}$

$=\dfrac{4-4k+4\sqrt{3}k\mathrm{i}}{4}$

$=1-k+\sqrt{3}k\mathrm{i}$

Para a expressão designar um imaginário puro,

$1-k=0\wedge\sqrt{3}k\neq0$

$\Leftrightarrow k=1\wedge k\neq0$

$\Leftrightarrow k=1$

3. $z_1=-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\ ;\ z_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$

3.1. Seja $P(x)=x^2+bx+c$.

$P(z_1)=0\Leftrightarrow\left(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^2+b\left(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)+c=0$

MMA12DR © Porto Editora

MMA12DR © Porto Editora

$\Leftrightarrow 1-2\sqrt{3}\,\mathrm{i}+\left(\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^2-b+\sqrt{3}b\mathrm{i}+c=0$

$\Leftrightarrow 1-2\sqrt{3}\,\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2-b+\sqrt{3}b\mathrm{i}+c=0$

$\Leftrightarrow 1-2\sqrt{3}\,\mathrm{i}-3-b+\sqrt{3}b\mathrm{i}+c=0$

$\Leftrightarrow 1-3-b+c-2\sqrt{3}\,\mathrm{i}+\sqrt{3}b\mathrm{i}=0$

$\Leftrightarrow -2-b+c+\mathrm{i}\left(-2\sqrt{3}+\sqrt{3}b\right)=0$

$\Leftrightarrow -2-b+c=0\wedge -2\sqrt{3}+\sqrt{3}b=0$

$\Leftrightarrow c=2+b\wedge \sqrt{3}b=2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow c=2+b\wedge b=2$

$\Leftrightarrow c=2+2\wedge b=2$

$\Leftrightarrow c=4\wedge b=2$

3.2. $\overline{z_2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\alpha)}$

$\dfrac{z_1}{\overline{z_2}}=\dfrac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3}\right)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\alpha)}}=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3}-(-\alpha)\right)}=\dfrac{1}{2}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)}$

C.A.

Seja $z_1=-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

$|z_1|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$

Seja θ o argumento de z_1

$\begin{cases}\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}\\ \left(-1,\sqrt{3}\right)\in 2.^{\circ}\,\mathrm{Q}.\end{cases}\Rightarrow \arg(z)=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$

$z_1=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$

Para $\dfrac{z_1}{\overline{z_2}}$ ser um imaginário puro de coeficiente negativo,

$\dfrac{2\pi}{3}+\alpha=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \alpha=-\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \alpha=-\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Se $k=0$, $\alpha=-\dfrac{7\pi}{6}$; $-\dfrac{7\pi}{6}\notin[-\pi,\pi[$

Se $k=1$, $\alpha=-\dfrac{7\pi}{6}+2\pi=\dfrac{5\pi}{6}$; $\dfrac{5\pi}{6}\in[-\pi,\pi[$

$\alpha=\dfrac{5\pi}{6}$

4. $w=\dfrac{\sqrt{2}\,\mathrm{i}-\sqrt{2}}{-\sqrt{3}-\mathrm{i}}$

4.1. Seja $z_1=\sqrt{2}\,\mathrm{i}-\sqrt{2}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\mathrm{i}$

$|z_1|=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2}^2}=2$

Seja θ_1 o argumento de z_1

$\begin{cases}\tan\theta_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1\\ \left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\in 2.^{\circ}\,\mathrm{Q}.\end{cases}\Rightarrow \arg(z_1)=\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$

$z_1=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

Seja $z_2=-\sqrt{3}-\mathrm{i}$

$|z_2|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2$

Seja θ_2 o argumento de z_2

$\begin{cases}\tan\theta_2=\dfrac{-1}{-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ \left(-\sqrt{3},-1\right)\in 3.^{\circ}\,\mathrm{Q}.\end{cases}\Rightarrow \arg(z_2)=\pi+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{7\pi}{6}$

$z_2=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$

$w=\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{7\pi}{6}\right)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{9\pi}{12}-\frac{14\pi}{12}\right)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}$

4.2. $w^n=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}\right)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{-5n\pi}{12}\right)}$

Para o afixo de w^n se situar no semieixo real positivo,

$-\dfrac{5n\pi}{12}=0+2k\pi\Leftrightarrow -5n\pi=24k\pi$

$\Leftrightarrow n=\dfrac{24k\cancel{\pi}}{-5\cancel{\pi}}\Leftrightarrow n=\dfrac{24k}{-5}$

O menor valor de n ocorre quando $k=-5$.

