Questões para preparar o exame

Primitivas imediatas e integrais definidos

Pág. 166

1.1. $\int k\,\mathrm{d}x = kx + C, C \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$

1.2. $\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}$

1.3. $\int x^5\,\mathrm{d}x = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C,\ C \in \mathbb{R}$

1.4. $\int x^{-3}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C,\ C \in \mathbb{R}$

1.5. $\int x^{-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}, x \neq 0$

1.6. $\int \left(2x^2\right)^3\,\mathrm{d}x = \int 8x^6\,\mathrm{d}x = 8\int x^6\,\mathrm{d}x = 8\frac{x^{6+1}}{6+1} + C =$

$= \frac{8x^7}{7} + C,\ C \in \mathbb{R}$

1.7. $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C,\ C \in \mathbb{R}$

1.8. $\int -\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = -\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x + C,\ C \in \mathbb{R}$

1.9. $\int 2\sin x\,\mathrm{d}x = 2\int \sin x\,\mathrm{d}x = 2(-\cos x) + C =$

$= -2\cos x + C,\ C \in \mathbb{R}$

1.10. $\int \pi\cos x\,\mathrm{d}x = \pi\int \cos x\,\mathrm{d}x = \pi\sin x + C,\ C \in \mathbb{R}$

2. $(\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0$

$\left(\ln(-x)\right)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}, x < 0$

Se $x > 0$: $\ln|x| = \ln x$ e $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Se $x < 0$: $\ln|x| = \ln(-x)$ e $\left(\ln(-x)\right)' = \frac{1}{x}$

Logo, $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}, x \neq 0$

Logo, $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R},\ x \neq 0$

3.1. $\int \left(2^x \ln 2\right)\mathrm{d}x = 2^x + C,\ C \in \mathbb{R}$

Vamos derivar o segundo membro da igualdade:

$\left(2^x + C\right)' = 2^x \ln 2 + 0 = 2^x \ln 2$

Logo, a igualdade é verdadeira.

3.2. $\int \sin(1-3x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cos(1-3x) + C, C \in \mathbb{R}$

Vamos derivar o segundo membro da igualdade:

$\left(\frac{1}{3}\cos(1-3x) + C\right)' = \frac{1}{3}\left[-(1-3x)'\sin(1-3x)\right] + 0 =$

$= \frac{1}{3}\left(-(-3)\sin(1-3x)\right) = \sin(1-3x)$

Logo, a igualdade é verdadeira.

3.3. $\int \cos(1+3x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin(1+3x) + C,\ C \in \mathbb{R}$

Vamos derivar o segundo membro da igualdade:

$\left[\frac{1}{3}\sin(1+3x) + C\right]' = \frac{1}{3} \times (1+3x)'\cos(1+3x) =$

$= \frac{1}{3} \times 3\cos(1+3x) = \cos(1+3x)$

Logo, a igualdade é verdadeira.

3.4. $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C,\ C \in \mathbb{R}$

Vamos derivar o segundo membro da igualdade:

$\left(x\ln x - x + C\right)' = x'\ln x + x(\ln x)' - 1 + 0 =$

$= \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$

Logo, a igualdade é verdadeira.

4.1. $\int \left(3x^2 + 3x - 1\right)\mathrm{d}x = 3\int x^2\,\mathrm{d}x + 3\int x\,\mathrm{d}x - \int 1\mathrm{d}x =$

$= \frac{3x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x + C = x^3 + \frac{3x^2}{2} - x + C,\ C \in \mathbb{R}$

4.2. $\int \left(-x^2 - 2x + 7\right)\mathrm{d}x = \int -x^2\,dx - \int 2x\,\mathrm{d}x + \int 7\,\mathrm{d}x =$

$= -\int x^2\,\mathrm{d}x - 2\int x\,\mathrm{d}x + 7x + C =$

$= \frac{-x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 7x + C =$

$= \frac{-x^3}{3} - x^2 + 7x + C,\ C \in \mathbb{R}$

4.3. $\int \left(\frac{1}{2} - x + x^2\right)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\mathrm{d}x - \int x\,\mathrm{d}x + \int x^2\,\mathrm{d}x =$

$= \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C,\ C \in \mathbb{R}$

4.4. $\int \left(4x^2 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int 4x^2\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x =$

