Pág. 9

Tarefa de revisão

1.1. $f(x)=\dfrac{-3x+1}{x}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

1.2. $g(x)=\dfrac{x}{x^2+x-6}$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}: x^2+x-6\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-3,2\}$

C.A.

$x^2+x-6=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-6)}}{2\times1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{25}}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm5}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-3\vee x=2$

1.3. $h(x)=\dfrac{x-3}{x^3+3x^2+3x}$

$D_h=\{x\in\mathbb{R}: x^3+3x^2+3x\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

C.A.

$x^3+3x^2+3x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x^2+3x+3)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee x^2+3x+3=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times3}}{2\times1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee \underbrace{x=\dfrac{-3\pm\sqrt{-3}}{2}}_{\text{equação impossível}}$

2.1. $x=3$ é a equação da assíntota vertical ao gráfico de f. Então, $c=3$.

$y=2$ é a equação da assíntota horizontal ao gráfico de f. Então, $a=2$.

$f(x)=2+\dfrac{b}{x-3}$

Sabe-se que $f(1)=0$.

$f(1)=0\Leftrightarrow 2+\dfrac{b}{1-3}=0\Leftrightarrow\dfrac{b}{-2}=-2\Leftrightarrow b=4$

$a=2$, $b=4$, $c=3$

2.2. **a)** $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=+\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2^+$ **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2^-$

3.1. **a)** $D_h=\{x\in\mathbb{R}: x+3\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

b) $h(x)=-2+\dfrac{1}{x+3}=-2+\dfrac{1}{x-(-3)}$

C.A.

$\begin{array}{r|l} -2x-5 & x+3 \\ +2x+6 & -2 \\ \hline 1 & \end{array}$

$y=-2$ é a equação da assíntota horizontal ao gráfico de h.

$x=-3$ é a equação da assíntota vertical ao gráfico de h.

c) Interseção com o eixo Ox:

$h(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{-2x-5}{x+3}=0\Leftrightarrow -2x-5=0\wedge x+3\neq 0\Leftrightarrow$

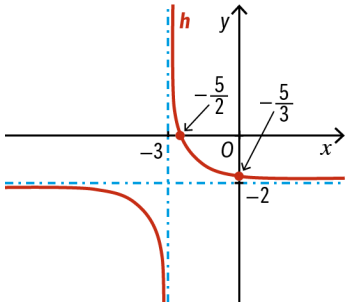
$\Leftrightarrow -2x=5\wedge x\neq -3\Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{2}$; Ponto $\left(-\dfrac{5}{2},0\right)$

Interseção com o eixo Oy:

$h(0)=\dfrac{-2\times0-5}{0+3}=-\dfrac{5}{3}$; Ponto $\left(0,-\dfrac{5}{3}\right)$

$\left(-\dfrac{5}{2},0\right)$ e $\left(0,-\dfrac{5}{3}\right)$.

3.2.



3.3. $D'_h=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=-2^-$; $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=-2^+$

$\lim\limits_{x\to-3^-}h(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-3^+}h(x)=+\infty$

3.4. h é decrescente em $]-\infty,-3[$ e em $]-3,+\infty[$.

3.5.

x	$-\infty$	-3		$-\frac{5}{2}$	$+\infty$
$h(x)$	–	N.D.	+	0	–

4.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b^-$ **4.2.** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b^+$

4.3. $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$ **4.4.** $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=+\infty$

1. Continuidade de uma função

Pág. 10

Tarefa 1

1.1. $f'(0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h^2+1-(0^2+1)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h^2+1-1}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}h=0$

$\left.\frac{d}{dx}(x^2+1)\right|_{x=0}$

1.2. $f'(1)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(1+h)^2+1-(1^2+1)}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1+2h+h^2+1-2}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h(2+h)}{h}=$

$= \lim\limits_{h\to 0}(2+h) = 2+0 = 2$

$\left.\frac{d}{dx}(x^2+1)\right|_{x=1}$ 2

Pág. 11

Questão 1

1.1. $\lim\limits_{x\to 1} x^4 = 1^4 = 1$

1.2. $\lim\limits_{x\to -1} x^3 = (-1)^3 = -1$

1.3. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x+1}{x} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$

1.4. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x} = \frac{3^2-9}{3} = 0$

1.5. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} =$

$= \lim\limits_{x\to 3}(x+3) = 3+3 = 6$

1.6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x+5x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(2+5x)}{\cancel{x}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}(2+5x) = 2+5\times 0 = 2$

1.7. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2(x-1)}{2x-2} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2\cancel{(x-1)}}{2\cancel{(x-1)}} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}$

Pág. 14

Questão 2

2.1. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$. Então, não existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. Logo, f é não contínua para $x = 1$.

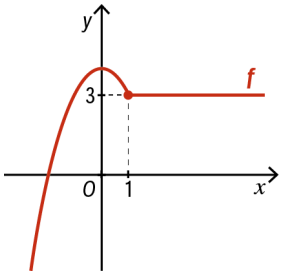
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2$

Então, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$. $f(2) = 0$

Como $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$, a função f é não contínua para $x = 2$.

f é descontínua para $x = 1$ e para $x = 2$.

2.2. **a)** $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \geq 1 \\ 4-x^2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$



$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3$

Então, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$.

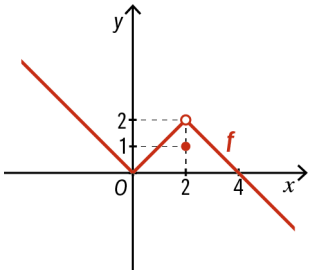
$f(1) = 3$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$

Logo, f é contínua em $x = 1$.

f é contínua em $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x < 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \\ 4-x & \text{se } x > 2 \end{cases}$



$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2$.

Então, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$. $f(2) = 1$

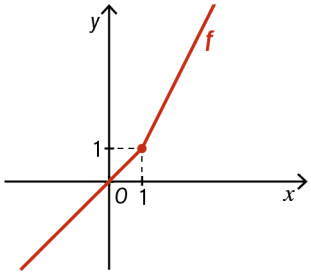
$\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$

Logo, f é não contínua para $x = 2$.

f é contínua para todo $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-x^2}{1-x} & \text{se } x < 1 \\ 2x-1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

Para $x < 1$, $\frac{x-x^2}{1-x} = \frac{x\cancel{(1-x)}}{\cancel{1-x}} = x$.



$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$. Então, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$.

$f(1) = 1$. Logo, f é contínua para $x = 1$.

f é contínua em $\mathbb{R}$.

Pág. 15

Questão 3

A função f é descontínua para $x = 0$.

Logo, f é contínua em $]-2,0[\cup]0,1[\cup]1,2]$.

Pág. 16

Questão 4

4.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = x^4 - x^2$

f é contínua em $\mathbb{R}$, porque é uma função polinomial.

4.2. $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ com $g(x)=x\cos(2x)$

g é contínua em $\mathbb{R}$ porque é definida pelo produto de funções contínuas em $\mathbb{R}$ (função polinomial e função cosseno).

4.3. $h:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}$, com $h(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.

h é contínua no seu domínio ($\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$) porque é uma função racional.

Pág. 17

Questão 5

f é contínua em $x=1$ se

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(3)=3$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x+2)=1+2=3$

$f(1)=3$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$, logo f é contínua em $x=1$.

Questão 6

Em $]-\infty,1[$ e em $]1,+\infty[$, a função g é contínua por ser, nestes intervalos, definida por funções racionais, em que os denominadores não se anulam nos respetivos intervalos.

No ponto $x=1$:

$\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{1}{1+2}=\dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{-x}{k}\right)=-\dfrac{1}{k}$

$g(1)=\dfrac{1}{1+2}=\dfrac{1}{3}$

g é contínua para $x=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to1^-}g(x)=g(1)\Leftrightarrow-\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow k=-3$

g é contínua em $\mathbb{R}$, se $k=-3$.

Questão 7

Em $]-\infty,k[$ e em $]k,+\infty[$, a função f é contínua por ser, nestes intervalos, definida por funções polinomiais. No ponto $x=k$:

$\lim\limits_{x\to k^+}f(x)=\lim\limits_{x\to k^+}(2x^2)=2k^2$

$\lim\limits_{x\to k^-}f(x)=\lim\limits_{x\to k^-}(x^2-2x+15)=k^2-2k+15$

$f(k)=2k^2$

f é contínua para $x=k\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to k^+}f(x)=\lim\limits_{x\to k^-}f(x)=f(k)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow2k^2=k^2-2k+15\Leftrightarrow k^2+2k-15=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+60}}{2}\Leftrightarrow k=\dfrac{-2\pm8}{2}\Leftrightarrow k=-5\vee k=3$

f é contínua em $\mathbb{R}$ se $k=-5$ ou $k=3$.

Pág. 19

Questão 8

$f(x)=3x^2$ e $g(x)=x-2$; $D_f=D_g=\mathbb{R}$

8.1. a) $g(-2)=-2-2=-4$

$(f\circ g)(-2)=f(g(-2))=f(-4)=3\times(-4)^2=48$

$=3\times(-4)^2=3\times16=48$

$(f\circ g)(-2)=48$

b) $f(-2)=3(-2)^2=3\times4=12$

$(g\circ f)(-2)=g(f(-2))=g(12)=12-2=10$

$(g\circ f)(-2)=10$

c) $g(0)=0-2=-2$

$(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(-2)=3(-2)^2=12$

$(f\circ g)(0)=12$

d) $f(0)=3\times0^2=3\times0=0$

$(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(0)=0-2=-2$

$(g\circ f)(0)=-2$

8.2. a) $D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}:x\in D_g\wedge g(x)\in D_f\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}:x\in\mathbb{R}\wedge x-2\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x-2)=3(x-2)^2$

$f\circ g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\to3(x-2)^2$

b) $D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}:x\in D_f\wedge f(x)\in D_g\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}:x\in\mathbb{R}\wedge3x^2\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x^2)=3x^2-2$

$g\circ f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\to3x^2-2$

Questão 9

9.1. a) $D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}:x\in D_g\wedge g(x)\in D_f\}=$

$=\left\{x\in\mathbb{R}:x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\wedge\dfrac{x}{x+1}\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=2\left(\dfrac{x}{x+1}\right)-1=$

$=\dfrac{2x}{x+1}-1=\dfrac{2x-x-1}{x+1}=\dfrac{x-1}{x+1}$

$f\circ g:\ \mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$

$x\to\dfrac{x-1}{x+1}$

b) $D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}:x\in D_f\wedge f(x)\in D_g\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}:x\in\mathbb{R}\wedge2x-1\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}:x\in\mathbb{R}\wedge2x-1\neq-1\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

C.A. $\mid\ 2x-1=-1\Leftrightarrow2x=0\Leftrightarrow x=0$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-1)=\dfrac{2x-1}{2x}$

$g\circ f:\ \mathbb{R}\setminus\{0\}\ \to\ \mathbb{R}$

$x\ \to\ \dfrac{2x-1}{2x}$

9.2. **a)** $(f\circ g)(0)=\dfrac{0-1}{0+1}=\dfrac{-1}{1}=-1$

b) $(f\circ g)(-2)=\dfrac{-2-1}{-2+1}=\dfrac{-3}{-1}=3$

c) $(g\circ f)\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2\times\left(\frac{1}{2}\right)-1}{2\times\frac{1}{2}}=\dfrac{1-1}{1}=\dfrac{0}{1}=0$

Questão 10

10.1. $D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_g\wedge g(x)\in D_f\}=$

$=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}\wedge\dfrac{x}{x+3}\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}=$

$=\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq-3\wedge\dfrac{x}{x+3}\neq0\right\}=\mathbb{R}\setminus\{-3,0\}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\dfrac{x}{x+3}\right)=\dfrac{3}{\frac{x}{x+3}}=$

$=\dfrac{3(x+3)}{x}=\dfrac{3x+9}{x}$

C.A. $\left|\ \dfrac{x}{x+3}=0\Leftrightarrow x=0\wedge x+3\neq0\Leftrightarrow\right.$
$\left.\Leftrightarrow x=0\wedge x\neq-3\right.$

$f\circ g:\ \mathbb{R}\setminus\{-3,0\}\ \to\ \mathbb{R}$

$x\ \to\ \dfrac{3x+9}{x}$

10.2. $D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f\wedge f(x)\in D_g\}=$

$=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\wedge\dfrac{3}{x}\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}\right\}=$

$=\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq0\wedge\dfrac{3}{x}\neq-3\right\}=\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$

C.A. $\left|\ \dfrac{3}{x}=-3\Leftrightarrow\dfrac{3}{x}+3=0\Leftrightarrow\dfrac{3+3x}{x}=0\Leftrightarrow\right.$
$\left.\Leftrightarrow3+3x=0\wedge x\neq0\Leftrightarrow x=-1\wedge x\neq0\right.$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\dfrac{3}{x}\right)=$

$=\dfrac{\frac{3}{x}}{\frac{3}{x}+3}=\dfrac{\frac{3}{x}}{\frac{3+3x}{x}}=\dfrac{\cancel{3x}}{\cancel{3x}(x+1)}=\dfrac{1}{x+1}$

$g\circ f:\ \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}\ \to\ \mathbb{R}$

$x\ \to\ \dfrac{1}{x+1}$

Pág. 20

Questão 11

11.1. $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$; $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $(f\circ g)(x)=-\dfrac{1}{2}$

$(f\circ g)(x)=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow f(g(x))=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{g(x)+1}{g(x)}=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{g(x)+1}{g(x)}+\dfrac{1}{2}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{2g(x)+2+g(x)}{g(x)}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow3g(x)+2=0\wedge g(x)\neq0\Leftrightarrow g(x)=-\dfrac{2}{3}$

$D_g=\mathbb{R}$

$g:\ \mathbb{R}\ \to\ \mathbb{R}$

$x\ \to\ -\dfrac{2}{3}$

11.2. $f(x)=\dfrac{k}{x}$ e $f(2)=\dfrac{1}{2}$

$f(2)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{k}{2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow k=1$; $f(x)=\dfrac{1}{x}$ e $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$g(x)=a(x+2)(x-2)$ e $g(0)=-3$

$g(0)=-3\Leftrightarrow a(0+2)(0-2)=-3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\times2\times(-2)=-3\Leftrightarrow-4a=-3\Leftrightarrow a=\dfrac{-3}{-4}\Leftrightarrow a=\dfrac{3}{4}$

$g(x)=\dfrac{3}{4}(x+2)(x-2)=\dfrac{3}{4}(x^2-4)=\dfrac{3}{4}x^2-3$

e $D_g=\mathbb{R}$

$D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_g\wedge g(x)\in D_f\}=$

$=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R}\wedge\dfrac{3}{4}x^2-3\neq0\right\}=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$

C.A. $\left|\ \dfrac{3}{4}x^2-3=0\Leftrightarrow\dfrac{3}{4}x^2=3\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm2\right.$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\dfrac{3}{4}x^2-3\right)=$

$=\dfrac{1}{\frac{3}{4}x^2-3}=\dfrac{1}{\frac{3x^2-12}{4}}=\dfrac{4}{3x^2-12}$

$f\circ g:\ \mathbb{R}\setminus\{-2,2\}\ \to\ \mathbb{R}$

$x\ \to\ \dfrac{4}{3x^2-12}$

Questão 12

$f(x)=x^2-x-6$ e $g(x)=kx+1$, $k\in\mathbb{R}$;

$D_f=D_g=\mathbb{R}$

12.1. $(g\circ f)(0)=0\Leftrightarrow g(f(0))=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(-6)=0\Leftrightarrow k(-6)+1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-6k=-1\Leftrightarrow k=\dfrac{1}{6}$

C.A. $\left|\ f(0)=0^2-0-6=-6\right.$

12.2. $(g\circ f)(0)=f(0)\Leftrightarrow g(f(0))=-6\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(-6)=-6\Leftrightarrow k(-6)+1=-6\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6k=-7\Leftrightarrow k=\dfrac{7}{6}$

Pág. 21

Questão 13

$$f(x)=\begin{cases}1+\cos(2x) & \text{se} \quad x\leq 0\\ \dfrac{kx}{x^2+x} & \text{se} \quad x>0\end{cases}$$

Em $]-\infty,0[$, a função f é contínua por ser, neste intervalo, definida pela composta de duas funções contínuas: a função $x\to 1+\cos x$ e a função polinomial $x\to 2x$, ambas contínuas em $\mathbb{R}$.

Em $]0,+\infty[$, a função f é contínua por ser, nesse intervalo, definida por uma função racional e $x^2+x\neq 0$ para todo $x>0$.

No ponto $x=0$, f é contínua se $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1+\cos(2x))=$

$=1+\cos 0=1+1=2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{kx}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{k\cancel{x}}{\cancel{x}(x+1)}=\dfrac{k}{0+1}=k$

$f(0)=1+\cos 0=1+1=2$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=2$

A função f é contínua, se $k=2$.

Questão 14

$$f(x)=\begin{cases}\cos(x+k) & \text{se} \quad x\geq 0\\ \sin(\pi x) & \text{se} \quad x<0\end{cases}$$

Em $]-\infty,0[$, a função f é contínua por ser, neste intervalo, definida pela composta de duas funções contínuas: a função $x\to \sin x$ e a função polinomial $x\to \pi x$, ambas contínuas em $\mathbb{R}$.

Em $]0,+\infty[$, a função f é contínua por ser, neste intervalo, definida pela composta de duas funções contínuas: a função $x\to\cos(x)$ e a função polinomial $x\to x+k$, ambas contínuas em $\mathbb{R}$.

No ponto $x=0$, f é contínua se $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\sin(\pi x))=\sin 0=0$

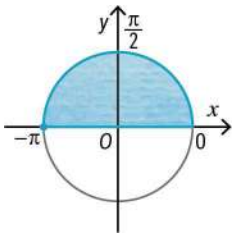
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos(x+k))=\cos(0+k)=\cos(k)$

$f(0)=\cos(0+k)=\cos k$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos k=0$

Como $k\in]0,\pi[$, $k=\dfrac{\pi}{2}$.



A função f é contínua em $\mathbb{R}$, se $k=\dfrac{\pi}{2}$.

Pág. 23

Questão 15

$f(x)=|x-1|$

$f(x)=|x-1|=\begin{cases}x-1 & \text{se} \quad x\geq 1\\ -(x-1) & \text{se} \quad x<1\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=1-1=0$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}[-(x-1)]=-(1-1)=0$

Então, $\lim\limits_{x\to 1}=0$.

$f(1)=1-1=0$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=0$

Logo, f é contínua para $x=1$.

$f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1-0}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}}=1$

$f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-(x-1)-0}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=-1$

Como $f'(1^+)\neq f'(1^-)$, não existe $f'(1)$.

Logo, f é contínua, mas não derivável no ponto $x=1$.

Questão 16

$f(x)=\begin{cases}x & \text{se} \quad x>0\\ x^3 & \text{se} \quad x\leq 0\end{cases}$, $D_f=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^3=0^3=0$

Então, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. $f(0)=0^3=0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$

Logo, f é contínua para $x=0$.

$f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}}=1$

$f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^3-0}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2=0^2=0$

Como $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, não existe $f'(0)$.

Logo, f é contínua e não derivável em $x = 0$.

Questão 17

No ponto $x = 0$: $f'(0) = +\infty$

Logo, f não é diferenciável para $x = 0$.

No ponto $x = 3$:

f não é contínua para $x = 3$, logo, não é diferenciável nesse ponto.

No ponto $x = 5$:

$f'(5^+) \neq f'(5^-)$

Neste caso, $f'(5^+) > 0$ e $f'(5^-) < 0$.

Logo, não existe $f'(5)$.

É sugerida a não existência de derivada nos pontos $x = 0$, $x = 3$ e $x = 5$.

Pág. 24

Tarefas de consolidação 1

1.1. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$

1.2. $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = 2$

1.3. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

Logo, não existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

1.4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x\to 1} f(x)}{\lim\limits_{x\to 1} g(x)} = \frac{0}{g(0)}$

$g(0)$ é um número real positivo.

Então, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 0$.

1.5. $\lim\limits_{x\to 1}(fg)(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) \times \lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0 \times g(1)$

$g(1)$ é um número real positivo.

Então, $\lim\limits_{x\to 1}(fg)(x) = 0$.