Se $k=-5$, $n=\dfrac{24\times(-5)}{-5}\Leftrightarrow n=24$.

5. $z_1=1+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$; $z_2=1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

5.1. $z_1=1+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}=1+2\mathrm{i}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$

$=1+2\mathrm{i}\left[\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

$=1+2\mathrm{i}\left(-\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=1+2\mathrm{i}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right)$

$=1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}+\mathrm{i}^2$

$=1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}-1=-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

$w=\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{-\sqrt{3}\,\mathrm{i}\left(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)\left(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)}=\dfrac{-\sqrt{3}\,\mathrm{i}+\left(\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^2}{1-\left(\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^2}$

$=\dfrac{-\sqrt{3}\,\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2}{1-3\mathrm{i}^2}=\dfrac{-3-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{1+3}=-\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$

$w=-\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$

$|w|=\sqrt{\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{9}{16}+\dfrac{3}{16}}=\dfrac{\sqrt{12}}{4}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Seja θ o argumento de w.

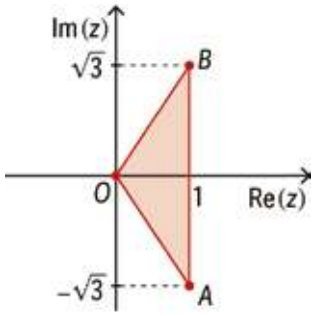
$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{4}}{-\frac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \left(-\dfrac{3}{4}, -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) \in 3.^{o}\,Q. \end{cases} \Rightarrow \arg(w) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

$$= \frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$$

$$w = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$$

5.2. $z_2 = 1 + \sqrt{3}\,i$

$z = \overline{z_2} = 1 - \sqrt{3}\,i$



C.A.

$|z_2| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$

$|w| = \left|\overline{z_2}\right| = 2$

$\overline{OA} = \overline{OB} = 2$

$\overline{AB} = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$P = 2 + 2 + 2\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}$

$P = \left(4 + 2\sqrt{3}\right)$ u.c.

6. $(1+i)\,z^3 = 8\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

$$\Leftrightarrow (1+i)\,z^3 = 8\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow (1+i)\,z^3 = 8\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow (1+i)\,z^3 = 8\frac{\sqrt{4}}{2} - \frac{8\sqrt{4}}{2}i$$

$$\Leftrightarrow (1+i)\,z^3 = 8 - 8i$$

$$\Leftrightarrow z^3 = \frac{8-8i}{1+i}$$

$$\Leftrightarrow z^3 = \frac{(8-8i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$\Leftrightarrow z^3 = \frac{8-8i-8i+8i^2}{1-i^2}$$

$$\Leftrightarrow z^3 = \frac{\cancel{8} - 16i - \cancel{8}}{1-(-1)}$$

C.A. Seja $z = -8i$

$|z| = 8$

$\arg(z) = -\dfrac{\pi}{2}$

$z = 8e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

$$\Leftrightarrow z^3 = \frac{-16i}{2} \Leftrightarrow z^3 = -8i \Leftrightarrow z^3 = 8e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8}e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{2}}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)},\ k = 0,1,2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$$

Se $k = 0$, $z_0 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

Se $k = 1$, $z_1 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

Se $k = 2$, $z_2 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$

A solução da equação cujo afixo pertence ao terceiro quadrante é z_2.

$$z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$= 2\left[\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 2\left[-\cos\frac{\pi}{6} + i\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= -\sqrt{3} - i$$

7. $w_1 = (-1-i) \times i^{11}$; $w_2 = \sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

7.1. $w_1 = (-1-i) \times i^{11}$

$= (-1-i) \times i^3$

C.A.