$= 4\int x^2\,\mathrm{d}x - \ln|x| + C = \frac{4x^3}{3} - \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}$

4.5. $\int \left(\frac{1}{3x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3x}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x =$

$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int x^{-2}\,\mathrm{d}x =$

$= \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C =$

$= \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{x^{-1}}{-1} + C =$

$= \frac{1}{3}\ln|x| + \frac{1}{x} + C,\ C \in \mathbb{R}$

4.6. $\int \left(\frac{1}{x} - \mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x =$

$= \ln|x| - \mathrm{e}^x + C,\ C \in \mathbb{R}$

4.7. $\int (2x - \cos x)\,\mathrm{d}x = \int (2x)\,\mathrm{d}x - \int \cos x\,\mathrm{d}x =$

$= 2\int x\,\mathrm{d}x - \sin x + C = \frac{2x^2}{2} - \sin x + C =$

$= x^2 - \sin x + C,\ C \in \mathbb{R}$

MMA12DRAC © Porto Editora

4.8. $\int \left(\sin x - e^x\right) dx = \int \sin x\, dx - \int e^x\, dx =$

$= -\cos x - e^x + C,\ C \in \mathbb{R}$

5. $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} - 2$

$F(x) = \int \left(3x^2 + \frac{1}{x} - 2\right) dx =$

$= \int 3x^2\, dx + \int \frac{1}{x} dx - \int 2\, dx =$

$= 3\int x^2\, dx + \ln|x| - 2x + C =$

$\overset{(x \in \mathbb{R}^+)}{=} \frac{3x^3}{3} + \ln x - 2x + C =$

$= x^3 + \ln x - 2x + C,\ C \in \mathbb{R}$

$F(x) = x^3 + \ln x - 2x + C$

$e^3 + e = e^3 + \ln e - 2e + C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e = 1 - 2e + C \Leftrightarrow 3e - 1 = C$

$F(x) = x^3 + \ln x - 2x + 3e - 1$

Pág. 167

6.1. A área da região colorida é dada por:

$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2}\right) dx =$

$= \left[\frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{2^3}{6} - \frac{0^3}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

A medida da área é $\frac{4}{3}$ u.a.

6.2. Comecemos por determinar os zeros da função f:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times (-1) \times 6}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{-2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$

A área da região colorida é dada por:

$\int_{-3}^2 f(x) dx = \int_{-3}^2 \left(-x^2 - x + 6\right) dx =$

$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-3}^2 =$

$= -\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} + 6 \times 2 - \left[-\frac{(-3)^3}{3} - \frac{(-3)^2}{2} + 6 \times (-3)\right] =$

$= -\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 12 - \left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2} - 18\right) =$

$= -\frac{8}{3} - 2 + 12 - 9 + \frac{9}{2} + 18 =$

$= -\frac{8}{3} + 19 + \frac{9}{2} = -\frac{16}{6} + \frac{114}{6} + \frac{27}{6} = \frac{125}{6}$

A medida da área é $\frac{125}{6}$ u.a.

6.3. A área da região colorida é dada por:

$\int_0^{\ln 2} f(x) = \int_0^{\ln 2} e^x = \left[e^x\right]_0^{\ln 2} =$

$= e^{\ln 2} - e^0 = 2 - 1 = 1$

A medida da área é 1 u.a.

6.4. Comecemos por determinar o zero da função f:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$x^3 = -1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-1} \Leftrightarrow x = -1$

A área da região colorida é dada por:

$\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^2 \left(x^3 + 1\right) dx =$

$= \left[\frac{x^4}{4} + x\right]_{-1}^2 = \frac{2^4}{4} + 2 - \left[\frac{(-1)^4}{4} + (-1)\right] =$

$= 4 + 2 - \left(\frac{1}{4} - 1\right) = 6 - \frac{1}{4} + 1 = \frac{27}{4}$

A medida da área é $\frac{27}{4}$ u.a.

6.5. Comecemos por determinar as abcissas dos pontos de interseção dos gráficos das funções f e g:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 3x = -x + 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times (-1) \times (-3)}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 2}{-2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1$

$f(x) \geq g(x)$ para $x \in [1, 3]$.