1.6. $\lim\limits_{x\to 1}(f+h)(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) + \lim\limits_{x\to 1} h(x) =$

$= 0 + \lim\limits_{x\to 1}(x^2 - 4) = 0 + 1^2 - 4 = -3$

1.7. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{h}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x\to 2} h(x)}{\lim\limits_{x\to 2} g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)}{g(2)} = \frac{0}{g(2)}$

$g(2)$ é um número real positivo.

Então, $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{h}{g}\right)(x) = 0$.

1.8. $\lim\limits_{x\to 1}(g+h)(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x) + \lim\limits_{x\to 1} h(x) =$

$= \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{3}x + 1\right) + \lim\limits_{x\to 1}(x^2 - 4) =$

$= \frac{1}{3} \times 1 + 1 + 1^2 - 4 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$

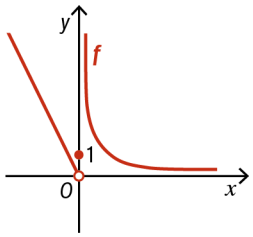
C.A. $g(x) = mx + b$ e $b = 1$

$m = \frac{2-1}{3-0} = \frac{1}{3}$

$g(x) = \frac{1}{3}x + 1$

$\lim\limits_{x\to 1}(g+h)(x) = -\frac{5}{3}$

2.1.



2.2.

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0^+$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0^+$

2.3. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

Então, não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Logo, f não é contínua para $x = 0$.

3.1. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x^2+x}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x(x+1)}{x+1} =$

$= \lim\limits_{x\to -1^-} x = -1$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x+1) = -1+1 = 0$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

Então, não existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

Logo, f não é contínua para $x = -1$.

3.2. Na opção (A):

$\lim\limits_{x\to -1^-} (f\times g)(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \times \lim\limits_{x\to -1^-} g(x) =$

$= -1 \times 1 = -1$

$\lim\limits_{x\to -1^+} (f\times g)(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \times \lim\limits_{x\to -1^+} g(x) =$

$= 0 \times (-1) = 0$

$\lim\limits_{x\to -1^-} (f\times g)(x) \neq \lim\limits_{x\to -1^+} (f\times g)(x)$

Logo, $f \times g$ não é contínua para $x = -1$.

Na opção (B):

$\lim\limits_{x\to -1^-} (f\times g)(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \times \lim\limits_{x\to -1^-} g(x) =$

$= -1 \times 1 = -1$

$\lim\limits_{x\to -1^+} (f\times g)(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \times \lim\limits_{x\to -1^+} g(x) =$

$= 0 \times 0 = 0$

$\lim\limits_{x\to -1^-} (f\times g)(x) \neq \lim\limits_{x\to -1^+} (f\times g)(x)$

Logo, $f \times g$ não é contínua para $x = -1$.

Na opção (C):

$\lim\limits_{x\to -1^-}(f\times g)(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)\times\lim\limits_{x\to -1^-}g(x)=$

$=-1\times 0=0$

$\lim\limits_{x\to -1^+}(f\times g)(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)\times\lim\limits_{x\to -1^+}g(x)=$

$=0\times(-1)=0$

Então, $\lim\limits_{x\to -1}(f\times g)(x)=0$.

$(f\times g)(-1)=f(-1)\times g(-1)=0\times(-1)=0$

$\lim\limits_{x\to -1}(f\times g)(x)=(f\times g)(-1)$

Logo, $f\times g$ é contínua para $x=-1$.

Na opção (D):

$\lim\limits_{x\to -1^-}(f\times g)(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)\times\lim\limits_{x\to -1^-}g(x)=$

$=-1\times 1=-1$

$\lim\limits_{x\to -1^+}(f\times g)(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)\times\lim\limits_{x\to -1^+}g(x)=$

$=0\times 0=0$

$\lim\limits_{x\to -1^-}(f\times g)(x)\neq\lim\limits_{x\to -1^+}(f\times g)(x)$

Logo, $f\times g$ não é contínua para $x=-1$.

Opção (C)

4. Por exemplo:

$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{se } x\leq 0\\ 1 & \text{se } x>0\end{cases}$

e

$g(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\leq 0\\ -1 & \text{se } x>0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$ e $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$

Isto é, f é descontínua para $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=1$ e $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$

Isto é, g é descontínua para $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)+\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=$

$=-1+1=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)+\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=$

$=1+(-1)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(f+g)(x)$

Então, $\lim\limits_{x\to 0}(f+g)(x)=0$.

$(f+g)(0)=f(0)+g(0)=-1+1=0$

$\lim\limits_{x\to 0}(f+g)(x)=(f+g)(0)$

Logo, $f+g$ é contínua para $x=0$.

Pág. 25

5.1. $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{se } x<0\\ -1 & \text{se } x=0\\ \frac{1}{x}(x^2-x) & \text{se } x>0\end{cases}$ para $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-1)=0^2-1=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x}(x^2-x)\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x(x-1)}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=0-1=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-1$

Então, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$.

$f(0)=-1$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

Logo, f é contínua para $x=0$.

5.2. $g(x)=\begin{cases}\frac{1+x-2x^2}{x-1} & \text{se } x<1\\ x-4 & \text{se } x\geq 1\end{cases}$, para $x=1$

$\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1+x-2x^2}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(-2x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(-2x-1)=$

$=-2\times 1-1=-3$

C.A.

	-2	1	1
1		-2	-1
	-2	-1	0

$\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-4)=1-4=-3$

$\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)=-3$

Então, $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=3$.

$g(1)=1-4=-3$

$\lim\limits_{x\to 1}g(x)=g(1)$

Logo, g é contínua para $x=1$.

5.3. $h(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & \text{se } x\neq 0\\ 1 & \text{se } x=0\end{cases}$, para $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$

C.A. $|x|=\begin{cases}x & \text{se } x\geq 0\\ -x & \text{se } x<0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)$

Logo, não existe $\lim\limits_{x\to 0}h(x)$, pelo que, h é descontínua para $x=0$.

6. $(f\circ g)(x)=0\Leftrightarrow f(g(x))=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(x)=2\Leftrightarrow x=0\vee x=4$

Opção (B)

7.1. $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+1}{x+1} & \text{se} \quad x\neq 2\\ k & \text{se} \quad x=2\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+1}{x+1}=\dfrac{2^3+1}{2+1}=\dfrac{9}{3}=3$

$g(2)=k$

g é contínua para $x=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} g(x)=g(2)\Leftrightarrow k=3$

g é contínua para $x=2$, se $k=3$.

7.2. $g(x)=\begin{cases}2k-3x & \text{se} \quad x<1\\ k & \text{se} \quad x=1\\ \dfrac{3x^2-3x}{x-1} & \text{se} \quad x>1\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2k-3x)=2k-3\times 1=2k-3$

$\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x^2-3x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=$

$\lim\limits_{x\to 1^+}(3x)=3\times 1=3$; $g(1)=k$

g é contínua para $x=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=g(1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2k-3=3=k\Leftrightarrow 2k-3=3\wedge k=3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2k=6\wedge k=3\Leftrightarrow k=3\wedge k=3$

g é contínua para $x=1$ se $k=3$.

8.1. **a)** $(f\circ g)(6)=$

$=f(g(6))=f(2)=\dfrac{2-1}{2}=\dfrac{1}{2}$

$(f\circ g)(6)=\dfrac{1}{2}=0{,}5$

C.A. $\left|\ g(6)=\dfrac{6}{6-3}=\dfrac{6}{3}=2\right.$

b) $(g\circ f)(6)=g(f(6))=g\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}-3}=-5$

$(g\circ f)(6)=-5$

C.A. $\left|\ f(6)=\dfrac{6-1}{2}=\dfrac{5}{2}\right.$

8.2. **a)** $D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_g\wedge g(x)\in D_f\}=$

$=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}\wedge\dfrac{x}{x-3}\in\mathbb{R}\right\}=$

$=\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq 3\wedge\dfrac{x}{x-3}\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\dfrac{x}{x-3}\right)=\dfrac{\frac{x}{x-3}-1}{2}=$

$=\dfrac{\frac{x-x+3}{x-3}}{2}=\dfrac{3}{2x-6}$

$f\circ g:\ \mathbb{R}\setminus\{3\}\ \to\ \mathbb{R}$

$x\ \to\ \dfrac{3}{2x-6}$

b) $D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f\wedge f(x)\in D_g\}=$

$=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R}\wedge\dfrac{x-1}{2}\in\mathbb{R}\setminus\{3\}\right\}=$

$=\left\{x\in\mathbb{R}:\dfrac{x-1}{2}\neq 3\right\}=\mathbb{R}\setminus\{7\}$

C.A. $\left|\ \dfrac{x-1}{2}=3\Leftrightarrow x-1=6\Leftrightarrow x=7\right.$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\dfrac{x-1}{2}\right)=$

$=\dfrac{\frac{x-1}{2}}{\frac{x-1}{2}-3}=\dfrac{\frac{x-1}{2}}{\frac{x-1-6}{2}}=\dfrac{x-1}{x-7}$

$g\circ f:\ \mathbb{R}\setminus\{7\}\ \to\ \mathbb{R}$

$x\ \to\ \dfrac{x-1}{x-7}$

9. $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{se} \quad x<1\\ 3x-2 & \text{se} \quad x\geq 1\end{cases}$, $D_f=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1^2=1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3x-2)=3\times 1-2=1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$

Então, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$.

$f(1)=3\times 1-2=1$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$. Logo, f é contínua para $x=1$.

$f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=1+1=2$

$f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x-2-1}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=3$

$f'(1^-)\neq f'(1^+)$. Logo, não existe derivada para $x=1$. f é contínua e não derivável para $x=1$.

Pág. 27

Avaliação formativa 1

1. $f(x)=x^2-1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{-1}=\frac{1+1}{-1}=-2\neq 2$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to -1}(x-1)=-1-1=-2\neq 2$$

$$(f\circ f)(0)=f(f(0))=f(-1)=$$

$$=(-1)^2-1=1-1=0\neq -1$$

C.A. $\mid\ f(0)=0^2-1=-1$

$$(f\circ f)(-1)=f(f(-1))=f(0)=0^2-1=-1$$

Opção (D)

2. Em $]-\infty,3[$ e em $]3,+\infty[$, a função f é contínua por ser, nestes intervalos, definida por funções polinomiais.

No ponto $x=3$:

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}(|k+3|)=|k+3|$$

$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}(k+x)=k+3$$

$$f(3)=k+3$$

f é contínua para

$$x=3\Leftrightarrow \lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^+}f(x)=f(3)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |k+3|=k+3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k+3=k+3\vee k+3=-k+3)\wedge k+3\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\underbrace{0k=0}_{\substack{\text{condição}\\ \text{universal em }\mathbb{R}}}\ \vee 2k=0\right)\wedge k\geq -3\Leftrightarrow k\geq -3$$

Logo, f é contínua em $\mathbb{R}$ se, e só se, $k\in[-3,+\infty[$.

3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-a^2}{x-a} & \text{se } x<a\\ g(x) & \text{se } x\geq a\end{cases}$

No intervalo $]-\infty,a[$, f é contínua por ser, nesse intervalo, definida por uma função racional, sendo que, o denominador não se anula nesse intervalo.

No intervalo $]a,+\infty[$, f é contínua por ser, nesse intervalo, definida pela função g, contínua em $]a,+\infty[$.

No ponto $x=a$:

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^-}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a^-}(x+a)=a+a=2a$$

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^+}g(x)=1$$

$$f(a)=g(a)=1$$

f é contínua em $x=a\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a=1\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$$

4. $f(x)=2x+1$, $g(x)=\begin{cases}f(x) & \text{se } x\leq 1\\ x+k & \text{se } x>1\end{cases}$

I. $(f\circ h)(x)=2x-1\Leftrightarrow f(h(x))=2x-1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2h(x)+1=2x-1\Leftrightarrow 2h(x)=2x-2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(x)=x-1$$

I. → c)

II. Em $]-\infty,1[$ e em $]1,+\infty[$, a função g é contínua por ser, nestes intervalos, definida por funções polinomiais.

No ponto $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^-}g(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x+1)=2\times 1+1=3$$

$$\lim_{x\to 1^+}g(x)=\lim_{x\to 1^+}(x+k)=1+k$$

$$g(1)=f(1)=2\times 1+1=3$$

g é contínua em $x=1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}g(x)=\lim_{x\to 1^+}g(x)=g(1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+k=3\Leftrightarrow k=2$$

g é contínua se $k=2$.

II. → a)

III. $(f\circ g)(2)=-1\Leftrightarrow f(g(2))=-1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(2+k)=-1\Leftrightarrow 2(2+k)+1=-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4+2k=-2\Leftrightarrow 2k=-6\Leftrightarrow k=-3$$

III. → c)

IV. $g'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\dfrac{2x+1-3}{x-1}=$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{2(x-1)}{x-1}=2$$

$$g'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+k-3}{x-1}$$

Se $k=2$, $g'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x-1}=1$.

$$g'(1^-)\neq g'(1^+)$$

Então, g não é diferenciável em $x=1$.

Se $k\neq 2$, $g'(1^+)=\dfrac{k-2}{0^+}=\pm\infty$

Então, g não é diferenciável em $x=1$.

Logo, a afirmação é falsa.

IV. → b)

I. → c) ; **II. → a)** ; **III. → c)** ; **IV. → b)**

2. Derivadas

Pág. 28

Tarefa 2

1.1. $\left(x^6\right)' = 6x^5$

1.2. $\left(-3x^4\right)' = -3\left(x^4\right)' = -3\times 4x^3 = -12x^3$

1.3. $\left(x^4 - 6x^2\right)' = \left(x^4\right)' - \left(6x^2\right)' = 4x^3 - 6\left(x^2\right)' =$

$= 4x^3 - 6\times 2x = 4x^3 - 12x$

1.4. $\left(x^3 + 3x^2 - 1^{-3}\right)' = \left(x^3\right)' + \left(3x^2\right)' - \left(1^{-3}\right)' =$

$= 3x^2 + 3\left(x^2\right)' - 0 = 3x^2 + 3\times 2x = 3x^2 + 6x$

1.5. $\left(8x^5 - x^4 + 3x\right)' = \left(8x^5\right)' - \left(x^4\right)' + \left(3x\right)' =$

$= 8\left(x^5\right)' - 4x^3 + 3 = 8\times 5x^4 - 4x^3 + 3 = 40x^4 - 4x^3 + 3$

1.6. $\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 5^{-1}\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' + \left(\frac{1}{2}x^2\right)' + \left(5^{-1}\right)' =$

$= \frac{1}{3}\left(x^3\right)' + \frac{1}{2}\left(x^2\right)' + 0 = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}\times 2x = x^2 + x$

1.7. $\left[(x-3)(2-3x)\right]' =$

$= (x-3)'(2-3x) + (x-3)(2-3x)' =$

$= 1\times(2-3x) + (x-3)\times(-3) = 2 - 3x - 3x + 9 =$

$= -6x + 11 = 11 - 6x$

1.8. $\left[x^2(3x-1)\right]' = \left(x^2\right)'(3x-1) + x^2(3x-1)' =$

$= 2x(3x-1) + x^2\times 3 = 6x^2 - 2x + 3x^2 = 9x^2 - 2x$

1.9. $\left[\left(x^2-1\right)\left(x^2-2x+1\right)\right]' =$

$= \left(x^2-1\right)'\left(x^2-2x+1\right) + \left(x^2-1\right)\left(x^2-2x+1\right)' =$

$= 2x\left(x^2-2x+1\right) + \left(x^2-1\right)(2x-2) =$

$= 2x^3 - 4x^2 + 2x + 2x^3 - 2x^2 - 2x + 2 = 4x^3 - 6x^2 + 2$

1.10.

$\left(5x^2 - \frac{1}{x}\right)' = \left(5x^2\right)' - \left(\frac{1}{x}\right)' = 5\times\left(x^2\right)' - \frac{1'\times x - 1\times x'}{x^2} =$

$= 5\times 2x - \frac{0-1}{x^2} = 10x + \frac{1}{x^2}$

1.11. $\left(\frac{3}{x^2} - 3x^{-1}\right)' = \left(\frac{3}{x^2}\right)' - \left(3\times\frac{1}{x}\right)' =$

$= \frac{3'\times x^2 - 3\times\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} - 3\times\frac{1'\times x - 1\times x'}{x^2} =$

$= \frac{0 - 3\times 2x}{x^4} - 3\times\frac{-1}{x^2} = \frac{-6x}{x^4} + \frac{3}{x^2} = -\frac{6}{x^3} + \frac{3}{x^2} = \frac{3}{x^2} - \frac{6}{x^3}$

1.12. $\left(\frac{x^2+x+2}{x}\right)' = \frac{\left(x^2+x+2\right)'x - \left(x^2+x+2\right)x'}{x^2} =$

$= \frac{(2x+1)x - \left(x^2+x+2\right)\times 1}{x^2} = \frac{2x^2 + x - x^2 - x - 2}{x^2} =$

$= \frac{x^2-2}{x^2}$

1.13. $\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)' = \frac{(2x+1)'(x-1) - (2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} =$

$= \frac{2(x-1) - (2x+1)\times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x - 1}{(x-1)^2} = -\frac{3}{(x-1)^2}$

1.14. $\left[(2x-1)\times\frac{x}{x^2+1}\right]' = \left(\frac{(2x+1)\times x}{x^2+1}\right)' = \left(\frac{2x^2+x}{x^2+1}\right)' =$

$= \frac{\left(2x^2+x\right)'\left(x^2+1\right) - \left(2x^2+x\right)\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2} =$

$= \frac{(4x+1)\left(x^2+1\right) - \left(2x^2+x\right)2x}{\left(x^2+1\right)^2} =$

$= \frac{4x^3 + 4x + x^2 + 1 - \left(4x^3 + 2x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2} =$

$= \frac{4x^3 + 4x + x^2 + 1 - 4x^3 - 2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{-x^2 + 4x + 1}{\left(x^2+1\right)^2}$

Pág. 29

Questão 18

18.1. $f(x) = 2x + 3x^{-1} - 4x^{-2}$

$f'(x) = \left(2x - 3x^{-1} - 4x^{-2}\right)' =$

$= 2 - 3\times\left(-x^{-1-1}\right) - 4\left(-2x^{-2-1}\right) = 2 - 3x^{-2} - 8x^{-3}$

18.2. $f(x) = 4x^{-3}\left(1 + x^{-1}\right)$

$f'(x) = \left[4x^{-3}\left(1+x^{-1}\right)\right]' = \left(4x^{-3}\right)'\left(1+x^{-1}\right) + 4x^{-3}\left(1+x^{-1}\right)' =$

$= 4\times(-3)x^{-3-1}\left(1+x^{-1}\right) + 4x^{-3}\left(-x^{-1-1}\right) =$

$= -12x^{-4}\left(1+x^{-1}\right) - 4x^{-3}\times x^{-2} =$

$= -12x^{-4} - 12x^{-4}\times x^{-1} - 4x^{-5} = -12x^{-4} - 16x^{-5}$

18.3. $f(x) = \frac{x^{-2}-1}{2-x^{-3}}$

$f'(x) = \frac{\left(x^{-2}-1\right)'\left(2+x^{-3}\right) - \left(x^{-2}-1\right)\left(2+x^{-3}\right)'}{\left(2-x^{-3}\right)^2} =$

$= \frac{-2x^{-2-1}\left(2+x^{-3}\right) - \left(x^{-2}-1\right)\left(-3x^{-3-1}\right)}{\left(2+x^{-3}\right)^2} =$

$$= \frac{-2x^{-3}\left(2+x^{-3}\right)-\left(x^{-2}-1\right)\left(-3x^{-4}\right)}{\left(2+x^{-3}\right)^2} =$$

$$= \frac{-4x^{-3}-2x^{-6}-\left(-3x^{-6}+3x^{-4}\right)}{\left(2+x^{-3}\right)^2} = \frac{x^{-6}-3x^{-4}-4x^{-3}}{\left(2+x^{-3}\right)^2}$$

Pág. 30

Questão 19

19.1. $24^{\frac{1}{4}} \times 54^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{24} \times \sqrt[4]{54} = \sqrt[4]{24 \times 54} = \sqrt[4]{1256} = 6$

19.2. $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} \times 32^{\frac{2}{5}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(2^5\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{9}{4}} \times 2^{\frac{5\times 2}{5}} = \frac{3}{2} \times 2^2 = 6$