$11 \;\; \underline{|4}$

$3 \;\; 2$

$|w_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Seja θ_1 um argumento de w_1

$$\begin{cases} \tan\theta_1 = \dfrac{1}{-1} = 1 \\ (-1,1) \in 2.^{o}\,Q \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$= (-1-i) \times (-i) =$

$= i + i^2 = -1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3}{4}\pi}$

$$w_2{}^3 = \left(\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3 = \sqrt[6]{2}^3\,e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}} = w_1$$

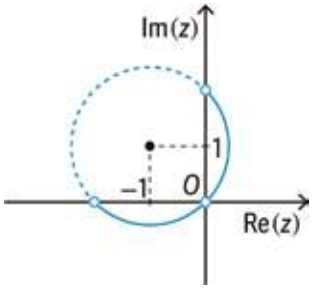
Seja $w_2{}^3 = w_1$, conclui-se que w_2 é uma raiz cúbica de w_1.

MMA12DR © Porto Editora

7.2. $|w_1| = \sqrt{2}$

Circunferência de centro no afixo de w_1 e que passa na origem do referencial:

$|z - w_1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z - (-1+i)| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z + 1 - i| = \sqrt{2}$



Condição que define a parte da circunferência que não está contida no segundo quadrante

$|z - (-1+\mathrm{i})| = \sqrt{2} \wedge (\operatorname{Im} z < 0 \vee \operatorname{Re} z > 0)$

8. $z = -8 + 8\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

8.1. $|z| = \sqrt{(-8)^2 + \left(8\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{64 + 192} = \sqrt{256} = 16$

Seja θ um argumento de z:

$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{8\sqrt{3}}{-8} = -\sqrt{3} \\ \left(-8, 8\sqrt{3}\right) \in 2.^{\circ}\,\mathrm{Q}. \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$z = 16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

Seja *w* uma raiz quarta de z,

$w = \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}} = \sqrt[4]{16}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}}$, $k \in \{0,1,2,3\}$

$= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi+6k\pi}{12}\right)}$, $k \in \{0,1,2,3\}$

Se $k = 0$, $w_0 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{3} + \mathrm{i}$

Se $k = 1$, $w_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$= 2\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= 2\left(-\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$

Se $k = 2$, $w_2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

$= 2\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= 2\left(-\cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$

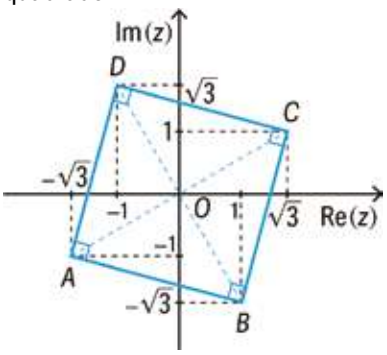
Se $k = 3$, $w_3 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

$= 2\left(\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = 1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$

As raízes quartas de z são $\sqrt{3} + \mathrm{i}$, $-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$, $-\sqrt{3} - \mathrm{i}$ e $1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

8.2. O polígono cujos vértices são as raízes quartas de z é um quadrado centrado na origem do referencial. Sejam *A*, *B*, *C* e *D* os vértices desse quadrado.



$\overline{AC} = 2|w| = 2 \times 2 = 4$

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 + \overline{AB}^2 = 4^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\overline{AB}^2 = 16 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 8$

$A_{[ABCD]} = \overline{AB}^2 = 8$ u.a.

9.1. Sejam z_2, z_3 e z_4 os números complexos cujos afixos são os pontos *B*, *C* e *D*, respetivamente.

$z_3 = -z_1 = -\left(\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,\mathrm{i}\right) = -\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,\mathrm{i}$

$C\left(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right)$

B é imagem de *A* por uma rotação de centro em *O* e ângulos de amplitude $\frac{\pi}{2}$.

Então, $z_2 = z_1 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \left(\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,\mathrm{i}\right) \times \mathrm{i} =$

$= \sqrt{2}\,\mathrm{i} + 2\sqrt{2}\,\mathrm{i}^2 = -2\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{i}$

$B\left(-2\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

$z_4 = -z_2 = -\left(-2\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{i}\right) = 2\sqrt{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{i}$

$D\left(2\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$

$B\left(-2\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $C\left(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right)$ e $D\left(2\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$

9.2. raio= $|z_1| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2+8} = \sqrt{10}$

Centro $0 + 0\,\mathrm{i}$

Circunferência: $|z| = \sqrt{10}$

MMA12DR © Porto Editora

9.3. $A_{\odot} = \pi \times r^2 = \pi \times \sqrt{10}^2 = 10\pi$

$\overline{AC} = 2|z_1| = 2\sqrt{10}$

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 + \overline{AB}^2 = \left(2\sqrt{10}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\overline{AB}^2 = 40 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 20$

$A_{[ABCD]} = \overline{AB}^2 = 20$

Área da região do plano interior à circunferência e exterior ao quadrado =

$= A_{\odot} - A_{[ABCD]} = (10\pi - 20)$ u.a.