A área da região colorida é dada por:

$\int_1^3 \left[-x^2 + 3x - (-x + 3)\right] dx =$

$= \int_1^3 \left[-x^2 + 3x + x - 3\right] dx = \int_1^3 \left[-x^2 + 4x - 3\right] dx =$

$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 3x\right]_1^3 =$

$= \frac{-3^3}{3} + \frac{4 \times 3^2}{2} - 3 \times 3 - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{4 \times 1^2}{2} - 3 \times 1\right) =$

$= -9 + 18 - 9 + \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3}$

A medida da área é $\frac{4}{3}$ u.a.

6.6. Comecemos por determinar as abcissas dos pontos de interseção dos gráficos das funções f e g que, neste caso, são os zeros comuns de f e g:

$g(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times (-1) \times 2}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{-2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$

MMA12DRAC © Porto Editora

$f(x) \geq g(x)$ para $x \in [-2, 1]$.

A área da região colorida é dada por:

$$\int_{-2}^{1}\left[x^3 - 2x^2 - 5x + 6 - \left(-x^2 - x + 2\right)\right]dx =$$

$$= \int_{-2}^{1}\left[x^3 - 2x^2 - 5x + 6 + x^2 + x - 2\right]dx =$$

$$= \int_{-2}^{1}\left[x^3 - x^2 - 4x + 4\right]dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - 2 + 4 - \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{(-2)^3}{3} - 2(-2)^2 + 4(-2)\right] =$$

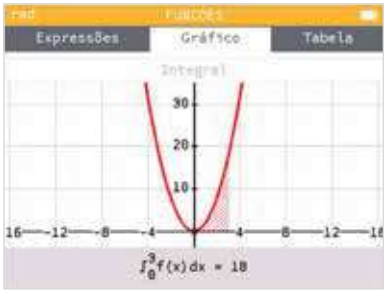
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - 2 + 4 - \left(4 + \frac{8}{3} - 8 - 8\right) =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 2 - 4 - \frac{8}{3} + 8 + 8 =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{8}{3} + 14 = \frac{45}{4}$$

A medida da área é $\frac{45}{4}$ u.a.

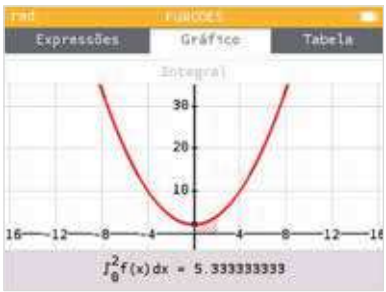
7.1. $\int_0^3 2x^2\,dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{2\times 3^3}{3} - 0 = 18$



A medida da área é 18 u.a.

7.2. $\int_0^2\left(\frac{x^2}{2} + 2\right)dx = \left[\frac{x^3}{2\times 3} + 2x\right]_0^2 = \left[\frac{x^3}{6} + 2x\right]_0^2 =$

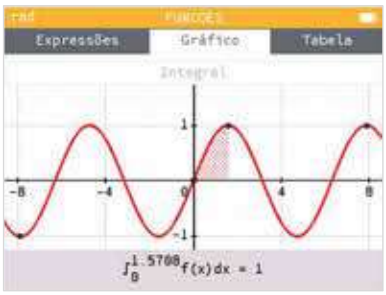
$$= \frac{2^3}{6} + 2\times 2 + 0 = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3}$$



A medida da área é $\frac{16}{3}$ u.a.

7.3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$$= -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 0 + 1 = 1$$



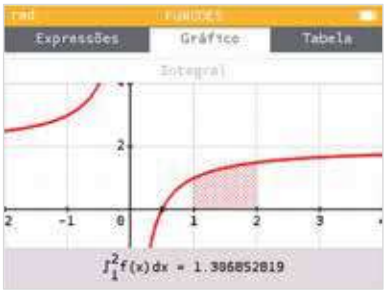
A medida da área é 1 u.a.