19.3. $(-125)^{-\frac{1}{3}} : \left(-\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(-\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}} : \sqrt[3]{\left(-\frac{27}{8}\right)^2} =$

$$= \sqrt[3]{-\frac{1}{125}} : \sqrt[3]{\frac{729}{64}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{125} \times \frac{64}{729}} = \sqrt[3]{-\frac{64}{91125}} = -\frac{4}{45}$$

19.4. $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \times (-1000)^{-\frac{2}{3}} \times 8000^{\frac{4}{3}} =$

$$= 8^{\frac{2}{3}} \times \left(-\frac{1}{1000}\right)^{\frac{2}{3}} \times 8000^{\frac{4}{3}} =$$

$$= \sqrt[3]{8^2} \times \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{1000}\right)^2} \times \sqrt[3]{8000^4} =$$

$$= \sqrt[3]{64} \times \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{10^3}\right)^2} \times \sqrt[3]{\left(8\times 10^3\right)^4} =$$

$$= \sqrt[3]{64} \times \sqrt[3]{\frac{1}{10^6}} \times \sqrt[3]{8^4 \times 10^{12}} = \sqrt[3]{64 \times 8^4 \times 10^6} = 6400$$

Questão 20

20.1. $(4x)^{\frac{1}{2}} \times 8x^{\frac{1}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} \times 8x^{\frac{1}{4}} = \sqrt{4} \times 8 \times x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{4}} =$

$$= 2 \times 8 \times x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = 16x^{\frac{3}{4}}$$

20.2. $\left(3x^{\frac{3}{4}}\right)^2 \times 5x^{\frac{1}{2}} = 3^2 \times x^{\frac{6}{4}} \times 5x^{\frac{1}{2}} = 9 \times 5 \times x^{\frac{3}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} =$

$$= 45x^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = 45x^2$$

20.3. $\frac{x^{\frac{5}{2}} \times x^{-\frac{1}{2}}}{\left(2x^{\frac{3}{2}}\right)^{-2}} = \frac{x^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}}{2^{-2}x^{\frac{-2\times 3}{2}}} = \frac{x^2}{\frac{1}{2^2}x^{-3}} = \frac{x^2}{\frac{1}{4}x^{-3}} = 4x^{2-(-3)} = 4x^5$

Pág. 31

Questão 21

21.1. $f'(x) = \left(\sqrt[5]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)' = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

21.2. $g'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} =$

$$= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^2 x}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

21.3. $h'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} =$

$$= -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3}\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} = -\frac{1}{2\sqrt[3]{x^3 \times x}} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$$

21.4.

$$i'(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)' = \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}-1}\right)' = \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1} =$$

$$= -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3}\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^3 \times x^2}} = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$$

Pág. 32

Questão 22

22.1. $f'(x) = 3\,;\ g'(x) = 4x^3$

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = 3 \times g'(3x+1) =$$

$$= 3 \times 4(3x+1)^3 = 12(3x+1)^2$$

22.2. $(g \circ f)'(0) = 12(3\times 0+1)^3 = 12$

Questão 23

23.1. $f'(x) = \left[\left(3x^2-4\right)^3\right]' = 3\left(3x^2-4\right)^2\left(3x^2-4\right)' =$

$$= 3\left(3x^2-4\right)^2(6x) = 18x\left(3x^2-4\right)^2$$

23.2. $f'(x) = \left(\sqrt{2x+1}\right)' = \left[(2x+1)^{\frac{1}{2}}\right]' =$

$$= \frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}-1} \times (2x+1)' = \frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}} \times 2 =$$

$$= (2x+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

23.3. $f'(x) = \left[\frac{1}{(2x+1)^3}\right]' = \left[(2x+1)^{-3}\right]' =$

$$= -3(2x+1)^{-3-1}(2x+1)' = -3(2x+1)^{-4} \times 2 =$$

$$= -6(2x+1)^{-4} = -\frac{6}{(2x+1)^4}$$

23.4. $f(x) = \frac{3}{(1-x)^2}$

$$f'(x) = \left[\frac{3}{(1-x)^2}\right]' = \frac{3'(1-x)^2 - 3\left[(1-x)^2\right]'}{\left[(1-x)^2\right]^2} =$$

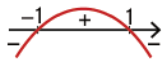
$$= \frac{0-3\times 2(1-x)(1-x)'}{(1-x)^4} = \frac{-6(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \frac{6}{(1-x)^3}$$

Pág. 33

Questão 24

24.1. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}:1-x^2\geq 0\}=[-1,1]$

C.A. $1-x^2=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$



$f'(x)=\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=\left[\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]'=$

$=\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\times\left(1-x^2\right)'=$

$=\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\times(-2x)=-\frac{x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$m=f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}=$

$=-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

24.2. $f(x)=\frac{2}{(2x+1)^2}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}:2x+1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$f'(x)=\left[\frac{2}{(2x+1)^2}\right]'=\frac{2'(2x+1)^2-2\times\left[(2x+1)^2\right]'}{(2x+1)^4}=$

$=\frac{0-2\times 2\times(2x+1)(2x+1)'}{(2x+1)^4}=\frac{-4(2x+1)\times 2}{(2x+1)^4}=$

$=\frac{-8}{(2x+1)^3}$

$f'(x)=-\frac{8}{(2x+1)^3}$

$m=f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{8}{\left(2\times\frac{1}{2}+1\right)^3}=-\frac{8}{2^3}=-1$

24.3. $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}:x^2\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f'(x)=\left[\frac{x^2+1}{x^2}\right]'=\frac{\left(x^2+1\right)'x^2-\left(x^2+1\right)\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}=$

$=\frac{2xx^2-\left(x^2+1\right)2x}{x^4}=\frac{2x^3-2x^3-2x}{x^4}=-\frac{2x}{x^4}=-\frac{2}{x^3}$

$f'(x)=-\frac{2}{x^3}$; $m=f'(-1)=-\frac{2}{(-1)^3}=2$

24.4. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}:x\geq 0\wedge x+1\neq 0\}=[0,+\infty[=\mathbb{R}_0^+$

$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{x}\right)'(x+1)-\sqrt{x}(x+1)'}{(x+1)^2}=$

$=\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'(x+1)-\sqrt{x}\times 1}{(x+1)^2}=\frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\times x'(x+1)-\sqrt{x}}{(x+1)^2}=$

$=\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\times 1\times(x+1)-\sqrt{x}}{(x+1)^2}=\frac{\frac{x+1}{2x^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{x}}{(x+1)^2}=\frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{(x+1)^2}=$

$=\frac{\frac{x+1-2\sqrt{x}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2}=\frac{\frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2}=\frac{-x+1}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$

$f'(x)=\frac{-x+1}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$

$m=f'(1)=\frac{-1+1}{2\sqrt{1}(1+1)^2}=\frac{0}{8}=0$

24.5. $f(x)=\sqrt[3]{1-3x}$; $D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=\left(\sqrt[3]{1-3x}\right)'=\left[(1-3x)^{\frac{1}{3}}\right]'=$

$=\frac{1}{3}(1-3x)^{\frac{1}{3}-1}(1-3x)'=\frac{1}{3}(1-3x)^{-\frac{2}{3}}(-3)=$

$=-\frac{1}{(1-3x)^{\frac{2}{3}}}=-\frac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}$

$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}$

$m=f'(0)=-\frac{1}{\sqrt[3]{(1-3\times 0)^2}}=-1$

Questão 25

25.1. $f(x)=\frac{2\sqrt{x}}{2-x}$

$f'(x)=\frac{\left(2\sqrt{x}\right)'(2-x)-2\sqrt{x}(2-x)'}{(2-x)^2}=$

$=\frac{2\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'(2-x)-2\sqrt{x}(-1)}{(2-x)^2}=$

$=\frac{2\times\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\times x'(2-x)+2\sqrt{x}}{(2-x)^2}=$

$=\frac{x^{-\frac{1}{2}}(2-x)+2\sqrt{x}}{(2-x)^2}=\frac{\frac{2-x}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}}{(2-x)^2}=\frac{x+2}{\sqrt{x}(2-x)^2}$

$f'(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x}(2-x)^2}$; $m=f'(1)=\dfrac{1+2}{\sqrt{1}(1+2)^2}=\dfrac{3}{1}=3$

$f(1)=\dfrac{2\sqrt{1}}{2-1}=2$

Ponto de tangência: $(1,2)$

Declive: $m=3$

$y-y_0=m(x-x_0)\Leftrightarrow y-2=3(x-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y-2=3x-3\Leftrightarrow y=3x-1$

$y=3x-1$

25.2. $g(x)=\dfrac{2}{x+\sqrt{x}}$

$g'(x)=\dfrac{2'\left(x+\sqrt{x}\right)-2\left(x+\sqrt{x}\right)'}{\left(x+\sqrt{x}\right)^2}=$

$=\dfrac{0-2\left[x'+\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'\right]}{\left(x+\sqrt{x}\right)^2}=\dfrac{-2\left(1+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}x'\right)}{\left(x+\sqrt{x}\right)^2}=$

$=\dfrac{-2\left(1+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(x+\sqrt{x}\right)^2}=\dfrac{-2\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(x+\sqrt{x}\right)^2}=$

$=\dfrac{-2-\frac{2}{2\sqrt{x}}}{\left(x+\sqrt{x}\right)^2}=\dfrac{\frac{-2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}}{\left(x+\sqrt{x}\right)^2}=\dfrac{-2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}\right)^2}$

$g'(x)=\dfrac{-2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}\right)^2}$

$m=g'(1)=\dfrac{-2\sqrt{1}-1}{\sqrt{1}\left(1+\sqrt{1}\right)^2}=-\dfrac{3}{4}$

$g(1)=\dfrac{2}{1+\sqrt{1}}=1$

Ponto de tangência: $(1,1)$

Declive: $m=-\dfrac{3}{4}$

$y-y_0=m(x-x_0)\Leftrightarrow y-1=-\dfrac{3}{4}(x-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y-1=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{7}{4}$; $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{7}{4}$

Pág. 34

Tarefa 3

1. Ao fazer variar *a*, os declives das retas tangentes ao gráfico de $y=\sin x$ formam o gráfico de $y=\cos x$. Assim, $(\sin x)'=\cos x$.

2.1. O ponto *P* tem ordenada $\sin\theta$.

O ponto *Q* tem ordenada $\sin(\theta+h)$.

O ponto *R* tem ordenada $\sin(\theta+h)$.

$\overline{PR}$ representa a diferença entre a ordenada de *R* e a ordenada de *P*.

$\overline{PR}=\sin(\theta+h)-\sin\theta$

2.2. $h\to 0$; $P\to Q$

O arco *PQ* aproxima-se do segmento $[PQ]$ porque localmente a circunferência é semelhante à reta;

O comprimento do arco de circunferência é αr.

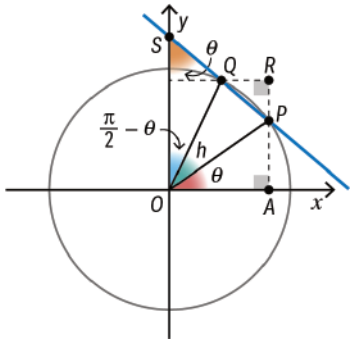
Como o raio é 1, o comprimento do arco é *h*, logo $\overline{PQ}\approx h$; $\overline{OP}=\overline{OQ}$ ($[OP]$ e $[OQ]$ são raios da circunferência).

$Q\hat{P}O=O\hat{Q}P$ (a lados iguais opõem-se ângulos iguais)

A soma dos ângulos internos de um triângulo é π radianos.

$Q\hat{P}O+O\hat{Q}P+h=\pi\underset{(h\to 0)}{\Leftrightarrow}2Q\hat{P}O=\pi$

Logo, $Q\hat{P}O=\dfrac{\pi}{2}$.



Quando $h\to 0$, a reta *PQ* aproxima-se da tangente à circunferência no ponto *Q* e essa reta tangente é perpendicular ao raio no ponto de tangência, no ponto *Q*.

Seja *S* o ponto de interseção da reta tangente com o eixo das ordenadas.

Quando $h\to 0$, $Q\hat{O}S=\dfrac{\pi}{2}-\theta$.

$Q\hat{S}O=\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\theta$

A reta *PR* é paralela ao eixo *Oy*.

Então, $R\hat{P}Q=Q\hat{S}O$ porque são ângulos de lados paralelos logo, $R\hat{P}Q=\theta$.

2.3. $\cos\theta\approx\dfrac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}\approx\dfrac{\sin(\theta+h)-\sin\theta}{h}$

Logo, $\cos\theta\approx\dfrac{\sin(\theta+h)-\sin\theta}{h}$.

Quando $h\to 0$, $\cos\theta=(\sin\theta)'$.

$(\sin\theta)'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(\theta+h)-\sin\theta}{h}$

Pág. 36

Questão 26

26.1. $f(x)=\sin(-2x+1)$

$f'(x)=(-2x+1)'\cos(-2x+1)=-2\cos(-2x+1)$

26.2. $f(x)=x^2-\cos(2x)$

$f'(x)=(x^2)'-[\cos(2x)]'=2x-\left[(2x)'(-\sin(2x))\right]=$

$=2x-(-2\sin(2x))=2x+2\sin(2x)$

Questão 27

27.1. $f(x)=\sin(x^2+1)$

$f'(x)=(x^2+1)'\cos(x^2+1)=2x\cos(x^2+1)$

27.2. $f(x)=x\cos(2x)$

$f'(x)=x'\cos(2x)+x[\cos(2x)]'=$

$=\cos(2x)+x\left[(2x)'(-\sin(2x))\right]'=$

$=\cos(2x)+x[-2\sin(2x)]=\cos(2x)-2x\sin(2x)$

27.3. $f(x)=x^2\sin x$

$f'(x)=(x^2)'\sin x+x^2(\sin x)'=2x\sin x+x^2\cos x$

27.4. $f(x)=\cos^3 x$

$f'(x)=3\cos^{3-1}x(\cos x)'=3\cos^2 x(-\sin x)=$

$=-3\cos^2 x\sin x$

27.5. $f(x)=x-\tan^2(2x)$

$f'(x)=x'-[\tan^2(2x)]'=1-\left[2\tan(2x)\times(\tan(2x))'\right]=$

$=1-\left[2\tan(2x)\times\frac{(2x)'}{\cos^2(2x)}\right]=$

$=1-\left[2\tan(2x)\times\frac{2}{\cos^2(2x)}\right]=$

$=1-\left[2\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}\times\frac{2}{\cos^2(2x)}\right]=1-\frac{4\sin(2x)}{\cos^3(2x)}$

27.6. $f(x)=\frac{1}{1+\cos x}$

$f'(x)=\frac{1'(1+\cos x)-1(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}=\frac{0-(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}=$

$=\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$

27.7. $f(x)=2\tan\frac{1}{x}$

$f'(x)=2\left(\tan\frac{1}{x}\right)'=2\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}=$

$=2\frac{\frac{1'x-1x'}{x^2}}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}=2\frac{\frac{0-1}{x^2}}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{\frac{-2}{x^2}}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}=-\frac{2}{x^2\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}$

27.8. $f(x)=\tan^2(x^2+2)$

$f'(x)=2\tan(x^2+2)\times[\tan(x^2+2)]'=$

$=2\tan(x^2+2)\times\frac{(x^2+2)'}{\cos^2(x^2+2)}=$

$=2\frac{\sin(x^2+2)}{\cos(x^2+2)}\times\frac{2x}{\cos^2(x^2+2)}=\frac{4x\sin(x^2+2)}{\cos^3(x^2+2)}$

27.9. $f(x)=\tan x+\frac{1}{\tan x}$

$f'(x)=(\tan x)'+\left(\frac{1}{\tan x}\right)'=$

$=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1'\tan x-1\times(\tan x)'}{\tan^2 x}=$

$=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{0-\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x\ \tan^2 x}=$

$=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cancel{\cos^2 x}\frac{\sin^2 x}{\cancel{\cos^2 x}}}=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}=$

$=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1-\cos^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1-2\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$

Questão 28

$f(x)=x\sin(\pi x)$

$f'(x)=x'\sin(\pi x)+x[\sin(\pi x)]'=$

$=\sin(\pi x)+x\left[(\pi x)'\cos(\pi x)\right]=$

$=\sin(\pi x)+x[\pi\cos(\pi x)]=\sin(\pi x)+\pi x\cos(\pi x)$

$m=f'(1)=\sin\pi+\pi\cos\pi=0+\pi\times(-1)=-\pi$

$f(1)=\sin\pi=0$

Ponto de tangência: $(1,0)$

Declive: $m=-\pi$

$y-y_0=m(x-x_0)\Leftrightarrow y-0=-\pi(x-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-\pi x+\pi$

Pág. 37

Questão 29

29.1. $f'(x)=\left(\frac{2}{x}\right)'-\frac{1}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)\right]'=$

$=\frac{2'x-2x'}{x^2}-\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\pi x}{3}\right)'\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)\right]=$

$=\frac{0-2}{x^2}-\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)\right]=-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)$

$f'(x)=-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)$

$m=f'(3)=-\frac{2}{3^2}-\frac{1}{3}\cos\left(\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}\right)=-\frac{2}{9}-\frac{1}{3}\times(-1)=\frac{1}{9}$

$f(3)=\frac{2}{3}-\frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}\right)=\frac{2}{3}-\frac{1}{\pi}\times 0=\frac{2}{3}$

Ponto tangência: $\left(3,\frac{2}{3}\right)$

Declive: $m=\frac{1}{9}$

$y-y_0=\frac{1}{9}(x-x_0)\Leftrightarrow y-\frac{2}{3}=\frac{1}{9}(x-3)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y-\frac{2}{3}=\frac{1}{9}x-\frac{1}{3}\Leftrightarrow y=\frac{1}{9}x-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\Leftrightarrow y=\frac{1}{9}x+\frac{1}{3}$

t: $y=\frac{1}{9}x+\frac{1}{3}$

29.2. $r\perp t\Leftrightarrow m_r=-\frac{1}{m_t}\Leftrightarrow m_r=-\frac{1}{\frac{1}{9}}\Leftrightarrow m=-9$

$y-y_0=m(x-x_0)\Leftrightarrow y-\frac{2}{3}=-9(x-3)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y-\frac{2}{3}=-9x+27\Leftrightarrow y=-9x+27+\frac{2}{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-9x+\frac{83}{3}\qquad r:\ y=-9x+\frac{83}{3}$

Questão 30

30.1. $f'(x)=\left(x^2\right)'\cos(\pi x)+x^2\left[\cos(\pi x)\right]'=$

$=2x\cos(\pi x)+x^2\left[(\pi x)'\left(-\sin(\pi x)\right)\right]=$

$=2x\cos(\pi x)+x^2\left[\pi\left(-\sin(\pi x)\right)\right]=$

$=2x\cos(\pi x)-\pi x^2\sin(\pi x)$

$m=f'(1)=2\times 1\cos\pi-\pi\times 1\sin\pi=$

$=2\cos\pi-\pi\sin\pi=2\times(-1)-\pi\times 0=-2$

$f(1)=\cos\pi=-1$

Ponto de tangência: $(1,-1)$

Declive: $m=-2$

$y-y_0=m(x-x_0)\Leftrightarrow y-(-1)=-2(x-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y+1=-2x+2\Leftrightarrow y=-2x+1$; $t:\ y=-2x+1$

30.2. $g'(x)=\frac{x'(x-2)-x(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{1(x-2)-x(1)}{(x-2)^2}=$

$=\frac{\cancel{x}-2-\cancel{x}}{(x-2)^2}=-\frac{2}{(x-2)^2}$

$g'(x)=-2\Leftrightarrow -\frac{2}{(x-2)^2}=-2\underset{x\neq 2}{\Leftrightarrow}-2=-2\times(x-2)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-2)^2=1\Leftrightarrow x-2=1\vee x-2=-1\Leftrightarrow x=3\vee x=1$

$g(3)=\frac{3}{3-2}=3$

A reta t: $y=-2x+1$ não passa no ponto de coordenadas $(3,3)$.

$g(1)=\frac{1}{1-2}=-1$

A reta t passa no ponto de coordenadas $(1,-1)$, pois $-1=-2\times 1+1$.

Logo, a reta t: $y=-2x+1$ também é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1.

30.3. Como se verificou na línea anterior, $g'(3)=-2$, ou seja, a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 3 tem declive igual a -2, isto é, é paralela à reta t.