10. $z_1 = 2e^{i\frac{4\pi}{5}}$; $z_2 = \overline{z_1}$

10.1. Se $z_2 = \overline{z_1}$, então $|z_2| = |\overline{z_1}| = |z_1|$.

Ou seja, os afixos de z_1 e z_2 estão à mesma distância da origem, isto é, são pontos de uma circunferência de centro na origem do referencial. Se são vértices de um polígono regular de n lados, então são raízes de índice n do mesmo número complexo.

$z_2 = \overline{z_1} = \overline{2e^{i\frac{4\pi}{5}}} = 2e^{i\left(-\frac{4\pi}{5}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{4\pi}{5}+2\pi\right)} = 2e^{i\frac{6\pi}{5}}$

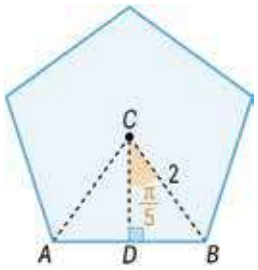
Os argumentos das *n* raízes estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$.

Assim, $\frac{6\pi}{5} - \frac{4\pi}{5} = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{5} = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow n = 5$

$z = z_1^5 = \left(2e^{i\frac{4\pi}{5}}\right)^5 = 32e^{i4\pi} = 32$

$n = 5$ e $z = 32$

10.2. O polígono é um pentágono regular.
Considere-se a figura.



$\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\overline{DB}}{2} \Leftrightarrow \overline{DB} = 2\sin\frac{\pi}{5}$

$\overline{AB} = 2 \times 2\sin\frac{\pi}{5} = 4\sin\frac{\pi}{5}$

Perímetro do pentágono = $5 \times \overline{AB} = 5 \times 4\sin\frac{\pi}{5}$

$= 20\sin\frac{\pi}{5} \approx 11{,}76$ u.c.

11. $z_1 = -\frac{2}{i}$; $z_2 = \frac{7+i}{3-i}$

$w = k\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$z_1 = \frac{-2}{i} = \frac{-2(-i)}{i(-i)} = \frac{2i}{-i^2} = 2i$

$z_2 = \frac{7+i}{3-i} = \frac{(7+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{21+7i+3i+i^2}{3^2-i^2}$

$= \frac{21+10i-1}{9+1} = \frac{20+10i}{10} = 2+i$

$w = k\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = k\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= k\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = k + ki$

$|w - z_2| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow |k + ki - (2+i)| = |2i - (2+i)|$

$\Leftrightarrow |(k-2) + (k-1)i| = |-2+i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(k-2)^2 + (k-1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2}$

$\Leftrightarrow (k-2)^2 + (k-1)^2 = 5$

$\Leftrightarrow k^2 - 4k + 4 + k^2 - 2k + 1 = 5$

$\Leftrightarrow 2k^2 - 6k = 0$

$\Leftrightarrow 2k(k-3) = 0$

$\Leftrightarrow 2k = 0 \vee k - 3 = 0$

$\Leftrightarrow k = 0 \vee k = 3$

Como $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k = 3$.

Então, $w = 3 + 3i$.

12. $z = \sqrt{2}e^{i\theta}, \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

$z^2 - 4z\overline{z} + 8 = -2i$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}e^{i\theta}\right)^2 - 4|z|^2 + 8 = -2i$

$\Leftrightarrow 2e^{i(2\theta)} - 4\sqrt{2}^2 + 8 = -2i$

$\Leftrightarrow 2e^{i(2\theta)} - 8 + 8 = -2i$

$\Leftrightarrow 2e^{i2\theta} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

$\Leftrightarrow 2\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$k = 0 \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} \notin \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

$k = 1 \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4} \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

Logo, $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

MMA12DR © Porto Editora