7.4. $\int_1^2\left(2 - x^{-1}\right)dx = \int_1^2\left(2 - \frac{1}{x}\right)dx =$

$$= \left[2x - \ln|x|\right]_1^2 =$$

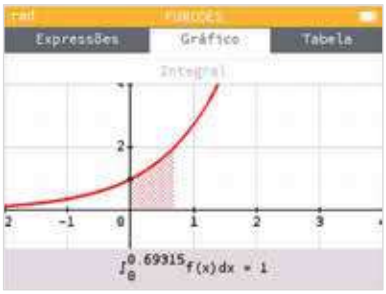
$$= 2\times 2 - \ln|2| - \left(2\times 1 - \ln|1|\right) = 4 - \ln 2 - 2 + 0 =$$

$$= 2 - \ln 2$$



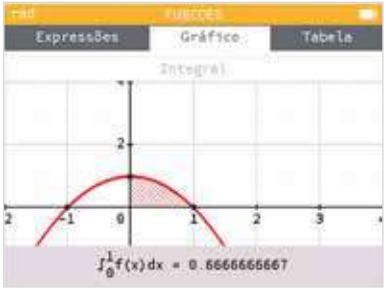
A medida da área é $(2 - \ln 2)$ u.a.

7.5. $\int_0^{\ln 2} e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^0 = 2 - 1 = 1$



A medida da área é 1 u.a.

7.6. $\int_0^1 1\,dx - \int_0^1 x^2\,dx = \left[x\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$



A medida da área é $\frac{2}{3}$ u.a.

MMA12DRAC © Porto Editora

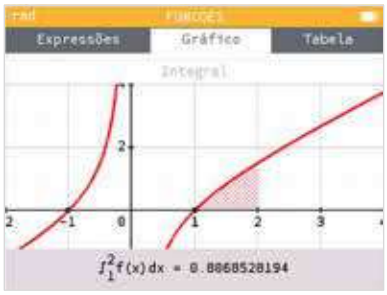
7.7. $\int_0^2 x\,dx - \int_0^1 x\,dx - \int_1^2 \frac{1}{x}dx =$

$= \cancel{\int_0^1 x\,dx} + \int_1^2 x\,dx - \cancel{\int_0^1 x\,dx} - \int_1^2 \frac{1}{x}dx =$

$= \int_1^2 x\,dx - \int_1^2 \frac{1}{x}dx = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)dx =$

$= \left[\frac{x^2}{2} - \ln|x|\right]_1^2 = \frac{2^2}{2} - \ln|2| - \left(\frac{1^2}{2} - \ln|1|\right) =$

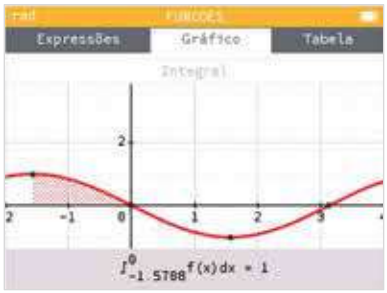
$= 2 - \ln 2 - \frac{1}{2} + \ln 1 = \frac{3}{2} - \ln 2 + 0 = \frac{3}{2} - \ln 2$



A medida da área é $\left(\frac{3}{2} - \ln 2\right)$ u.a.

7.8. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 -\sin x\,dx = \left[\cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 =$

$= \cos 0 - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 = 1$



A medida da área é 1 u.a.

8.1. Comecemos por determinar as abcissas dos pontos de interseção dos gráficos das funções f e g:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = \frac{x}{4} \Leftrightarrow 4x^2 - x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(4x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{4}$

$f(x) \geq g(x)$ para $x \in \left[\frac{1}{4}, 2\right]$

A área da região colorida é dada por:

$\int_{\frac{1}{4}}^2 \left(x^2 - \frac{x}{4}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{8}\right]_{\frac{1}{4}}^2 =$

$= \frac{8}{3} - \frac{4}{8} - \left(\frac{1}{192} - \frac{1}{128}\right) =$

$= \frac{8}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{192} + \frac{1}{128} = \frac{833}{384}$

A medida da área é $\frac{833}{384}$ u.a.

8.2. O zero de f no intervalo $[0,\pi]$ é $\frac{\pi}{2}$.

Os zeros de g no intervalo $[0,\pi]$ são 0 e π.

Vamos determinar o ponto de interseção das funções f e g no intervalo $[0,\pi]$.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$f(x) \geq g(x)$ para $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

A área da região colorida é dada por:

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx =$

$= \left[\sin x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$

$= \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - (\sin 0 + \cos 0) + \left[-\cos\pi - \left(-\cos\frac{\pi}{2}\right)\right] =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 - (-1) + 0 = \sqrt{2} - 1 + 1 = \sqrt{2}$

A medida da área é $\sqrt{2}$ u.a.