Pág. 38

Questão 31

$f(x)=\frac{1}{5}x^3+x^2+5$

$f(5)=\frac{1}{5}\times 5^3+5^2+5=5^2+5^2+5=55$

$f'(x)=\frac{1}{5}\times 3x^2+2x+0=\frac{3}{5}x^2+2x$

$f'(5)=\frac{3}{5}\times 5^2+2\times 5=3\times 5+2\times 5=15+10=25$

$f''(x)=\frac{3}{5}\times 2x+2=\frac{6}{5}x+2$

$f''(5)=\frac{6}{5}\times 5+2=6+2=8$

Questão 32

32.1. $f'(x)=4x^3-24\times 2x+64+0=4x^3-48x+64$

$f''(x)=4\times 3x^3-48+0=12x^2-48$

$f''(x)=0\Leftrightarrow 12x^2-48=0\Leftrightarrow 12x^2=48\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-2\vee x=2$

zeros de f'': $x=-2\vee x=2$

32.2. $f'(-2)=4\times(-2)^3-48\times(-2)+64=128$

-2 é zero de f'', mas não é zero de f'

$f'(2)=4\times 2^3-48\times 2+64=32-96+64=0$

2 é zero comum de f' e f''.

Pág. 39

Questão 33

33.1. $f(x)=\frac{x^4-3x}{2}-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}x$

$f'(x)=\frac{1}{2}\times 4x^3-\frac{3}{2}=2x^3-\frac{3}{2}$

$f''(x)=2\times 3x^2-0=6x^2$

33.2. $f(x)=\frac{1}{x^2}$

$f'(x)=\frac{1'x^2-1\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}-\frac{0-2x}{x^4}=\frac{-2}{x^3}$

$f''(x)=\frac{(-2)'x^3-(-2)\left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2}=\frac{0+2\times 3x^2}{x^6}=\frac{6}{x^4}$

33.3. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-x=x^{-\frac{1}{2}}-x$

$f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}-1=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-1$

$f''(x)=-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}-1}-0=\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}=$

$=\frac{3}{4\sqrt{x^5}}=\frac{3}{4\sqrt{x^2\times x^2\times x}}=\frac{3}{4x^2\sqrt{x}}=\frac{3\sqrt{x}}{4x^2\sqrt{x}\sqrt{x}}=$

$=\frac{3\sqrt{x}}{4x^3}$

33.4. $f(x)=(x-1)^4$

$f'(x)=4(x-1)^3(x-1)'=4(x-1)^3$

$f''(x)=4\left[(x-1)^3\right]'=4\times 3(x-1)^2(x-1)'=12(x-1)^2$

33.5. $f(x)=\frac{x}{x-1}$

$f'(x)=\frac{x'(x-1)-x(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x}{(x-1)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2}$

$f''(x)=\frac{(-1)'(x-1)^2-(-1)\left[(x-1)^2\right]'}{\left[(x-1)^2\right]^2}=$

$=\frac{0+2(x-1)(x-1)'}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2}{(x-1)^3}$

33.6. $f(x)=\sqrt{x-1}=(x-1)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x)=\frac{1}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}-1}(x-1)'=\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}\times 1=\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x)=\frac{1}{2}\left[(x-1)^{-\frac{1}{2}}\right]'=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}-1}(x-1)'\right]=$

$=-\frac{1}{4}(x-1)^{-\frac{3}{2}}\times 1=\frac{-1}{4(x-1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-1}{4\sqrt{(x-1)^3}}=$

$=-\frac{1}{4(x-1)\sqrt{x-1}}=-\frac{\sqrt{x-1}}{4(x-1)\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}}=$

$=-\frac{\sqrt{x-1}}{4(x-1)^2}$

33.7. $f(x)=\frac{x-2}{2x+1}$

$f'(x)=\frac{(x-1)'(2x+1)-(x-2)(2x+1)'}{(2x+1)^2}=$

$=\frac{2x+1-(x-2)\times 2}{(2x+1)^2}=\frac{\cancel{2x}+1-\cancel{2x}+4}{(2x+1)^2}=\frac{5}{(2x+1)^2}$

$f''(x)=\frac{5'(2x+1)^2-5\left[(2x+1)^2\right]'}{\left[(2x+1)^2\right]^2}=$

$=\frac{0-5\left[2(2x+1)(2x+1)'\right]}{(2x+1)^4}=\frac{-5\left[2(2x+1)\times 2\right]}{(2x+1)^4}=$

$=\frac{-20(2x+1)}{(2x+1)^4}=\frac{-20}{(2x+1)^3}$

33.8. $f(x)=x^2-\frac{1}{x^2}$

$f'(x)=\left(x^2\right)'-\left(\frac{1}{x^2}\right)'=2x-\frac{1'x^2-1\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}=$

$=2x-\frac{0-2x}{x^4}=2x+\frac{2}{x^3}$

$f''(x)=(2x)'+\left(\frac{2}{x^3}\right)'=2+\frac{2'x^3-2\left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2}=$

$=2+\frac{0-2\times 3x^2}{x^6}=2-\frac{6x^2}{x^6}=2-\frac{6}{x^4}$

33.9. $f(x)=x^2+\frac{2}{\sqrt{x}}=x^2+2x^{-\frac{1}{2}}$

$f'(x)=\left(x^2\right)'-\left(2x^{-\frac{1}{2}}\right)'=2x-2\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=$

$=2x+\cancel{2}\times\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)x^{-\frac{1}{2}-1}x'=2x-x^{-\frac{3}{2}}$

$f''(x)=(2x)'-\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)'=2-\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}-1}x'=$

$=2+\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}=2+\frac{3}{2x^{\frac{5}{2}}}=2+\frac{3}{2\sqrt{x^5}}=2+\frac{3}{2\sqrt{x^2x^2x}}=$

$=2+\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}=2+\frac{3\sqrt{x}}{2x^3}$

Questão 34

34.1. $f(x)=x^3-2x^2-4x+1$

$f'(x)=3x^2-4x-4$; $f''(x)=6x-4$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-4=0 \Leftrightarrow 6x=4 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$

34.2. $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$

$f'(x)=\frac{\left(x^2\right)'(x+1)-x^2(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=$

$=\frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

$f''(x)=\frac{\left(x^2+2x\right)'(x+1)^2-\left(x^2+2x\right)\left[(x+1)^2\right]'}{\left[(x+1)^2\right]^2}=$

$=\frac{(2x+2)(x+1)^2-\left(x^2+2x\right)2(x+1)^{2-1}(x+1)'}{(x+1)^4}=$

$=\frac{(2x+2)(x+1)^2-\left(x^2+2x\right)2(x+1)\times 1}{(x+1)^4}=$

$=\frac{\cancel{(x+1)}\left[(2x+2)(x+1)-2\left(x^2+2x\right)\right]}{(x+1)^{\cancel{4}3}}=$

$=\frac{\cancel{2x^2}+\cancel{2x}+\cancel{2x}+2-\cancel{2x^2}-\cancel{4x}}{(x+1)^3}=\frac{2}{(x+1)^3}$

$D_{f''}=D_{f'}=D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2}{(x+1)^3}=0$; equação impossível

Não existe $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ tal que $f''(x)=0$.

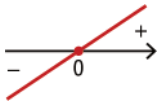
Pág. 40

Questão 35

35.1. $f(x)=x^3$; $f'(x)=\left(x^3\right)'=3x^2$; $f''(x)=\left(3x^2\right)'=6x$

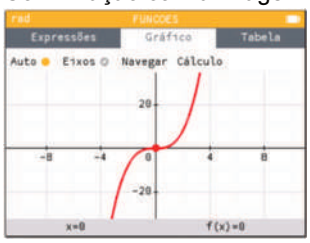
$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x=0 \Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$		$\cup$



O gráfico de *f* tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty,0[$ e voltada para cima em $]0,+\infty[$.

Confirmação com a imagem da calculadora:

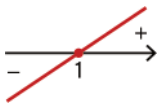


35.2. $f(x)=x^3-3x^2$; $f'(x)=\left(x^3-3x^2\right)'=3x^2-6x$

$f''(x)=\left(3x^2-6x\right)'=6x-6$

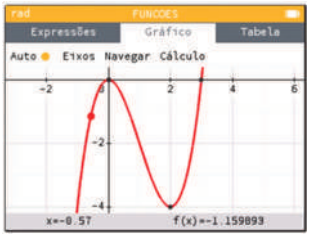
$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-6=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$		$\cup$



O gráfico de *f* tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty,1[$ e concavidade voltada para cima em $]1,+\infty[$.

Confirmação com a imagem da calculadora:

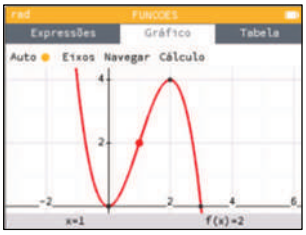


Pág. 41

Questão 36

36.1. $f(x)=3x^2-x^3$

Vamos começar por obter um esboço do gráfico da função *f* com a calculadora.



Por observação do gráfico parece que a concavidade é voltada para cima em $]-\infty,1[$ e voltada para baixo em $]1,+\infty[$.

Vamos confirmar analiticamente:

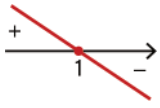
$f'(x)=\left(3x^2-x^3\right)'=6x-3x^2$

$f''(x)=\left(6x-3x^2\right)'=6-6x$

$D_{f''}=D_{f'}=D_f=\mathbb{R}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6-6x=0 \Leftrightarrow x=1$

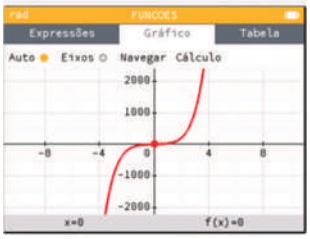
x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cup$		$\cap$



O gráfico de *f* tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty,1[$ e concavidade voltada para cima em $]1,+\infty[$.

36.2. $g(x)=3x^5+10x^3+15x$

Vamos começar por obter um esboço do gráfico da função *f* com a calculadora.



Por observação do gráfico parece que a concavidade é voltada para baixo em $]-\infty,0[$ e voltada para cima em $]0,+\infty[$.

Vamos confirmar analiticamente:

$g'(x)=\left(3x^5+10x^3+15x\right)'=15x^4+30x^2+15$

$g''(x)=\left(15x^4+30x^2+15\right)'=60x^3+60x$

$D_{g''}=D_{g'}=D_g=\mathbb{R}$

$g''(x)=0\Leftrightarrow 60x^3+60x=0\Leftrightarrow 60x\left(x^2+1\right)=0\Leftrightarrow$

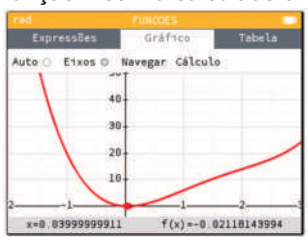
$\Leftrightarrow 60x=0\vee \underbrace{x^2+1=0}_{\text{Eq. impossível}}\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g''	$-$	0	$+$
g	$\cap$		$\cup$

O gráfico de *g* tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty,0[$ e concavidade voltada para cima em $]0,+\infty[$.

36.3. $h(x)=x^4-6x^3+12x^2-x$

Vamos começar por obter um esboço do gráfico da função *h* com a calculadora.



Por observação do gráfico parece que a concavidade é voltada para cima em $]-\infty,1[$ e em $]2,+\infty[$ e voltada para baixo em $]1,2[$.

Vamos confirmar analiticamente:

$h'(x)=\left(x^4-6x^3+12x^2-x\right)'=4x^3-18x^2+24x-1$

$h''(x)=\left(4x^3-18x^2+24x-1\right)'=12x^2-36x+24$

$D_{h''}=D_{h'}=D_h=\mathbb{R}$

$h''(x)=0\Leftrightarrow 12x^2-36x+24=0\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times2}}{2\times1}\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{1}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{3-1}{2}\vee x=\dfrac{3+1}{2}\Leftrightarrow x=1\vee x=2$

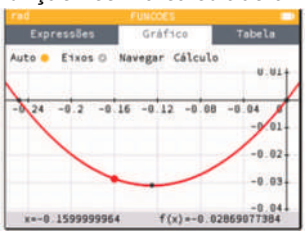


x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
h''	$+$		$-$		$+$
h	$\cup$		$\cap$		$\cup$

O gráfico de *h* tem concavidade voltada para cima em $]-\infty,1[$ e em $]2,+\infty[$ e concavidade voltada para baixo em $]1,2[$.

36.4. $i(x)=\dfrac{x^4}{6}+2x^2+\dfrac{x}{2}$

Vamos começar por obter um esboço do gráfico da função *i* com a calculadora.



Por observação do gráfico parece que a concavidade é voltada para cima em $\mathbb{R}$.

Vamos confirmar analiticamente:

$i'(x)=\left(\dfrac{x^4}{6}+2x^2+\dfrac{x}{2}\right)'=\dfrac{4}{6}x^3+4x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}x^3+4x+\dfrac{1}{2}$

$i''(x)=\left(\dfrac{2}{3}x^3+4x+\dfrac{1}{2}\right)'=\dfrac{2}{\cancel{3}}\times\cancel{3}x^2+4=2x^2+4$

$D_{i''}=D_{i'}=D_i=\mathbb{R}$

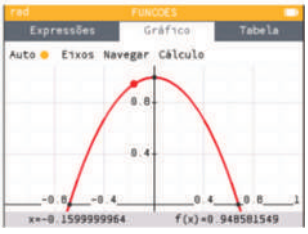
$i''(x)=0\Leftrightarrow 2x^2+4=0$ equação impossível

$i''(x)>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Como $i''(x)>0$, para todo $x\in\mathbb{R}$, o gráfico de *i* tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$.

36.5. $j(x)=1-2x^2-\dfrac{x^4}{3}$

Vamos começar por obter um esboço do gráfico da função *j* com a calculadora.



Por observação do gráfico parece que a concavidade é voltada para baixo em $\mathbb{R}$.

Vamos confirmar analiticamente:

$j'(x)=\left(1-2x^2-\dfrac{x^4}{3}\right)'=-4x-\dfrac{4}{3}x^3$

$j''(x)=\left(-4x-\frac{4}{3}x^3\right)'=-4-\frac{4}{3}\times 3x^2=-4-4x^2$

$D_{j''}=D_{j'}=D_j=\mathbb{R}$

$j''(x)=0\Leftrightarrow -4-4x^2=0\Leftrightarrow$

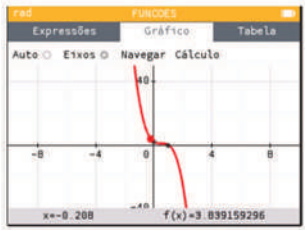
$\Leftrightarrow 4x^2=-4$; equação impossível.

$j''(x)<0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Como $j''(x)<0$, para todo $x\in\mathbb{R}$, o gráfico de j tem a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}$.

36.6. $k(x)=1-(2x-1)^3$

Vamos começar por obter um esboço do gráfico da função k com a calculadora.



Por observação do gráfico parece que a concavidade é voltada para cima em $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ e voltada para baixo em $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.

Vamos confirmar analiticamente:

$k'(x)=\left[1-(2x-1)^3\right]'=1'-\left[(2x-1)^3\right]'=$

$=0-\left[3(2x-1)^{3-1}(2x-1)'\right]=-\left[3(2x-1)^2\times 2\right]=$

$=-6(2x-1)^2$

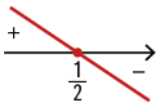
$k''(x)=\left[-6(2x-1)^2\right]'=-6\left[-6(2x-1)^2\right]'=$

$=-6\left[2(2x-1)(2x-1)'\right]'=-6\left[2(2x-1)\times 2\right]=$

$=-24(2x-1)=-48x+24$

$D_{k''}=D_{k'}=D_k=\mathbb{R}$

$k''(x)=0\Leftrightarrow -48x+24=0\Leftrightarrow x=\frac{24}{48}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$



x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
k''	+	0	–
k	⌣		⌢

O gráfico de k tem concavidade voltada para cima em $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ e concavidade voltada para baixo em $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.

Pág. 43

Questão 37

37.1. $f(x)=\frac{4}{9}+6x^2-9x^4$

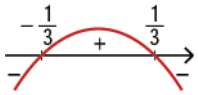
$f'(x)=\left(\frac{4}{9}+6x^2-9x^4\right)'=12x-36x^3$

$f''(x)=\left(12x^2-36x^3\right)'=12-108x^2$

$D_{f''}=D_{f'}=D_f=\mathbb{R}$

$f''(x)=0\Leftrightarrow 12-108x^2=0\Leftrightarrow 108x^2=12\Leftrightarrow$

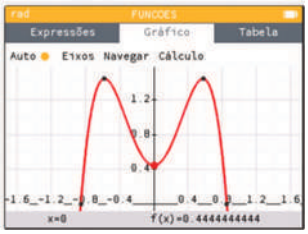
$\Leftrightarrow x^2=\frac{12}{108}\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{9}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{9}}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}\vee x=\frac{1}{3}$



x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
f''	–	0	+	0	–
f	⌢	1	⌣	1	⌢

$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}+6\left(-\frac{1}{3}\right)^2-9\times\left(-\frac{1}{3}\right)^4=1$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}+6\left(\frac{1}{3}\right)^2-9\times\left(\frac{1}{3}\right)^4=1$



O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty,-\frac{1}{3}\right[$ e em $\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$ e concavidade voltada para cima em $\left]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right[$.

Pontos de inflexão: $\left(-\frac{1}{3},1\right)$ e $\left(\frac{1}{3},1\right)$

37.2. $g(x)=x^3-2x^2+x$

$g'(x)=\left(x^3-2x^2+x\right)'=3x^2-4x+1$

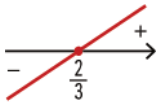
$g''(x)=\left(3x^2-4x+1\right)'=6x-4$

$D_{g''}=D_{g'}=D_g=\mathbb{R}$

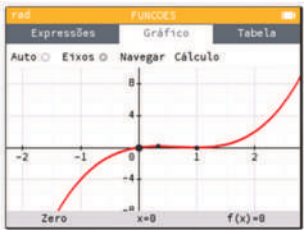
$g''(x)=0\Leftrightarrow 6x-4=0\Leftrightarrow x=\frac{4}{6}\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
g''	–	0	+
g	⌢	$\frac{2}{27}$	⌣

P.I.



$g\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3-2\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$



O gráfico de *g* tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty,\frac{2}{3}\right[$ e tem a concavidade voltada para cima em $\left]\frac{2}{3},+\infty\right[$.

Pontos de inflexão: $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{27}\right)$

37.3. $h(x)=\frac{3x^5}{10}-x^4+x^3$

$h'(x)=\left(\frac{3x^5}{10}-x^4+x^3\right)'=\frac{3}{10}\times 5x^4-4x^3+3x^2=$

$=\frac{3}{2}x^4-4x^3+3x^2$

$h''(x)=\left(\frac{3}{2}x^4-4x^3+3x^2\right)'=\frac{3}{2}\times 4x^3-12x^2+6x=$

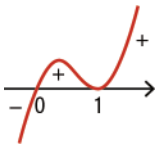
$=6x^3-12x^2+6x$

$D_{h''}=D_{h'}=D_h=\mathbb{R}$

$h''(x)=0\Leftrightarrow 6x^3-12x^2+6x=0\Leftrightarrow$

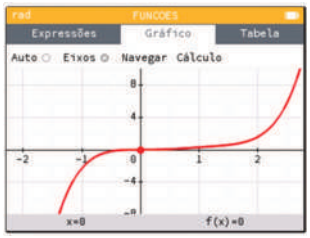
$\Leftrightarrow 6x\left(x^2-2x+1\right)=0\Leftrightarrow 6x(x-1)^2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x=0\vee(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=0\vee x=1$



x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
h''	−	0	+	0	+
h	⌒	0	⌣	$\frac{3}{10}$	⌣

$h(0)=0$; $h(1)=\frac{3\times 1^5}{10}-1^4+1^3=\frac{3}{10}$



O gráfico de *h* tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty,0[$ e concavidade voltada para cima em $]0,+\infty[$.

Ponto de inflexão: $(0,0)$

37.4. $i(x)=\frac{x+1}{x-1}$; $D_i=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$i'(x)=\frac{(x-1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=$

$=\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$

$i''(x)=\frac{(-2)'(x-1)^2-(-2)\left[(x-1)^2\right]'}{\left[(x-1)^2\right]^2}=$

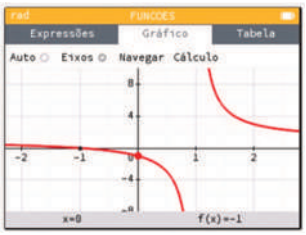
$=\frac{0+2\left[2(x-1)(x-1)'\right]}{(x-1)^4}=\frac{4(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{4}{(x-1)^3}$

$D_{i''}=D_{i'}=D_i=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$i''(x)=0\Leftrightarrow\frac{4}{(x-1)^3}=0$; equação impossível.

$i''(x)$ não tem zeros.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
i''	−	N.D.	+
i	⌒	N.D.	⌣



O gráfico de *i* tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty,1[$ e concavidade voltada para cima em $]1,+\infty[$.

Ponto de inflexão: não tem.

37.5. $j(x)=\frac{x}{x^2+3}$

$j'(x)=\frac{x'\left(x^2+3\right)-x\left(x^2+3\right)'}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{x^2+3-x(2x)}{\left(x^2+3\right)^2}=$

$=\frac{x^2+3-2x^2}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{-x^2+3}{\left(x^2+3\right)^2}$

$j''(x)=\frac{\left(-x^2+3\right)'\left(x^2+3\right)^2-\left(-x^2+3\right)\left[\left(x^2+3\right)^2\right]'}{\left[\left(x^2+3\right)^2\right]^2}=$

$=\frac{-2x\left(x^2+3\right)^2-\left(-x^2+3\right)\left[2\left(x^2+3\right)\left(x^2+3\right)'\right]}{\left(x^2+3\right)^4}=$

$=\frac{-2x\left(x^2+3\right)^2-\left(-x^2+3\right)\left[2\left(x^2+3\right)(2x)\right]}{\left(x^2+3\right)^4}=$

$$= \frac{-2x\left(x^2+3\right)^2 - 4x\left(-x^2+3\right)\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+3\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(x^2+3\right)\left[-2x\left(x^2+3\right) - 4x\left(-x^2+3\right)\right]}{\left(x^2+3\right)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{-2x^3 - 6x + 4x^3 - 12x}{\left(x^2+3\right)^3} = \frac{2x^3 - 18x}{\left(x^2+3\right)^3}$$

$D_{j''} = D_{j'} = D_j = \mathbb{R}$

$$j''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - 18x}{\left(x^2+3\right)^3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 18x = 0 \wedge \underbrace{\left(x^2+3\right)^3 \neq 0}_{\text{condição universal}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x\left(x^2-9\right) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \vee x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

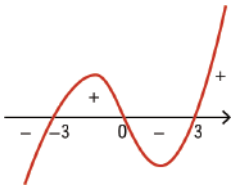
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3 \vee x = 3$$

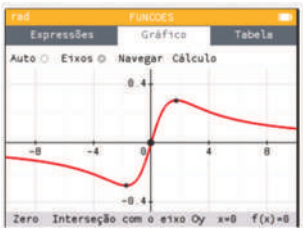
x	$-\infty$	-3		0		3	$+\infty$
j''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
j	⌒	$-\frac{1}{4}$	⌣	0	⌒	$\frac{1}{4}$	⌣
		P.I.		P.I.		P.I.	

$$j(-3) = \frac{-3}{(-3)^2+3} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

$$j(0) = \frac{0}{0^2+3} = 0$$

$$j(3) = \frac{3}{3^2+3} = \frac{1}{4}$$





O gráfico de *j* tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-3[$ e em $]0,3[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-3,0[$ e $]3,+\infty[$.

Ponto de inflexão: $\left(-3,-\frac{1}{4}\right)$, $(0,0)$ e $\left(3,\frac{1}{4}\right)$.

37.6. $k(x) = \sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}}$

$D_k = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \geq 0\} = [-1,+\infty[$

$$k'(x) = \left[(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}-1}(x+1)' = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$D_{k'} =]-1,+\infty[$

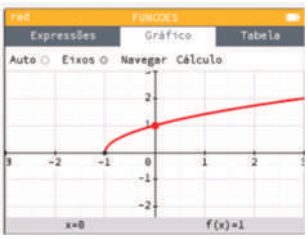
$$k''(x) = \left[\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(x+1)^{-\frac{1}{2}-1}(x+1)' =$$

$$= -\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4(x+1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4\sqrt{(x+1)^3}} =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{(x+1)^2(x+1)}} = -\frac{1}{4(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$D_{k''} =]-1,+\infty[$

$k''(x) < 0$, para todo $x \in]-1,+\infty[$.



Como $k''(x) < 0$ para todo $x \in]-1,+\infty[$, o gráfico de *k* tem a concavidade voltada para baixo em todo o domínio.

Ponto de inflexão: não tem.

37.7. $l(x) = \sqrt{1+x^2} = \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Como $1+x^2 > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, $D_l = \mathbb{R}$

$$l'(x) = \left[\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(1+x^2\right)' =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\cancel{2}x\right) = x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$l''(x) = \left[x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]' = x'\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} + x\left[\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]' =$$

$$= \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} + x\left[-\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}-1}\left(1+x^2\right)'\right] =$$

$$= \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} + x\left[-\frac{1}{\cancel{2}}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(\cancel{2}x\right)\right] =$$

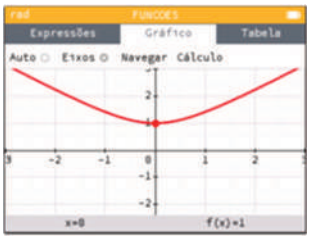
$$= \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} - x^2\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{1+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}$$

$D_{l''} = D_{l'} = D_l = \mathbb{R}$.

$l''(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

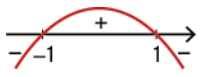


Como $l''(x)>0$, para todo $x\in\mathbb{R}$, o gráfico de l tem a concavidade voltada para cima em todo o seu domínio.
Ponto de inflexão: não tem.

37.8. $m(x)=x+\sqrt{1-x^2}=x+\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$D_m=\left\{x\in\mathbb{R}:1-x^2\geq 0\right\}=[-1,1]$

C.A. $\left|\ 1-x^2=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=-1\vee x=1\right.$



$m'(x)=\left[x+\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]'=1+\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(1-x^2\right)'=$

$=1+\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-2x\right)=1-x\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

$D_{m'}=]-1,1[$

$m''(x)=\left[1-x\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]'=$

$=1'-\left[x'\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+x\left[\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]'\right]=$

$=-\left[\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+x\left[-\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}-1}\times\left(1-x^2\right)'\right]\right]=$

$=-\left[\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+x\left[-\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\times\left(-2x\right)\right]\right]=$

$=-\left[\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+x^2\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]=$

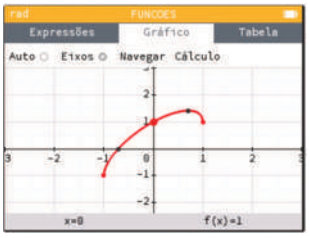
$=-\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}-x^2\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}=$

$=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x^2}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}=$

$=\frac{-1+x^2-x^2}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}=\frac{-1}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$

$D_{m''}=D_{m'}=]-1,1[$

$m''(x)<0$, para todo o $x\in\,]-1,1[$.



Como $m''(x)<0$, para todo $x\in\,]-1,1[$, o gráfico de m tem a concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio.
Ponto de inflexão: não tem.

Pág. 44

Questão 38

38.1. Se f é contínua em $\mathbb{R}$, então é contínua no ponto O.

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2+4x\right)=0=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2+k\right)=k$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow k=0$

38.2. $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

C.A. $\left|\ f(0)=0\right.$

Como à direita e à esquerda do ponto O a função f é definida por expressões diferentes, é necessário calcular as derivadas laterais:

$f'\left(0^-\right)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^2+4h-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h(h+4)}{h}=4$

C.A. $\left|\ f(x)=x^2+4x\right.$

$f'\left(0^+\right)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2h^2-0}{h}=0$

C.A. $\left|\ f(x)=2x^2\right.$

Como $f'\left(0^-\right)\neq f'\left(0^+\right)$, não existe derivada de f no ponto $x=0$.
f não é diferenciável no ponto $x=0$.

38.3. Para $x<0$, $f'(x)=\left(x^2+4x\right)'=2x+4$;

$f''(x)=(2x+4)'=2>0$

Para $x>0$, $f'(x)=\left(2x^2\right)'=4x$;

$f''(x)=4>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	+		+
f	⌣	0	⌣

Como $f''(x)>0$, para todo $x\in\,]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$, o gráfico de f não tem pontos de inflexão.

Questão 39

39.1. $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x^3=0$;

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(kx^2\right)=0=f(0)$

Como $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$, f é contínua no ponto $x=0$.

$f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

C.A. $\left|\ f(0)=0\right.$

Como à direita e à esquerda do ponto *O* a função *f* é definida por expressões diferentes, é necessário calcular as derivadas laterais:

$f'(0^-)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^3-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}h^2=0$

C.A. $\mid f(x)=x^3$

$f'(0^+)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{kh^2-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(kh)=0$

C.A. $\mid f(x)=kx^2$

Como $f'(0^-)=f'(0^+)$, f é diferenciável no ponto $x=0$ e $f'(0)=0$.

39.2. Para $x<0$, $f'(x)=\left(x^3\right)'=3x^2$;

$f''(x)=\left(3x^2\right)'=6x<0$

Para $x>0$, $f'(x)=\left(kx^2\right)'=2kx$;

$f''(x)=(2kx)'=2k$

Para o ponto de abcissa 0 ser o ponto de inflexão, $2k>0$ logo, $k>0$.

$k\in\,]0,+\infty[$

Pág. 45

Questão 40

Tendo em atenção a monotonia de *f* e o sentido das concavidades do gráfico, podemos tirar conclusões sobre o sinal de f' e de f''.

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
f'	−	0	+	+	+	0	−
f''	+	+	+	0	−	−	−

Opção (A)

$f'(-3)<0$ e $f''(-3)>0$; $f'(-3)\times f''(-3)>0$ Falsa

Opção (B)

$f'(-1)>0$ e $f''(-1)>0$;

$f'(-1)\times f''(-1)>0$ Verdadeira

Opção (C)

$f'(1)>0$ e $f''(1)<0$; $f'(1)\times f''(1)>0$ Falsa

Opção (D)

$f'(3)<0$ e $f''(3)<0$; $f'(3)\times f''(3)<0$ Falsa

A opção (B) é verdadeira.

Questão 41

$f(x)=x^3+3kx^2+x+k$

$f'(x)=\left(x^3+3kx^2+x+k\right)'=3x^2+6kx+1$

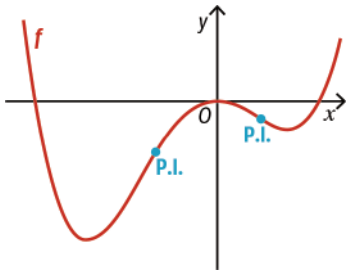
$f''(x)=\left(3x^2+6kx+1\right)'=6x+6k$

Como o ponto de abcissa 2 é ponto de inflexão, $f''(2)=0$.

$f''(2)=0\Leftrightarrow 6\times 2+6k=0\Leftrightarrow 6k=-12\Leftrightarrow k=-2$

Pág. 46

Questão 42



Por observação do gráfico, existem dois pontos de inflexão que não são simétricos, isto é, f'' tem duas raízes não simétricas. Assim, rejeita-se a opção (A) e a opção (D).

Na opção (A),

$f''(x)=0\Leftrightarrow x^2-2=0\Leftrightarrow x=-\sqrt{2}\vee x=\sqrt{2}$.

Na opção (D),

$f''(x)=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1\vee x=1$.

Na opção (B),

$f''(x)=0\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 1\times(-2)}}{2\times 1}\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm 3}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2\vee x=-1$

Na opção (C),

$f''(x)=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow$

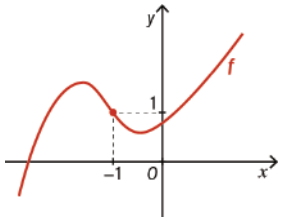
$\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times 1\times(-2)}}{2\times 1}\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm 3}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-2\vee x=1$

Como o gráfico sugere que o ponto de inflexão com abcissa negativa é maior em valor absoluto que o que tem abcissa positiva, a opção correta é a (C). Opção (C)

Questão 43

$f''(x)=x+1$; $f''(x)=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$

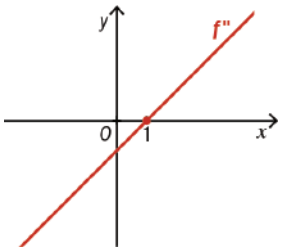


x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''	−	0	+
f	∩	P.I.	∪

Pág. 47

Questão 44

A partir de monotonia de f' pode encontrar-se o sinal de f''.



x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$-$		$+$
f'	$\searrow$	0	$\nearrow$

Questão 45

$f''(x)=\frac{1}{x}$

Se $x>0$, $f''(x)>0$ e f' estritamente crescente.

Se $x<0$, $f''(x)<0$ e f' estritamente decrescente.

Dos gráficos apresentados, a opção que verifica estas condições é a (D).

Opção (D)

Pág. 48

Tarefas de consolidação 2

1.1. Para $x<\frac{1}{2}$, $f(x)=\sin x$, $f'(x)=(\sin x)'=\cos x$

$m=f'(0)=\cos 0=1$

Seja θ a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0.

$\tan\theta=m=f'(0)\Leftrightarrow \tan\theta=1\Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$

A inclinação da reta é $\frac{\pi}{4}$.

1.2. Para $x>\frac{1}{2}$, $f(x)=\frac{1}{x}$,

$f'(x)=\frac{1'x-1\times x'}{x^2}=\frac{0-1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$

$f'(x)=-f(x)\Leftrightarrow -\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x}\underset{(\times x)}{\Leftrightarrow} -1=-x\Leftrightarrow x=1$

$S=\{1\}$

2. $f(x)=3x^5-20x^4+30x^3$

$f'(x)=\left(3x^5-20x^4+30x^3\right)'=15x^4-80x^3+90x^2$

$f''(x)=\left(15x^4-80x^3+90x^2\right)'=60x^3-240x^2+180x$

$D_{f''}=D_{f'}=D_f=\mathbb{R}$

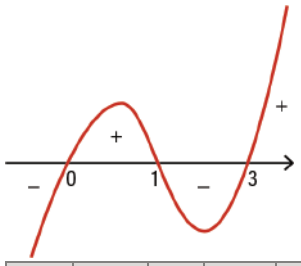
$f''(x)=0\Leftrightarrow 60x^3-240x^2+180x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 60x\left(x^2-4x+3\right)=0\Leftrightarrow 60x=0\vee x^2-4x+3=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times3}}{2\times1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee x=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}\Leftrightarrow x=0\vee x=\frac{4\pm2}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee x=3\vee x=1$



x	$-\infty$	0		1		3	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\frown$	0	$\smile$	13	$\frown$	-81	$\smile$

$f(0)=0$

$f(1)=3\times1^5-20\times1^4+30\times1^3=13$

$f(3)=3\times3^5-20\times3^4+30\times3^3=-81$

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty,0[$ e em $]1,3[$ e tem concavidade virada para cima em $]0,1[$ e em $]3,+\infty[$.

Abcissas dos pontos de inflexão: 0, 1 e 3.

3. $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

C.A. $\quad f'(x)=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Sejam $A(1,0)$ e $B(0,-1)$.

$m_{AB}=\frac{-1-0}{0-1}=1$

$AB: y=x-1$

Para $x>0$, $g(x)=x-1$.

$g(5)=5-1=4$

$g'(x)=(x-1)'=1$

$g'(5)=1$

$(f\circ g)'(5)=g'(5)\times f'[g(5)]=$

$=1\times f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$

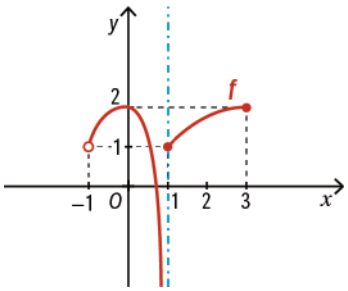
4. $a\rightarrow f$ pois é a única função que cresce, atinge um máximo e depois decresce.

$c\rightarrow f'$ pois c é positiva onde a função a é crescente, é zero onde a função a atinge um máximo e é negativa onde a função a decresce.

$b\rightarrow f''$ pois b é negativa onde a tem a concavidade para baixo, e positiva onde a tem concavidade voltada para cima.

Pág. 49

5. Por exemplo:



6.1. O reservatório fica vazio quando $h(t)=0$.

$h(t)=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1000-50t}=0 \Leftrightarrow 1000-50t=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\frac{1000}{50} \Leftrightarrow t=20$

20 horas é o tempo que leva a esvaziar o depósito.

6.2. **a)** $h(t)=\sqrt[3]{1000-50t}=(1000-50t)^{\frac{1}{3}}$

$D_h=[0,20]$

$h'(t)=\left[(1000-50t)^{\frac{1}{3}}\right]'=$

$=\frac{1}{3}(1000-50t)^{\frac{1}{3}-1}\times(1000-50t)'=$

$=\frac{1}{3}(1000-50t)^{-\frac{2}{3}}\times(-50)=\frac{-50}{3(1000-50t)^{\frac{2}{3}}}=$

$=\frac{-50}{3\sqrt[3]{(1000-50t)^2}}$

$D_{h'}=[0,20[$

Para todo $t\in[0,20[$, $h'(t)<0$.

A função h é decrescente em todo o domínio, ou seja, a altura do nível da água no depósito decresce no tempo todo.

b) $h'(1)=\frac{-50}{3\sqrt[3]{(1000-50\times1)^2}}\approx-0{,}1725$

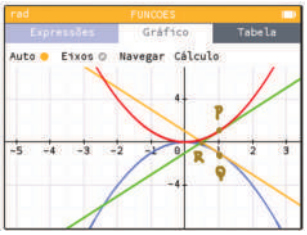
$h'(19)=\frac{-50}{3\sqrt[3]{(1000-50\times19)^2}}\approx-1{,}2280$

$|h'(1)|<|h'(19)| \Leftrightarrow |-0{,}1725|<|1{,}2280| \Leftrightarrow 0{,}1725<1{,}2280$

A velocidade de esvaziamento do depósito é menor ao fim de uma hora do que ao fim de 19 horas devido à sua forma cónica. A altura decresce mais rapidamente na parte inferior.

7. $D_f=[0,+\infty[$. Como a concavidade de f é voltada para cima em todo o seu domínio, f' é estritamente crescente. Como $f'(0)=1$, $f'(x)>1$ para todo $x\in]0,+\infty[$. Logo, f' não tem zeros.

8.



$f(x)=ax^2$

$f'(x)=2ax$

$f'(1)=2a$; $\quad m_s=2a$

$s: y=2ax+b$; $P(1,a)$

$a=2a+b \Leftrightarrow b=-a$

$y=2ax-a$

$g(x)=-ax^2$

$g'(x)=-2ax$

$g'(1)=-2a$; $\quad m_t=-2a$

$t: y=-2ax+b$; $Q(1,-a)$

$-a=-2a+b \Leftrightarrow b=a$

$y=-2ax+a$

Vamos determinar a abcissa do ponto R, ponto de interseção das retas s e t.

$2ax-a=-2ax+a \Leftrightarrow 2ax+2ax=a+a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4ax=2a \Leftrightarrow x=\frac{2\cancel{a}}{4\cancel{a}} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Vamos determinar a ordenada R:

$y=-2ax+a \Leftrightarrow y=-\cancel{2}a\times\frac{1}{\cancel{2}}+a \Leftrightarrow y=0$; $R\left(\frac{1}{2},0\right)$

$A_{[PQR]}=\frac{b\times h}{2}=\frac{\overline{PQ}\times h}{2}=\frac{\cancel{2}a\times\frac{1}{\cancel{2}}}{2}=\frac{a}{2}$

Pág. 51

Avaliação formativa 2

1. $g(x)=\frac{4}{x}$

$g'(x)=\frac{4'x-4x'}{x^2}=\frac{0-4}{x^2}=-\frac{4}{x^2}$

$g'(-1)=-\frac{4}{(-1)^2}=-4$

Sabe-se que $f'(2)=-2$.