8.3. A área da região colorida é dada por:

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$

$= -\cos\frac{\pi}{6} - (-\cos 0) + \left[-\cos\pi - \left(-\cos\frac{\pi}{2}\right)\right] =$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \left(-(-1) + 0\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2$

A medida da área é $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right)$ u.a.

MMA12DRAC © Porto Editora

Matrizes

Pág. 168

1.

$$A=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

Seja $X=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}$

$$-2A+X=B \Leftrightarrow -2\times\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}4 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}4+x_{11} & 2+x_{12}\\ x_{21} & -2+x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4+x_{11}=1\\ 2+x_{12}=-1\\ x_{21}=2\\ -2+x_{22}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{11}=-3\\ x_{12}=-3\\ x_{21}=2\\ x_{22}=2\end{cases}$$

$$X=\begin{bmatrix}-3 & -3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

2.

$$A=\begin{bmatrix}\ln x & -2\\ \log_2 4 & -\log 10\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}1 & \log_2\frac{1}{4}\\ -y & -1\end{bmatrix}$$

$$A=B\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\ln x & -2\\ \log_2 4 & -\log 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \log_2\frac{1}{4}\\ -y & -1\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\ln x & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \log_2\frac{1}{4}\\ -y & -1\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\ln x=1\\ -2=\log_2\frac{1}{4}\\ 2=-y\\ -1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\mathrm{e}\\ -2=\log_2\frac{1}{4}\\ y=-2\\ -1=-1\end{cases}$$

3.

$$\begin{bmatrix}-3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17 & 1 & -7\\ -4 & 4 & -2\\ -5 & 2 & -4\end{bmatrix}$$

Cálculos:

$a_{12}=-3\times0+0\times1+1\times1=1$

$a_{22}=2\times0+1\times1+3\times1=4$

$a_{23}=2\times2+1\times(-3)+3\times(-1)=-2$

$a_{31}=1\times(-5)+2\times0+0\times2=-5$

4.

$$D=\begin{bmatrix}100 & 50 & 20\\ 60 & 30 & 45\\ 40 & 55 & 55\end{bmatrix};\ S=\begin{bmatrix}20 & 45 & 60\\ 25 & 25 & 10\\ 40 & 10 & 15\end{bmatrix};$$

$$P=\begin{bmatrix}2{,}25\\ 2{,}50\\ 3{,}20\end{bmatrix}$$

4.1.

$$SP=\begin{bmatrix}20 & 45 & 60\\ 25 & 25 & 10\\ 40 & 10 & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2{,}25\\ 2{,}50\\ 3{,}20\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}20\times2{,}25+45\times2{,}50+60\times3{,}20\\ 25\times2{,}25+25\times2{,}50+10\times3{,}20\\ 40\times2{,}25+10\times2{,}50+15\times3{,}20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}349{,}50\\ 150{,}75\\ 163\end{bmatrix}$$

Cada elemento corresponde ao total faturado, em euros, por cada amigo no sábado.

A Marta faturou $349{,}50\,€$, o Afonso faturou $150{,}75\,€$ e o João faturou $163\,€$.

4.2.

$$DP=\begin{bmatrix}100 & 50 & 20\\ 60 & 30 & 45\\ 40 & 55 & 55\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2{,}25\\ 2{,}50\\ 3{,}20\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}100\times2{,}25+50\times2{,}50+20\times3{,}20\\ 60\times2{,}25+30\times2{,}50+45\times3{,}20\\ 40\times2{,}25+55\times2{,}50+55\times3{,}20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}414\\ 354\\ 403{,}50\end{bmatrix}$$

Cada elemento corresponde ao total faturado, em euros, por cada amigo no domingo.

No domingo, a Marta faturou $414\,€$, o Afonso faturou $354\,€$ e o João faturou $403{,}50\,€$.

4.3.

$$S+D=\begin{bmatrix}20 & 45 & 60\\ 25 & 25 & 10\\ 40 & 10 & 15\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}100 & 50 & 20\\ 60 & 30 & 45\\ 40 & 55 & 55\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}20+100 & 45+50 & 60+20\\ 25+60 & 25+30 & 10+45\\ 40+40 & 10+55 & 15+55\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}120 & 95 & 80\\ 85 & 55 & 55\\ 80 & 65 & 70\end{bmatrix}$$

Cada elemento corresponde ao total de vendas, em euros, de cada sumo que cada amigo vendeu no fim de semana.