$y=-2x+3$

$x=2$

$y=-2\times2+3=-1$

$f(2)=-1$

$(g\circ f)'(2)=f'(2)\times g'(f(2))=-2\times g'(-1)=$

$=-2\times(-4)=8$

Opção (D)

2. $f(x)=\frac{x^2}{2}$; $g(x)=-x^2+bx+c$

$f'(x)=\left(\frac{x^2}{2}\right)'=\frac{1}{2}\times 2x=x$

$f'(1)=1$; $m_t=1$

$t: y=x+b$

$f(1)=\frac{1^2}{2}=\frac{1}{2}$; $\left(1,\frac{1}{2}\right)$

$\frac{1}{2}=1+b \Leftrightarrow b=\frac{1}{2}-1 \Leftrightarrow b=-\frac{1}{2}$

$t: y=x-\frac{1}{2}$

$x=-1$, $y=-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$

$\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$

$g(-1)=-\frac{3}{2} \wedge g'(1)=1$

$g(-1)=-(-1)^2+b(-1)+c=-1-b+c$

$g'(x)=\left(-x^2+bx+c\right)'=-2x+b$

$g'(-1)=-2\times(-1)+b=2+b$

$\begin{cases} g(-1)=-\frac{3}{2} \\ g'(-1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-b+c=-\frac{3}{2} \\ 2+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1-(-1)+c=-\frac{3}{2} \\ b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{-1}+\cancel{1}+c=-\frac{3}{2} \\ b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c=-\frac{3}{2} \\ b=-1 \end{cases}$

$b=-1$, $c=-\frac{3}{2}$

3.1. $x^2+1>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

O sinal de f' depende do sinal de x.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	−	0	+
f	↘		↗
		Mín.	

Como f é estritamente crescente em $[0,+\infty[$, a afirmação que é necessariamente verdadeira é a opção (B), $f(1)>f(0)$.

Opção (B)

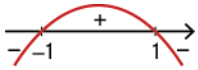
3.2. $f''=\left[f'(x)\right]'=\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'=\frac{x'\left(x^2+1\right)-x\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=$

$=\frac{x^2+1-x\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x^2+1=0 \wedge \underbrace{\left(x^2+1\right)^2\neq 0}_{\text{condição universal}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1$



x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f''	−	0	+	0	−
f	⌒	P.I.	⌣	P.I.	⌒

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-1[$ e em $]1,+\infty[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-1,1[$.

Abcissas dos pontos de inflexão: -1 e 1.

4. $f'(x)=\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]'=\frac{1}{\pi}(\pi x)'\cos(\pi x)=$

$=\frac{1}{\pi}\times\pi\cos(\pi x)=\cos(\pi x)$

$f'(1)=\cos\pi=-1$

I – b)

$h'(x)=\left(\left[g(x)\right]^3\right)'=3\left[g(x)\right]^2\times g'(x)$

$h'(0)=3\left[g(0)\right]^2\times g'(0)=3\times 2^2\times(-3)=-36$

II – a)

$(f\times g)'(0)=f'(0)\times g(0)+f(0)\times g'(0)=$

$=\cos(\pi\times 0)\times 2+\frac{1}{\pi}\sin(\pi\times 0)\times(-3)=$

$=\cos 0\times 2+\frac{1}{\pi}\sin 0\times(-3)=1\times 2+\frac{1}{\pi}\times 0\times(-3)=2$

III – c)

$m=g'(0)=-3$

$g(0)=2$; $(0,2)$

$y=-3x+b$

$2=-3\times 0+b \Leftrightarrow b=2$

$y=-3x+2$

IV – c)

I – b); **II – a)**; **III – c)**; **IV – c)**.

3. Limites e regra de L'Hôpital. Assíntotas

Pág. 52

Tarefa 3

3.1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty$

3.2. $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}\right)=-\infty$

3.3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$

3.4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$

3.5. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$

3.6. $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$

3.7. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$

3.8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$

3.9. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^3}\right)=+\infty$

3.10. $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x^3}\right)=-\infty$

3.11. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)=0$

3.12. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)=0$

Pág. 53

Questão 46

46.1. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(3x^5-x^2+1\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(3x^5\right)=3\left(-\infty\right)=-\infty$

46.2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-x^3\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-x^3\right)=-\infty$

46.3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-2x^2-x+1\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-2x^2\right)=-2\left(+\infty\right)=-\infty$

46.4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+2x-2x^3\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-2x^3\right)=-2\left(-\infty\right)=+\infty$

46.5. $\lim\limits_{x\to -2^-}\left(\frac{x}{4-x^2}\right)=\frac{-2}{0^-}=+\infty$

46.6. $\lim\limits_{x\to -2^-}\left(\frac{x}{4-x^2}\right)=\frac{-2}{0^+}=-\infty$

46.7. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{-3}{2+x^2}\right)=\frac{-3}{+\infty}=0$

Pág. 55

Questão 47

47.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-x^2}{x}\right)\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(x-x^2\right)'}{\left(x\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-2x}{1}=\frac{1-0}{1}=1$

47.2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x-x^3}{x^2-1}\right)\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(x-x^3\right)'}{\left(x^2-1\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-3x^2}{2x}=\frac{1-3\times 1^2}{2\times 1}=\frac{-2}{2}=-1$

47.3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3x}{\sqrt{x}}\right)\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(3x\right)'}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{6}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(6\sqrt{x}\right)=6\times 0=0$

47.4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{3x}\right)\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sin x\right)'}{\left(3x\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{3}=\frac{1}{3}$

47.5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{5x^2-x}{\sin\left(2x\right)}\right)\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(5x^2-x\right)'}{\left(\sin\left(2x\right)\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{10x-1}{2\cos\left(2x\right)}=$

$=\frac{10\times 0-1}{2\cos 0}=\frac{-1}{2\times 1}=-\frac{1}{2}$

47.6. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2-x}{\sqrt{2x}-2}\right)\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left(2-x\right)'}{\left(\sqrt{2x}-2\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{-1}{\frac{1}{2}\left(2x\right)^{\frac{1}{2}-1}\times 2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{-1}{\left(2x\right)^{-\frac{1}{2}}}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\left(-\sqrt{2x}\right)=-\sqrt{4}=-2$

47.7. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2-\sqrt{x^2-5}}{x-3}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to 3}\frac{\left(2-\sqrt{x^2-5}\right)'}{\left(x-3\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\frac{0-\frac{1}{2}\left(x^2-5\right)^{\frac{1}{2}-1}\times\left(x^2-5\right)'}{1}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}-\frac{1}{2}\left(x^2-5\right)^{-\frac{1}{2}}\times 2x=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\frac{-x}{\sqrt{x^2-5}}=\frac{-3}{\sqrt{3^2-5}}=\frac{-3}{2}$

47.8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\tan\left(2x\right)}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(3x\right)'}{\left(\tan\left(2x\right)\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{\frac{\left(2x\right)'}{\cos^2\left(2x\right)}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cos^2\left(2x\right)}{2}=\frac{3\cos^2\left(2\times 0\right)}{2}$

$=\frac{3\times 1}{2}=\frac{3}{2}$

47.9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1-\sin x}{\cos x}\right)\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1-\sin x)'}{(\cos x)'}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\cos x}{-\sin x}=$

$=\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\dfrac{0}{1}=0$

Questão 48

48.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x+1)'}{(x+2)'}=\dfrac{2}{1}=2$

48.2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2-1}{x+1}\right)\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x^2-1)'}{(x+1)'}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x}{1}=4(-\infty)=-\infty$

48.3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x^2+x}{x^4}\right)\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(5x^2+x)'}{(x^4)'}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10x+1}{4x^3}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10}{12x^2}=\dfrac{10}{+\infty}=0$

48.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{\sqrt{16x}}\right)\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2-1)'}{\left((16x)^{\frac{1}{2}}\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\frac{1}{2}(16x)^{\frac{1}{2}-1}\times(16x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\frac{16}{2(16x)^{\frac{1}{2}}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x\sqrt{16x}}{16}=\dfrac{+\infty(+\infty)}{16}=+\infty$

48.5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{9x}}{\sqrt{x}+1}\right)\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left((9x)^{\frac{1}{2}}\right)'}{\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{2}(9x)^{\frac{1}{2}-1}\times(9x)'}{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(9x)^{-\frac{1}{2}}\times 9}{x^{-\frac{1}{2}}}=$

$=9\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{9\cancel{x}}{\cancel{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}=9\times 9^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{9}{\sqrt{9}}=\dfrac{9}{3}=3$

Pág. 56

Questão 49

49.1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x-\sin x)'}{(x+\sin x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}=\dfrac{1-\cos 0}{1+\cos 0}=\dfrac{1-1}{1+1}=0$

49.2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos(2x))'}{(x^2)'}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-(2x)'(-\sin(2x))}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cancel{2}\sin(2x)}{\cancel{2}x}=$

$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sin(2x))'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(2x)'(\cos(2x))}{1}=$

$=\lim\limits_{x\to0}(2\cos(2x))=2\cos 0=2$

49.3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(x)-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\cos(x)-1)'}{(x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin x}{1}=\dfrac{-0}{1}=0$

49.4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)}{3x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)\right)'}{(3x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)'\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)}{3}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)}{3}=-\dfrac{2}{3}$

49.5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(2x)}{5x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\tan(2x))'}{(5x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{(2x)'}{\cos^2(2x)}}{5}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{2}{\cos^2(2x)}}{5}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{5\cos^2(2x)}=\dfrac{2}{5\cos^2(0)}=\dfrac{2}{5\times1}=\dfrac{2}{5}$

Questão 50

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\pi}{2x}\sin(4x)\right)\to$ Indeterminação $\infty\times0$

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\pi}{2x}\sin(4x)\right)=\dfrac{\pi}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(4x)}{x}$

$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\dfrac{\pi}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sin(4x))'}{(x)'}=\dfrac{\pi}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(4x)'\cos(4x)'}{1}$

$=\dfrac{\pi}{2}\lim\limits_{x\to0}(4\cos(4x))=\dfrac{\pi}{2}\times4\times\cos 0=2\pi\times1=2\pi$

Pág. 57

Questão 51

51.1. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)\to$ Indeterminação $\infty-\infty$

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x}{x^2}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

51.2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1-3x^2}{x+3}+3x\right)\to$ Indeterminação $\infty-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1-3x^2}{x+3}+3x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-3x^2+3x^2+9x}{x+3}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{9x+1}{x+3}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{(9x+1)'}{(x+3)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{9}{1}=9$$

Pág. 58

Questão 52

52.1. A concentração de sal na água do depósito é dada pelo quociente $\dfrac{\text{Quantidade de sal}}{\text{Quantidade total de água}}$ (expressos na mesma unidade)

No depósito foram introduzidas as seguintes quantidades:

Tipo de produto	Água	Água Salgada	Mistura
Total	9000	$15t$	$9000+15t$
Sal	0	$20\times15t$	$300t$

Então,

$$c(t)=\frac{300t}{9000+15t}\Leftrightarrow c(t)=\frac{20t}{600+t}$$

52.2. $c'(t)=\dfrac{(20t)'(600+t)-20t(600+t)'}{(600+t)^2}=$

$$=\frac{20(600+t)-20t\times1}{(600+t)^2}=\frac{12\,000+20t-20t}{(600+t)^2}=$$

$$=\frac{12\,000}{(600+t)^2}$$

Como $c'(t)>0$ para todo $t\geq0$, c é estritamente crescente em todo o domínio. Significa que, à medida que se introduz água salgada no depósito, a concentração de sal na água aumenta.

52.3. $\lim\limits_{t\to+\infty}c(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{20t}{600+t}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{(20t)'}{(600+t)'}=$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{20}{1}=20$$

Significa que, à medida que se introduz água salgada no depósito, a concentração de sal na água tende a aproximar-se de 20 g/l, que é o valor da concentração de sal da água introduzida.

Pág. 59

Questão 53

53.1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(2x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin(2x)}{2x}\times2\right)=$

$$=2\lim_{2x\to0}\frac{\sin(2x)}{2x}=2\times1=2$$

53.2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\sin(3x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\times\dfrac{\sin(3x)}{x}\right)=$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\times\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(3x)}{x}\right)=1\times\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\times3\right)=$$

$$=3\lim_{3x\to0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)=3\times1=3$$

53.3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\times\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)=$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\times\lim_{x\to0}\sin\left(\frac{x}{2}\right)=1\times0=0$$

53.4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+x}{\sin(2x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x+1)}{\sin(2x)}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin(2x)}\times\lim_{x\to0}(x+1)=\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(2x)}{x}}\times(0+1)=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin(2x)}{2x}\times2\right)}\times1=\frac{1}{2\lim\limits_{2x\to0}\left(\dfrac{\sin(2x)}{2x}\right)}=\frac{1}{2\times1}=\frac{1}{2}$$

Pág. 61

Questão 54

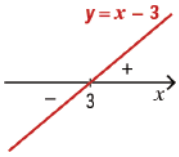
54.1. $f(x)=\dfrac{3-2x}{x-3}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}:x-3\neq0\}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

f é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical em $x=3$.

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{3-2x}{x-3}=\frac{3-2\times3}{3-3}=\frac{-3}{0}=\infty$$

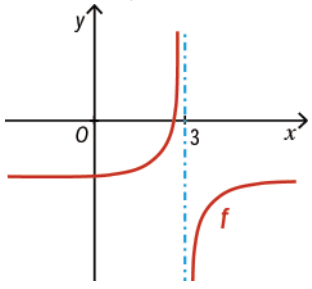
$$\lim_{x\to3^+}f(x)=\frac{-3}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to3^-}f(x)=\frac{-3}{0^-}=+\infty$$



A reta de equação $x=3$ é a única assíntota vertical do gráfico de f.

Esboço do gráfico na vizinhança da assíntota:



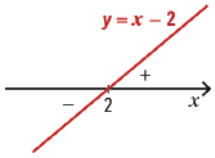
54.2. $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x-2}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}:x-2\neq0\}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

f é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical em $x=2$.

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{2x^2-1}{x-2}=\frac{2\times2^2-1}{2-2}=\frac{7}{0}=\infty$$

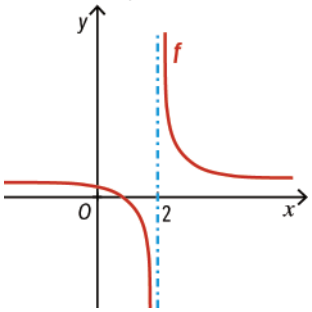
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \dfrac{7}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \dfrac{7}{0^+} = +\infty$



A reta de equação $x = 2$ é a única assíntota vertical do gráfico de *f*.

Esboço do gráfico na vizinhança da assíntota:



54.3. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-2x}$;

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

C.A.

$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow$

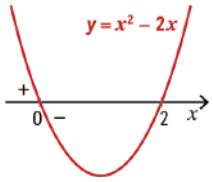
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

f é contínua. Logo, só poderão existir assíntotas verticais em 0 e 2.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-2}{x^2-2x} = \dfrac{0-2}{0^2-2\times 0} = \dfrac{-2}{0} = \infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{-2}{0^-} = +\infty$



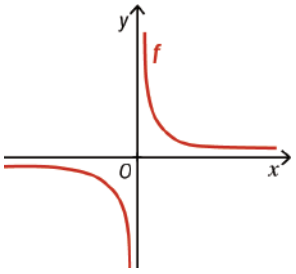
A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-2x} \overset{\frac{0}{0}}{=}_{\text{R L' H}} \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)'}{(x^2-2x)'}$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{2x-2} = \dfrac{1}{2\times 2-2} = \dfrac{1}{2}$

A reta de equação $x = 2$ não é assíntota (o limite é finito).

Esboço do gráfico na vizinhança da assíntota:



A reta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de *f*.

54.4. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

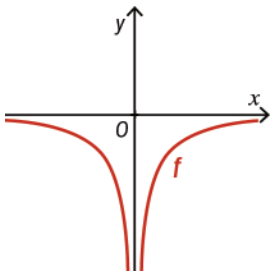
$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

f é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical em 0.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

A reta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de *f*.

Esboço do gráfico na vizinhança da assíntota:



54.5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2-x} & \text{se } x < 2 \\ 5x - 6 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

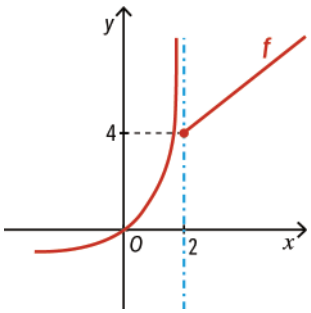
$D_f = \mathbb{R}$ e *f* é contínua para $x \neq 2$. Logo, só poderá existir assíntota vertical em $x = 2$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \left(\dfrac{x^2}{2-x}\right) = \dfrac{2^2}{2-2} = \dfrac{4}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (5x-6) - = 5\times 2 - 6 = 4 = f(2)$

A reta de equação $x = 2$ é a única assíntota vertical ao gráfico de *f*.

Esboço do gráfico na vizinhança da assíntota:



Pág. 63

Questão 55

$y = x - 3$; $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x}$

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Para que a reta de equação $y = x - 3$ seja uma assíntota ao gráfico da função *g*:

$\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x) - (x-3)] = 0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} [g(x) - (x-3)] = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}[g(x)-(x-3)]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x-1}{x}-(x-3)\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x-1-x(x-3)}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x-1-x^2+3x}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=\frac{-1}{+\infty}=0$$

De igual modo,

$$\lim_{x\to-\infty}[g(x)-(x-3)]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)=\frac{-1}{-\infty}=0$$

Logo, a reta de equação $y=x-3$ é uma assíntota ao gráfico da função *g*, em $+\infty$ e em $-\infty$.

Questão 56

$g(x)=ax+1$ e $g(1)=0$

$g(1)=0\Leftrightarrow a\times1+1=0\Leftrightarrow a=-1$

$g(x)=-x+1$

g é uma assíntota de f em $-\infty$. Então,

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+1)]=0\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x-1]=0$$

Opção (B).

Questão 57

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-1}{x^2-3x+2} & \text{se } x\le0\\[2ex] \dfrac{x}{x-1} & \text{se } x>0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-1}{x^2-3x+2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x^2-1)'}{(x^2-3x+2)'}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{2x-3}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{(4x)'}{(2x-3)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{2}=2$$

A reta de equação $y=2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f em $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1}=1$$

A reta de equação $y=1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f em $+\infty$.

O gráfico de f tem duas assíntotas horizontais de equações $y=2$ (em $-\infty$) e $y=1$ (em $+\infty$).

Pág. 64

Questão 58

58.1. $f(x)=\dfrac{2x-1}{3x+2}$

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}:3x+2\neq0\}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}$$

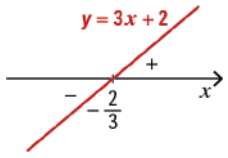
Assíntotas verticais:

f é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical em $-\dfrac{2}{3}$.

$$\lim_{x\to-\frac{2}{3}}f(x)=\lim_{x\to-\frac{2}{3}}\left(\frac{2x-1}{3x+2}\right)=\frac{2\left(-\frac{2}{3}\right)-1}{3\left(-\frac{2}{3}\right)+2}=\frac{\frac{-7}{3}}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to-\frac{2}{3}^+}f(x)=\frac{\frac{-7}{3}}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\frac{2}{3}^-}f(x)=\frac{\frac{-7}{3}}{0^-}=+\infty$$



A reta de equação $x=-\dfrac{2}{3}$ é a única assíntota vertical ao gráfico de *f*.

Assíntotas não verticais:

Se $x\to+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x(3x+2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{3x^2+2x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{6x+2}=\frac{2}{+\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{3x+2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

De forma semelhante se pode concluir que, quando $x\to-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{3x^2+2x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{6x+2}=\frac{2}{-\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{3x+2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

A reta de equação $y=\dfrac{2}{3}$ é assíntota ao gráfico de *f* em $+\infty$ e em $-\infty$.

As retas de equações $x=-\dfrac{2}{3}$ e $y=\dfrac{2}{3}$ são assíntotas ao gráfico de *f*.

58.2. $g(x)=\dfrac{1}{3x+1}$

$$D_g=\{x\in\mathbb{R}:3x+1\neq0\}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

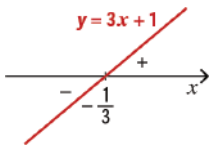
Assíntotas verticais:

g é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical em $-\dfrac{1}{3}$.

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}}g(x)=\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3x+1}\right)=\frac{1}{3\left(-\frac{1}{3}\right)+1}=\frac{1}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}^-}g(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}^+}g(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$



A reta de equação $x=-\frac{1}{3}$ é a única assíntota vertical ao gráfico de *g*.

Assíntotas não verticais:

Se $x \to +\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(3x+1)}=\frac{1}{+\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-mx\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3x+1}=\frac{1}{+\infty}=0$$

De forma semelhante se pode concluir que, quando $x \to -\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x(3x+1)}=\frac{1}{+\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left[g(x)-mx\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3x+1}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Então, a reta de equação $y=0$ é assíntota ao gráfico de *g* em $+\infty$ e em $-\infty$.

As retas de equações $x=-\frac{1}{3}$ e $y=0$ são assíntotas ao gráfico de *g*.

58.3. $h(x)=\frac{3x+1}{(x-1)^2}$; $D_h=\left\{x\in\mathbb{R}:(x-1)^2\neq 0\right\}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Assíntotas verticais:

h é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical em $x=1$.

$$\lim_{x\to1}h(x)=\lim_{x\to1}\left(\frac{3x+1}{(x-1)^2}\right)=\frac{3\times1+1}{(1-1)^2}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

A reta de equação $x=1$é a única assíntota vertical ao gráfico de *h*.

Assíntotas não verticais:

Se $x \to +\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x\left(x^2-2x+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x^3-2x^2+x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+1)'}{\left(x^3-2x^2+x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{3x^2-4x+1}=\frac{3}{+\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[h(x)-mx\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x^2-2x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+1)'}{\left(x^2-2x+1\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2x-2}=\frac{3}{+\infty}=0$$

De forma semelhante se pode concluir que, quando $x \to -\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+1}{x^3-2x^2+x}=$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{3x^2-4x+1}=\frac{3}{+\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left[h(x)-mx\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+1}{x^2-2x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{2x-2}=\frac{3}{-\infty}=0$$

Então, a reta de equação $y=0$ é assíntota ao gráfico de *h* em $+\infty$ e em $-\infty$.

As retas de equações $x=1$ e $y=0$ são assíntotas ao gráfico de *h*.

58.4. $i(x)=\frac{3x^3-2x}{x^2+2}$; $D_i=\left\{x\in\mathbb{R}:\underbrace{x^2+2\neq0}_{\text{condição universal}}\right\}=\mathbb{R}$

Assíntotas verticais:

i é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, não existem assíntotas verticais ao seu gráfico.

Assíntotas não verticais:

Se $x \to +\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{i(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-2x}{x(x^2+2)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-2x}{x^3+2x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3x^3-2x\right)'}{\left(x^3+2x\right)'}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-2}{3x^2+2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(9x^2-2\right)'}{\left(3x^2+2\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{18\cancel{x}}{6\cancel{x}}=3$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[i(x)-mx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^3-2x}{x^2+2}-3x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{3x^3}-2x-\cancel{3x^3}-6x}{x^2+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-8x}{x^2+2}\right)=$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(-8x)'}{\left(x^2+2\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8}{2x}=\frac{-8}{+\infty}=0$$

De forma semelhante se pode concluir que, quando $x \to -\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{i(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-2x}{x^3+2x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2-2}{3x^2+2}=$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{18\cancel{x}}{6\cancel{x}}=3$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left[i(x)-mx\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^3-2x}{x^2+2}-3x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{3x^3}-2x-\cancel{3x^3}-6x}{x^2+2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-8x}{x^2+2}\right)\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{(-8x)'}{\left(x^2+2\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-8}{2x}=\frac{-8}{-\infty}=0$$

Então, a reta de equação $y=3x$ é assíntota ao gráfico de *i*.

A reta de equação $y=3x$ é a única assíntota ao gráfico de *i*.

58.5. $j(x)=\dfrac{3x-x^2}{x-2}$; $D_j=\{x\in\mathbb{R}: x-2\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

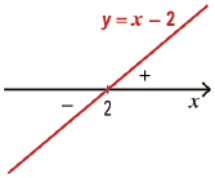
Assíntotas verticais:

j é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical em 2.

$$\lim_{x\to 2} j(x)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x-x^2}{x-2}\right)=\frac{3\times 2-2^2}{2-2}=\frac{2}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} j(x)=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} j(x)=\frac{2}{0^+}=+\infty$$



A reta de equação $x=2$ é a única assíntota vertical ao gráfico de *j*.

Assíntotas não verticais:

Se $x\to+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{j(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-x^2}{x(x-2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-x^2}{x^2-2x}=$$

$$\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x-x^2)'}{(x^2-2x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-2x}{2x-2}=$$

$$\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(3-2x)'}{(2x-2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{2}=-1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[j(x)-mx]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-x^2}{x-2}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-x^2+x^2-2x}{x-2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-2}\right)\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(x-2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1}=1$$

De forma semelhante se pode concluir que, quando $x\to-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{j(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-x^2}{x^2-2x}=$$

$$\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{(3x-x^2)'}{(x^2-2x)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-2x}{2x-2}=$$

$$\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{(3-2x)'}{(2x-2)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{2}=-1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}[j(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-x^2}{x-2}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-x^2+x^2-2x}{x-2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x-2}\right)\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{(x)'}{(x-2)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1}=1$$

Então, a reta de equação $y=-x+1$ é assíntota ao gráfico de *j* em $+\infty$ e em $-\infty$.

As retas de equações $x=2$ e $y=-x+1$ são assíntotas ao gráfico de *j*.

58.6. $I(x)=\dfrac{2x^3-x^2-2x}{1-x^2}$

$D_I=\{x\in\mathbb{R}: 1-x^2\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-1,\ 1\}$

Assíntotas verticais:

I é contínua. Logo, só poderão existir assíntotas verticais em -1 e em 1.

$$\lim_{x\to-1} I(x)=\lim_{x\to-1}\left(\frac{2x^3-x^2-2x}{1-x^2}\right)=$$

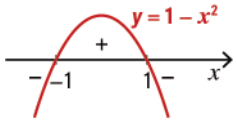
$$=\frac{2\times(-1)^3-(-1)^2-2(-1)}{1-(-1)^2}=\frac{-1}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} I(x)=\frac{-1}{0^-}=+\infty\ ;\qquad \lim_{x\to-1^+} I(x)=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1} I(x)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^3-x^2-2x}{1-x^2}\right)=\frac{-1}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} I(x)=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} I(x)=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$



As retas de equações $x=-1$ e $x=1$ são assíntotas verticais ao gráfico de *I*.

Assíntotas não verticais:

Se $x\to+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{I(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-x^2-2x}{x(1-x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-x^2-2x}{x-x^3}\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^3-x^2-2x)'}{(x-x^3)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2-2x-2}{1-3x^2}\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(6x^2-2x-2)'}{(1-3x^2)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{12x-2}{-6x}\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(12x-2)'}{(-6x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{12}{-6}=-2$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[I(x)-mx]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3-x^2-2x}{1-x^2}+2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3-x^2-2x+2x-2x^3}{1-x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2}{1-x^2}\right)\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(-x^2)'}{(1-x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{-2x}}{\cancel{-2x}}=1$$

De forma semelhante se conclui que, quando $x\to-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{I(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-x^2-2x}{x(1-x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-x^2-2x}{x-x^3}\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x^3-x^2-2x)'}{(x-x^3)'}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^2-2x-2}{1-3x^2}\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{(6x^2-2x-2)'}{(1-3x^2)'}=$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{12x-2}{-6x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{(12x-2)'}{(-6x)'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{12}{-6} = -2$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left[I(x)-mx\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3-x^2-2x}{1-x^2}+2x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3-x^2-2x+2x-2x^3}{1-x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x^2}{1-x^2}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(-x^2\right)'}{\left(1-x^2\right)'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{-2x}}{\cancel{-2x}} = 1$$

Assim, a reta de equação $y=-2x+1$ é assíntota ao gráfico da função *I* em $+\infty$ e em $-\infty$.
As retas de equações $x=-1$, $x=1$ e $y=-2x+1$ são assíntotas ao gráfico de *I*.

Pág. 65

Questão 59

$$f(x)=\frac{3x^2-3}{x^2-2x+1};\ D_f=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2-2x+1\neq 0\right\}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

Assíntotas verticais (paralelas a *Oy*):
f é contínua. Logo, só poderá ter assíntota vertical em $x=1$.

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1}\left(\frac{3x^2-3}{x^2-2x+1}\right) \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L'H}}{=}} \lim_{x\to-1}\frac{\left(3x^2-3\right)'}{\left(x^2-2x+1\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to-1}\frac{6x}{2x-2} = \frac{6\times 1}{2\times 1-2} = \frac{6}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{6}{0^-} = -\infty; \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

A reta de equação $x=1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de *f*.
Assíntotas horizontais (paralelas a *Ox*):
Se $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-3}{x^2-2x+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3x^2-3\right)'}{\left(x^2-2x+1\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{2x-2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(6x)'}{(2x-2)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{2} = 3$$

De forma análoga se conclui que, quando $x\to-\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-3}{x^2-2x+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(3x^2-3\right)'}{\left(x^2-2x+1\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{2x-2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{(6x)'}{(2x-2)'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{6}{2} = 3$$

A reta de equação $y=3$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f* em $+\infty$ e $-\infty$.
As retas de equações $x=1$ e $y=3$ são assíntotas ao gráfico de *f*, paralelas aos eixos *Oy* e *Ox*, respetivamente.

Questão 60

$y=-2x+1$ é assíntota ao gráfico de *f* e $D_f=\left]-2,+\infty\right[$.

Então, $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = -2$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-2x)\right]=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+2x\right]=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-2x+1)\right]=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+2x-1\right]=0$$

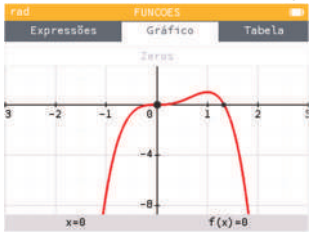
Opção (C)

Pág. 66

Questão 61

61.1. $f(x)=4x^3-3x^4$

1.º Gráfico na calculadora gráfica:



2.º Domínio: $D_f=\mathbb{R}$

3.º Continuidade: A função *f* é contínua.

4.º Interseção do gráfico com os eixos:

$f(0)=4\times0^3-3\times0^4=0$

O gráfico passa pelo ponto $(0,0)$.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-3x^4=0 \Leftrightarrow x^3(4-3x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3=0 \vee 4-3x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{4}{3}$$

Os zeros da função são 0 e $\frac{4}{3}$.

5.º Monotonia e extremos:

$f'(x)=(4x^3-3x^4)'=12x^2-12x^3$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 12x^2-12x^3=0 \Leftrightarrow 12x^2(1-x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12x^2=0 \vee 1-x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
f'	+	0	+	0	−
f	↗	0	↗	−2	↘
				Máx.	

$f(1)=4\times1^3-3\times1^4=4-3=1$

A função *f* é estritamente crescente em $]-\infty,1]$ e estritamente decrescente em $[1,+\infty[$.

f tem um máximo absoluto igual a 1 para $x=1$.

6.º Concavidade e pontos de inflexão:

$$f''(x)=\left(12x^2-12x^3\right)'=24x-36x^2$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 24x-36x^2=0 \Leftrightarrow 12x(2-3x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12x=0 \vee 2-3x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{2}{3}$$

x	$-\infty$	0		$\frac{2}{3}$	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\frown$	0	$\smile$	$\frac{16}{27}$	$\frown$
		P.I.		P.I.	

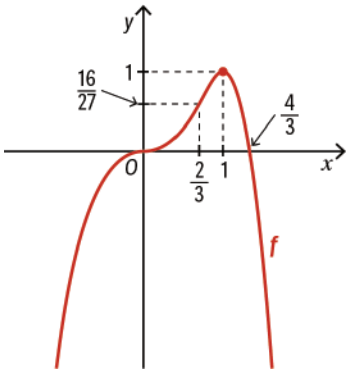
$f\left(\frac{2}{3}\right)=4\left(\frac{2}{3}\right)^3-3\times\left(\frac{2}{3}\right)^4=4\times\frac{8}{27}-3\times\frac{16}{81}=\frac{16}{27}$

O gráfico de *f* tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,0[$ e em $\left]\frac{2}{3},+\infty\right[$ e voltada para cima em $\left]0,\frac{2}{3}\right[$. Os pontos de coordenadas $(0,0)$ e $\left(\frac{2}{3},\frac{16}{27}\right)$ são pontos de inflexão.

7.º Assíntotas:

O gráfico de *f* não tem assíntotas por ser uma função polinomial.

8.º Gráfico e contradomínio:

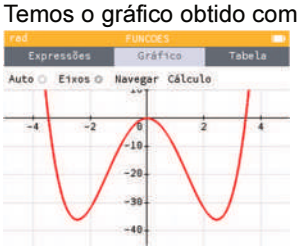


$D'_f=]-\infty,1]$

61.2. $g(x)=x^4-12x^2$

1.º Gráfico na calculadora:

Temos o gráfico obtido com a calculadora gráfica.



2.º Domínio: $D_g=\mathbb{R}$

3.º Continuidade: A função *g* é contínua.

4.º Interseção do gráfico com os eixos:

$g(0)=0^4-12\times0^2=0$

O gráfico de *g* passa pelo ponto de coordenadas $(0,0)$.

$g(x)=0\Leftrightarrow x^4-12x^2=0\Leftrightarrow x^2(x^2-12)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=0\vee x^2-12=0\Leftrightarrow x=0\vee x=12\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee x=\pm2\sqrt{3}$

Os zeros da função são $-2\sqrt{3}$, 0 e $2\sqrt{3}$.

5.º Monotonia e extremos:

$g'(x)=\left(x^4-12x^2\right)'=4x^3-24x$

$g'(x)=0\Leftrightarrow4x^3-24x=0\Leftrightarrow4x\left(x^2-6\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow4x=0\vee x^2=6\Leftrightarrow x=0\vee x=\pm\sqrt{6}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{6}$		0		$\sqrt{6}$	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	-36	$\nearrow$	0	$\searrow$	-36	$\nearrow$

$g\left(-\sqrt{6}\right)=\left(-\sqrt{6}\right)^4-12\left(-\sqrt{6}\right)^2=36-72=-36$

$g\left(-\sqrt{6}\right)=\left(\sqrt{6}\right)^4-12\left(\sqrt{6}\right)^2=36-72=-36$

A função *g* é estritamente decrescente em $]-\infty,-\sqrt{6}]$ e estritamente crescente em $[-\sqrt{6},0]$ e em $[\sqrt{6},+\infty[$.

g tem um máximo relativo igual a 0 para $x=0$ e mínimo absoluto -36 em $x=-\sqrt{6}$ e $x=\sqrt{6}$.

6.º Concavidades e pontos de inflexão:

$g''(x)=\left(4x^3-24x\right)'=12x^2-24$

$g''(x)=0\Leftrightarrow12x^2-24=0\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
g''	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$\smile$	-20	$\frown$	-20	$\smile$
		P.I.		P.I.	

$g\left(-\sqrt{2}\right)=\left(-\sqrt{2}\right)^4-12\left(-\sqrt{2}\right)^2=4-24=-20$

$g\left(\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^4-12\left(\sqrt{2}\right)^2=4-24=-20$

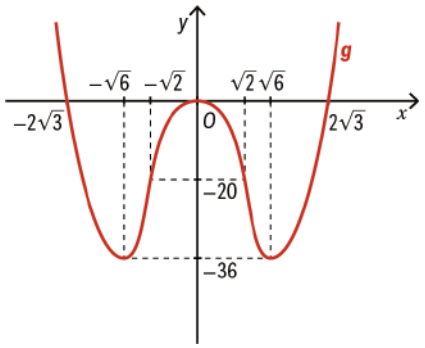
O gráfico de *g* tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty,-\sqrt{2}[$ e em $]\sqrt{2},+\infty[$ e voltada para baixo em $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$.

Os pontos de coordenadas $\left(-\sqrt{2},-20\right)$ e $\left(\sqrt{2},-20\right)$ são pontos de inflexão.

7.º Assíntotas:

O gráfico de *g* não tem assíntotas por ser uma função polinomial.

8.º Gráfico e contradomínio:



$D'_g=[-36,+\infty[$

Pág. 67

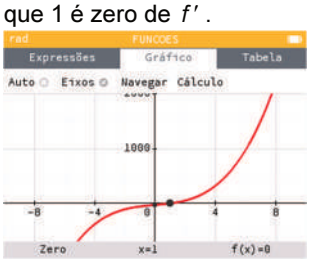
Questão 62

$f(x)=x^4+12x^2-28x+15$; $D_f=\mathbb{R}$

62.1. $f'(x)=\left(x^4+12x^2-28x+15\right)'=4x^3+24x-28$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3+24x-28=0$

O gráfico representado, da derivada de *f*, sugere que 1 é zero de f'.



$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(4x^2+4x+28\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-1=0 \vee x^2+x+7=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1 \vee x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-28}}{2}$ (equação impossível)

	4	0	24	−28
1		4	4	28
	4	4	28	0

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	−	0	+
f	↘	$f(1)$	↗

A função *f* é uma função contínua por ser polinomial. É estritamente decrescente em $]-\infty,1]$ e estritamente crescente em $[1,+\infty[$.

Logo, $f(1)$ é o mínimo absoluto de *f*.

62.2. $f''(x)=\left(4x^3+24x-28\right)'=12x^2+24$

$f''(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Logo, *f* tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$ e não tem pontos de inflexão.

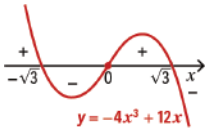
Questão 63

63.1. $f(x)=-x^4+6x^2-9$; $D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=\left(-x^4+6x^2-9\right)'=-4x^3+12x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -4x^3+12x=0 \Leftrightarrow x\left(-4x^2+12\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee -4x^2+12=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\pm\sqrt{3}$



x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
f'	+	0	−	0	+	0	−
f	↗	0	↘	−9	↗	0	↘
		Máx.		Máx.		Máx.	

$f\left(-\sqrt{3}\right)=-\left(-\sqrt{3}\right)^4+6\left(-\sqrt{3}\right)^2-9=-9+18-9=0$

$f\left(\sqrt{3}\right)=-\left(\sqrt{3}\right)^4+6\left(\sqrt{3}\right)^2-9=-9+18-9=0$

$f(0)=9$

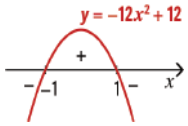
f é contínua por ser uma função polinomial e é crescente em $]-\infty,-\sqrt{3}]$ e em $[0,\sqrt{3}]$ e decrescente em $[-\sqrt{3},0]$ e em $[\sqrt{3},+\infty[$ e tem mínimo relativo igual a -9 para $x=0$ e máximo absoluto igual a 0 para $x=-\sqrt{3}$ e $x=\sqrt{3}$.

Então, $f(x)\leq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

63.2. $f''(x)=\left(-4x^3+12x\right)'=-12x^2+12$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -12x^2+12=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f''	−	0	+	0	−
f	⌒	−20	⌣	−20	⌒



$f(-1)=-(-1)^4+6(-1)^2-9=-1+6-9=-4$

$f(1)=-1^4+6\times 1-9=-4$

f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-1[$ e em $]1,+\infty[$, voltada para cima em $]-1,1[$ e tem pontos de inflexão de coordenadas $(-1,-4)$ e $(1,-4)$.

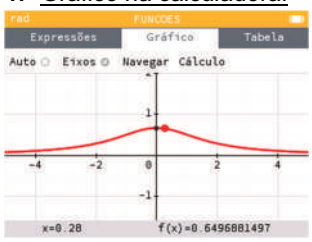
Logo, tem dois pontos de inflexão.

Pág. 64

Questão 64

64.1. $f(x)=\dfrac{2}{x^2+3}$

1.º Gráfico na calculadora:



2.º Domínio:

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}: \underbrace{x^2+3\neq 0}_{\text{condição universal}}\right\}=\mathbb{R}$

3.º Continuidade:

A função *f* é contínua no seu domínio por ser uma função racional.

4.º Interseção do gráfico com os eixos:

$f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{x^2+3}=0$ (Equação impossível)

O gráfico de f não interseta o eixo Ox, ou seja, f não tem zeros.