4.4.

$$(S+D)P=\begin{bmatrix}120 & 95 & 80\\ 85 & 55 & 55\\ 80 & 65 & 70\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2{,}25\\ 2{,}50\\ 3{,}20\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}120\times2{,}25+95\times2{,}50+80\times3{,}20\\ 85\times2{,}25+55\times2{,}50+55\times3{,}20\\ 80\times2{,}25+65\times2{,}50+70\times3{,}20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}763{,}50\\ 504{,}75\\ 566{,}50\end{bmatrix}$$

Cada elemento corresponde à receita obtida, em euros, por cada amigo no fim de semana.

MMA12DRAC © Porto Editora

Pág. 169

5.1. a)

$$M=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ\\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{bmatrix}$$

A transformação geométrica obtida pela aplicação da matriz M é uma rotação de centro O e ângulo de amplitude igual a 45°.

b)

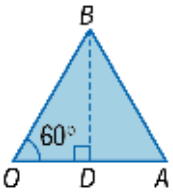
$$O':\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$O'(0,0)$

$$A':\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2-\frac{\sqrt{2}}{2}\times 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\times 2+\frac{\sqrt{2}}{2}\times 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$A'(\sqrt{2},\sqrt{2})$

$\overline{OB}=2$ e $A\hat{O}B=\frac{180^\circ}{3}=60^\circ$



Seja S o ponto médio de $[OA]$.

$$\sin 60^\circ=\frac{\overline{BD}}{2}\Leftrightarrow \overline{BD}=2\sin 60^\circ\Leftrightarrow \overline{BD}=2\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD}=\sqrt{3}$$

Então, $B(1,\sqrt{3})$

$$B':\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\times 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\times 3\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\times 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{3}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\end{bmatrix}$$

$$B'\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)$$

5.2. a) A transformação geométrica obtida pela aplicação da matriz C é um cisalhamento horizontal.

b) Sejam O'', A'' e B'' as imagens de O, A e B pela aplicação da matriz C.

$$O'':\begin{bmatrix}x''\\ y''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$O''(0,0)$

$$A'':\begin{bmatrix}x''\\ y''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times 2+a\times 0\\ 0\times 2+1\times 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}$$

$A''(2,0)$

$$B'':\begin{bmatrix}x''\\ y''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times 1+\sqrt{3}a\\ 0\times 1+1\times\sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\sqrt{3}a\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}$$

$B''(1+\sqrt{3}a,\sqrt{3})$

$$A_{[O''A''B'']}=\frac{\overline{O''A''}\times y_{B''}}{2}=\frac{2\times\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\text{ u.a.}$$

6. Transformação 1:

Trata-se de um alongamento horizontal de fator $2\,(4\times 2=8)$. A matriz da transformação é:

$$\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Transformação 2:

$4\times 1{,}5=6$

$5\times 1.5=7{,}5$

Trata-se de uma homotetia de centro O e razão $1{,}5$. A matriz da transformação é:

$$\begin{bmatrix}1{,}5 & 0\\ 0 & 1{,}5\end{bmatrix}$$

Transformação 3:

Trata-se de uma translação associada ao vetor $\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

Cada ponto da imagem é determinado pela soma:

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

Então, a matriz da transformação é: $\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$.

MMA12DRAC © Porto Editora

Introdução à inferência estatística

Pág. 170

1. $X \sim N(\mu, 8)$

1.1. $n = 40$

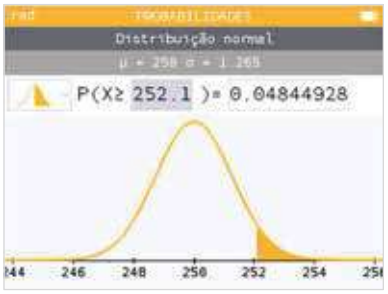
Como $n \geq 30$, o Teorema Limite Central garante que, aproximadamente:

$X \sim N\left(250, \frac{8}{\sqrt{40}}\right)$

Pretende-se determinar $P(\overline{X} > 252{,}1)$

Recorrendo à calculadora gráfica,

$P(\overline{X} > 252{,}1) \approx 0{,}048 = 4{,}8\%$



Opção (C)

1.2. $n = 40$

$\overline{x} = 252$

$\sigma = 8$

Nível de confiança: 95% . $z = 1{,}960$

Intervalo de confiança a 95% :

$$\left[\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] =$$

$$= \left[252 - 1{,}960 \times \frac{8}{\sqrt{40}}; 252 + 1{,}960 \times \frac{8}{\sqrt{40}}\right] =$$

$$= [249{,}52; 254{,}48]$$

2. $\hat{p} = \frac{0{,}34 + 0{,}46}{2} = 0{,}4$

Seja n o número de clientes que frequentam aulas de CrossFit.

$$\frac{n}{250} = 0{,}4 \Leftrightarrow n = 0{,}4 \times 250 = 100$$

Opção (B)

3. $n = 36$

Intervalo de confiança a 95% : $[482, 520]$

$$\overline{x} = \frac{482 + 520}{2} = 501$$

$$x + z \times \frac{s}{\sqrt{n}} = 520 \Leftrightarrow 501 + 1{,}960 \times \frac{s}{\sqrt{36}} = 520 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1{,}960\frac{s}{\sqrt{36}} = 19 \Leftrightarrow 1{,}960s = 114 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{114}{1{,}960} \Leftrightarrow s \approx 58$$

4. $\hat{p} = 0{,}35$

Nível de confiança: 95% . $z = 1{,}960$

Margem de erro: $E = \frac{0{,}20}{2} = 0{,}1$

Intervalo de confiança a 95% :

$$\left[\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] =$$

$$= \left[0{,}35 - 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}35(1-0{,}35)}{n}};\right.$$

$$\left. 0{,}35 + 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}35(1-0{,}35)}{n}}\right] =$$

$$= \left[0{,}35 - 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}2275}{n}}; 0{,}35 + 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}2275}{n}}\right]$$

$$E = 0{,}1 \Leftrightarrow 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}2275}{n}} = 0{,}1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{0{,}2275}{n}} = \frac{0{,}1}{1{,}960} \Leftrightarrow \frac{0{,}2275}{n} = \left(\frac{0{,}1}{1{,}960}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 0{,}2275\left(\frac{1{,}960}{0{,}1}\right)^2 \Leftrightarrow n = 87{,}3964$$

A dimensão mínima da amostra para que a amplitude do intervalo de confiança seja inferior a $0{,}20$ é de 88 clientes.

Pág. 171

5. $\overline{x} = 22$

$X \sim N(22, 5)$

$n = 100$

(A) Nível de confiança: 95% .

$z = 1{,}960$

Intervalo de confiança a 95% :

$$\left[\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] =$$

$$= \left[22 - 1{,}960 \times \frac{5}{\sqrt{100}}; 22 + 1{,}960 \times \frac{5}{\sqrt{100}}\right] =$$

$$= \left[22 - 1{,}960 \times \frac{1}{2}; 22 + 1{,}960 \times \frac{1}{2}\right] = [21{,}02; 22{,}98]$$

(A) $\rightarrow$ (1)

(B) Nível de confiança: 90% .

$z = 1{,}645$

$$E = z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \times \frac{5}{\sqrt{100}} = 1{,}645 \times \frac{1}{2} =$$

$$= 0{,}8225 \approx 0{,}82$$

(B) $\rightarrow$ (2)

MMA12DRAC © Porto Editora

MMA12DRAC © Porto Editora

(C) $E \leq 1$

Nível de confiança: 95% .

$z = 1{,}960$

$$E \leq 1 \Leftrightarrow z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 1 \Leftrightarrow 1{,}960 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9{,}8}{\sqrt{n}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{9{,}8} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 9{,}8 \Leftrightarrow n \geq 9{,}8^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \geq 96{,}04$$

(C) $\rightarrow$ (8)

6. Nível de confiança: 99% .

$z = 2{,}576$

Intervalo de confiança a 99% : $[0{,}67912; 0{,}76088]$

$$\hat{p} = \frac{0{,}67912 + 0{,}76088}{2} = \frac{1{,}44}{2} = 0{,}72$$

$$\hat{p} = 0{,}72 \Leftrightarrow \frac{250 + 120 + 110 + 96}{250 + 120 + 110 + 96 + x} = 0{,}72 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{576}{576 + x} = 0{,}72 \Leftrightarrow 576 + x = \frac{576}{0{,}72} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 800 - 576 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 224$$

Cerca de 224 alunos deste agrupamento de escolas praticam basquetebol.