$f(0)=\frac{2}{0^2+3}=\frac{2}{3}$

O gráfico passa pelo ponto de coordenadas $\left(0,\frac{2}{3}\right)$.

5.º Monotonia e extremos:

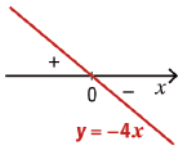
$f'(x)=\left(\frac{2}{x^2+3}\right)'=\frac{(2)'(x^2+3)-2(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}=$

$=\frac{0-2(2x)}{(x^2+3)^2}=\frac{-4x}{(x^2+3)^2}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-4x}{(x^2+3)^2}=0\Leftrightarrow -4x=0\wedge\underbrace{(x^2+3)^2\neq 0}_{\text{condição universal}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$



Máx.

Como $(x^2+3)^2>0,\forall x\in\mathbb{R}$, o sinal de f' depende apenas do sinal do numerador da expressão que a representa.

f é estritamente crescente em $]-\infty,0]$, estritamente decrescente em $[0,+\infty[$ e tem um máximo absoluto igual a $\frac{2}{3}$ em $x=0$.

6.º Concavidade e pontos de inflexão:

$f''(x)=\left(\frac{-4x}{\left(x^2+3\right)^2}\right)'=$

$=\frac{(-4x)'(x^2+3)^2-(-4x)'\left[\left(x^2+3\right)^2\right]'}{\left(\left(x^2+3\right)^2\right)^2}=$

$=\frac{-4(x^2+3)^2+4x\times 2(x^2+3)(x^2+3)'}{\left(x^2+3\right)^4}=$

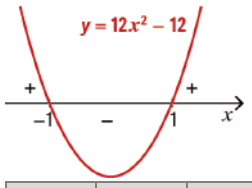
$=\frac{(x^2+3)\left[-4(x^2+3)+8x\times 2x\right]}{\left(x^2+3\right)^4}=$

$=\frac{-4x^2-12+16x^2}{\left(x^2+3\right)^3}=\frac{12x^2-12}{\left(x^2+3\right)^3}$

$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{12x^2-12}{\left(x^2+3\right)^3}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12x^2-12=0\wedge\underbrace{\left(x^2+3\right)^3\neq 0}_{\text{condição universal}}\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$

Como $\left(x^2+3\right)^3>0,\forall x\in\mathbb{R}$, o sinal da segunda derivada depende apenas do sinal do numerador da expressão que a representa.



x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$	$\frac{1}{2}$	$\frown$	$\frac{1}{2}$	$\smile$

$f(-1)=\frac{2}{(-1)^2+3}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$; $f(1)=\frac{2}{1^2+3}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty,-1[$ e em $]1,+\infty[$ e voltada para baixo em $]-1,1[$.

f tem dois pontos de inflexão de coordenadas $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ e $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ são pontos de inflexão.

7.º Assíntotas:

Verticais:

f é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, não tem assíntotas verticais.

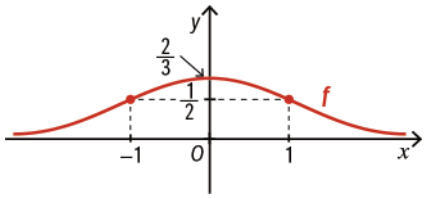
Não verticais:

$m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x(x^2+3)}=\frac{2}{\pm\infty}=0$

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x^2+3}=\frac{2}{+\infty}=0$

A reta de equação $y=0$ é assíntota ao gráfico de f quando $x\to+\infty$ e quando $x\to-\infty$.

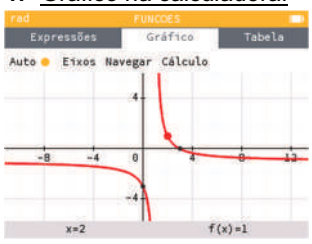
8.º Gráfico e contradomínio:



$D'_f=\left]0,\frac{2}{3}\right]$

64.2. $g(x)=\frac{3-x}{x-1}$

1.º Gráfico na calculadora:



2.º Domínio: $D_g=\{x\in\mathbb{R}:x-1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

3.º Continuidade:

A função g é contínua no seu domínio por ser uma função racional.

4.º Interseção do gráfico com os eixos:

$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{3-x}{x-1}=0\Leftrightarrow 3-x=0\wedge x-1\neq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=3\wedge x\neq 1\Leftrightarrow x=3$

O gráfico de *g* passa pelo ponto de coordenadas $(3,0)$, ou seja, 3 é zero da função *g*.

$$g(0)=\frac{3-0}{0-1}=-3$$

O gráfico de *g* passa pelo ponto de coordenadas $(0,-3)$.

5.º Monotonia e extremos:

$$g'(x)=\left(\frac{3-x}{x-1}\right)'=\frac{(3-x)'(x-1)-(3-x)(x-1)'}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{-1(x-1)-(3-x)\times 1}{(x-1)^2}=\frac{-x+1-3+x}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

Como $-2<0\wedge(x-1)^2>0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, podemos concluir que $g'(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Então, *g* é decrescente em $]-\infty,1[$ e em $]1+\infty[$, pelo que não tem extremos.

6.º Concavidades e pontos de inflexão:

$$g'(x)=\left(\frac{-2}{(x-1)^2}\right)'=$$

$$=\frac{(-2)'(x-1)^2-(-2)\left[(x-1)^2\right]'}{\left((x-1)^2\right)^2}=$$

$$=\frac{0+2\times 2(x-1)\times(x-1)'}{(x-1)^4}=\frac{4(x-1)\times 1}{(x-1)^4}=\frac{4}{(x-1)^3}$$

$g''(x)<0$ se $x<1$ e $g''(x)>0$ se $x>1$.

g tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty,1[$ e voltada para cima em $]1,+\infty[$ e não tem pontos de inflexão.

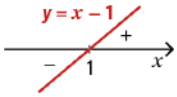
7.º Assíntotas:

Verticais:

$$\lim_{x\to 1}g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{3-x}{x-1}=\frac{3-1}{1-1}=\frac{2}{0}$$

$$\lim_{x\to 1^-}g(x)=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}g(x)=\frac{2}{0^+}=+\infty$$



A reta de equação $x=1$ é assíntota ao gráfico de *g*.

Não verticais:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3-x}{x^2-x}=$$

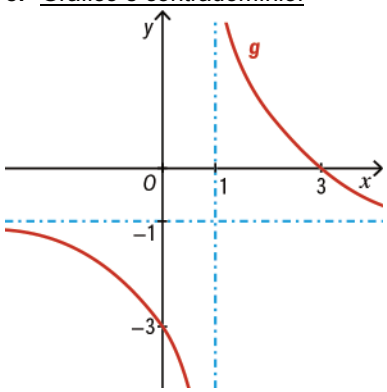
$$\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(3-x)'}{\left(x^2-x\right)'}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-1}{2x-1}=\frac{-1}{\pm\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[g(x)-mx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3-x}{x-1}\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(3-x)'}{(x-1)'}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-1}{1}=-1$$

A reta de equação $y=-1$ é assíntota ao gráfico de g quando $x\to+\infty$ e quando $x\to-\infty$.

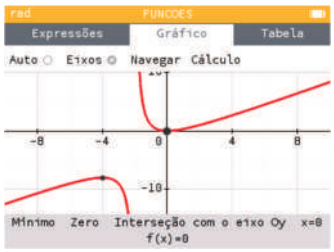
8.º Gráfico e contradomínio:



$D'_g=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

64.3. $h(x)=\frac{x^2}{x+2}$

1.º Gráfico na calculadora:



2.º Domínio:

$D_h=\{x\in\mathbb{R}:x+2\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

3.º Continuidade:

A função *h* é contínua no seu domínio, por ser uma função racional.

4.º Interseção do gráfico com os eixos:

$$h(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^2}{x+2}=0\Leftrightarrow x^2=0\wedge x+2\neq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0\wedge x\neq -2\Leftrightarrow x=0$$

O gráfico de *h* passa pelo ponto de coordenadas $(0,0)$, ou seja, 0 é um zero da função *h*.

O ponto $(0,0)$ é também a interseção com o eixo *Oy*.

5.º Monotonia e extremos:

$$h'(x)=\left(\frac{x^2}{x+2}\right)'=\frac{(x^2)'(x+2)-(x^2)(x+2)'}{(x+2)^2}=$$

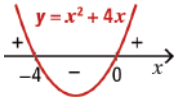
$$=\frac{2x(x+2)-x^2\times 1}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+4x-x^2}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$$

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x=0\wedge(x+2)^2\neq 0\Leftrightarrow x(x+4)=0\wedge x\neq -2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x=0\vee x+4=0)\wedge x\neq -2\Leftrightarrow x=0\vee x=-4$$

x	$-\infty$	-4		-2		0	$+\infty$
h'	+	0	−	n.d.	−	0	+
h	↗	−8	↘	n.d.	↘	0	↗



Como $(x+2)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, o sinal de h' depende apenas do sinal do numerador da expressão que a representa.

$$h(-4) = \frac{(4)^2}{-4+2} = \frac{16}{-2} = -8$$

h é estritamente crescente em $]-\infty, -4]$ e em $[0, +\infty[$, é estritamente decrescente em $[-4, -2[$ e em $]-2, 0]$, tem um máximo relativo igual a -8 e em $x = -4$ e um mínimo relativo igual a 0 em $x = 0$.

6.º Concavidades e pontos de inflexão:

$$h''(x) = \left(\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}\right)' =$$

$$= \frac{\left(x^2+4x\right)'(x+2)^2 - (x^2+4x)\left[(x+2)^2\right]'}{\left((x+2)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{(2x+4)(x+2)^2 - (x^2+4x)\times 2(x+2)(x+2)'}{(x+2)^4} =$$

$$= \frac{(x+2)\left[(2x+4)(x+2) - 2(x^2+4x)\times 1\right]}{(x+2)^4} =$$

$$= \frac{2x^2+4x+4x+8-2x^2-8x}{(x+2)^3} = \frac{8}{(x+2)^3}$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
h''	$-$	n.d.	$+$
h	⌒	n.d.	⌣

h tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -2[$ e voltada para cima em $]-2, +\infty[$ e não tem pontos de inflexão.

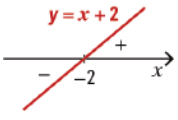
7.º Assíntotas:

Verticais:

$$\lim_{x\to -2} h(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x^2}{x+2} = \frac{(-2)^2}{-2+2} = \frac{4}{0}$$

$$\lim_{x\to -2^-} h(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} h(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$



A reta de equação $x = -2$ é assíntota ao gráfico de h.

Não verticais:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x(x+2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+2x} =$$

$$\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(x^2\right)'}{\left(x^2+2x\right)'} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{2x+2} =$$

$$\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2x)'}{(2x+2)'} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{2} = 1$$

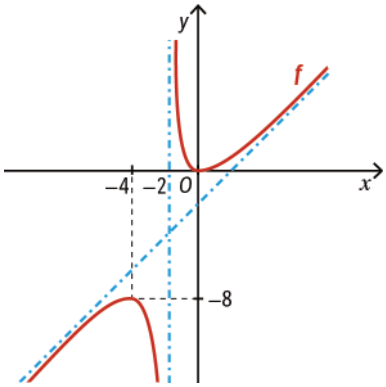
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[h(x) - mx\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x+2} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 - 2x}{x+2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x}{x+2} \underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(-2x)'}{(x+2)'} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2}{1} = -2$$

A reta de equação $y = x - 2$ é assíntota ao gráfico de h quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

8.º Gráfico e contradomínio:



$D'_h =]-\infty, -8] \cup [0, +\infty[$

Questão 65

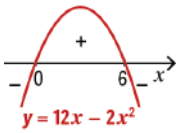
$$f(x) = \frac{2x^2}{3-x}; \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

Cálculo dos extremos relativos de f:

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2}{3-x}\right)' = \frac{(2x^2)'(3-x) - 2x^2(3-x)'}{(3-x)^2} =$$

$$= \frac{4x(3-x) - 2x^2(-1)}{(3-x)^2} =$$

$$= \frac{12x - 4x^2 + 2x^2}{(3-x)^2} = \frac{12x - 2x^2}{(3-x)^2}$$



$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{12x - 2x^2}{(3-x)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12x - 2x^2 = 0 \wedge (3-x)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x(6-x) = 0 \wedge 3 - x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x = 0 \vee 6 - x = 0) \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$$

x	$-\infty$	0		6	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↘	0	↗	-24	↘
		Mín.		Máx.	

Como $(3-x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, o sinal de f' depende apenas do sinal do numerador da expressão que a representa.

$$f(0) = \frac{2\times 0^2}{3-0} = 0; \quad A(0,0)$$

$$f(6) = \frac{2\times 6^2}{3-6} = \frac{72}{-3} = -24; \quad B(6,-24)$$

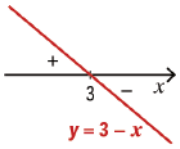
Seja M o ponto médio de $[AB]$:

$$M\left(\frac{0+6}{2},\frac{0-24}{2}\right) \Leftrightarrow M(3,-12)$$

Assíntotas:

Verticais:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\left(\frac{2x^2}{3-x}\right) = \frac{2\times 3^2}{3-3} = \frac{18}{0}$$



$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{18}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{18}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = 3$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f.

Não verticais:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x(3-x)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{3x-x^2} =$$

$$\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(2x^2\right)'}{\left(3x-x^2\right)'} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{3-2x} \underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(4x)'}{(3-2x)'}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{-2} = -2$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2}{3-x}+2x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+6x-2x^2}{3-x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x}{3-x} =$$

$$\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(6x)'}{(3-x)'} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{6}{-1} = -6$$

A reta de equação $y = -2x - 6$ é assíntota ao gráfico de f quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

Interseção das assíntotas:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -2x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2\times 3 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -12 \end{cases}$$

$C(3,-12)$

Então, C é o ponto médio de $[AB]$.

Pág. 69

Questão 66

$$f(x) = \frac{x-k}{(x-2)^2}; \quad D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x-k}{(x-2)^2}\right)'$$

$$= \frac{(x-k)'(x-2)^2 - (x-k)\left((x-2)^2\right)'}{\left((x-2)^2\right)^2}$$

$$= \frac{1(x-2)^2 - (x-k)\times 2(x-2)(x-2)'}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{(x-2)\left[(x-2)-(x-k)\times 2\times 1\right]}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{x-2-2x+2k}{(x-2)^3} = \frac{-x-2+2k}{(x-2)^3}$$

Se f tem um extremo relativo em $x = 0$, então

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{-0-2+2k}{(0-2)^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{2k-2}{-8} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2k-2 = 0 \Leftrightarrow 2k = 2 \Leftrightarrow k = 1$$

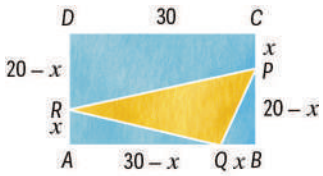
Pág. 70

Questão 67

67.1. $x \geq 0 \wedge 20 - x \geq 0 \wedge 30 - x \geq 0$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \wedge -x \geq -20 \wedge -x \geq -30$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \leq 20 \wedge x \leq 30 \Leftrightarrow x \in [0,20]$$



67.2. $A_{[PQR]} = A_{[ABCD]} - \left(A_{[BPQ]} + A_{[AQR]} + A_{[PCDR]}\right)$

$$A_{[ABCD]} = 30\times 20 = 600$$

$$A_{[BPQ]} = \frac{\overline{BQ}\times\overline{BP}}{2} = \frac{x(20-x)}{2} = \frac{20x-x^2}{2} = 10x - \frac{x^2}{2}$$

$$A_{[AQR]} = \frac{\overline{AR}\times\overline{AQ}}{2} = \frac{x(30-x)}{2} = \frac{30x-x^2}{2} = 15x - \frac{x^2}{2}$$

$$A_{[PCDR]} = \frac{\overline{DR}+\overline{CP}}{2}\times\overline{DC} = \frac{20-x+x}{2}\times 30$$

$$= 10\times 30 = 300$$

$$f(x) = 600 - \left(10x - \frac{x^2}{2} + 15x - \frac{x^2}{2} + 300\right)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 600 - \left(300 + 25x - x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 600 - 300 - 25x + x^2$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x^2 - 25x + 300$$

67.3. a) $f(x) = 150 \Leftrightarrow x^2 - 25x + 300 = 150 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 - 25x + 150 = 0 \Leftrightarrow$$

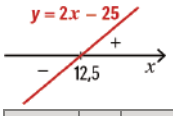
$$\Leftrightarrow x = \frac{25 \pm \sqrt{(-25)^2 - 4\times 150}}{2\times 1} \Leftrightarrow x = \frac{25\pm 5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 10 \vee x = 15$$

A zona vedada tem 150 m² da área para $x = 10$ m ou $x = 15$ m.

b) $f'(x) = \left(x^2 - 25x + 150\right)' = 2x - 25$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 25 = 0 \Leftrightarrow 2x = 25 \Leftrightarrow x = 12,5$



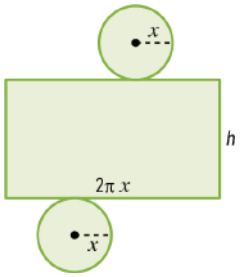
x	0		12,5		20
f'		–	0	+	
f		↘		↗	
			Mín.		

A área da zona vedada é a menor possível para $x = 12,5$ m.

Pág. 71

Questão 68

68.1. Seja x a medida do raio da base do cilindro e h a altura, em decímetros.



A área total do cilindro é dada por:

$A = 2\pi x^2 + 2\pi x \times h$

O volume do cilindro é dado por $V = A_b \times h$ e sabe-se que $V = 200\,\text{L} = 200\,\text{dm}^3$.

Então, $\pi x^2 \times h = 200 \Leftrightarrow h = \dfrac{200}{\pi x^2}$.

Logo,

$A(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x \times \dfrac{200}{\pi x^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(x) = 2\pi x^2 + \dfrac{400}{x}, \quad x > 0$

68.2. $A'(x) = \left(2\pi x^2 + \dfrac{400}{x}\right)' = 4\pi x - \dfrac{400}{x^2}$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 4\pi x - \dfrac{400}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{4\pi x^3 - 400}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 4\pi x^3 - 400 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3 = \dfrac{400}{4\pi} \wedge x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{100}{\pi}} \approx 3{,}17\ \text{dm} = 31{,}7\ \text{cm}$

$h = \dfrac{200}{\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{100}{\pi}}\right)^2} \approx 6{,}34\ \text{dm} = 63{,}4\ \text{cm}$

x	0		$\sqrt[3]{\frac{100}{\pi}}$	$+\infty$
A'		$-$	0	$+$
A		↘	Mín.	↗

O bidão que consome menor quantidade de chapa na sua construção tem, aproximadamente 31,7 cm de raio da base e 63,4 cm de altura.

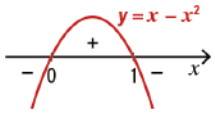
Pág. 72

Tarefas de consolidação 3

1.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^5 - 2x^2 - 1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^5\right) = -(+\infty) = -\infty$

1.2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4x - 2x^2 + 2\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^2\right) = -2(+\infty) = -\infty$

1.3. $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+2}{x-x^2} = \dfrac{1+2}{1-1} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty$



1.4. $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+2}{x-x^2} = \dfrac{1+2}{1-1} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty$

1.5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3}{5-x^2} = \dfrac{-3}{-\infty} = 0$

1.6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3}{5-x^2} = \dfrac{-3}{-\infty} = 0$

2.1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^3-1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}} \lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)'}{\left(x^3-1\right)'} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{3x^2} = \dfrac{1}{3\times1^2} = \dfrac{1}{3}$

2.2. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}} \lim\limits_{x\to3}\dfrac{\left(x^2-x-6\right)'}{(x-3)'} = \lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x-1}{1} =$

$= 2\times3-1 = 5$

2.3. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-4} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}} \lim\limits_{x\to2}\dfrac{\left(x^2+2x-8\right)'}{\left(x^2-4\right)'} =$

$= \lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x+2}{2x} = \dfrac{2\times2+2}{2\times2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

2.4. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-4} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}} \lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\left(x^2-2x-8\right)'}{\left(x^2-4\right)'} =$

$= \lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x-2}{2x} = \dfrac{2(-2)-2}{2(-2)} = \dfrac{-6}{-4} = \dfrac{3}{2}$

2.5. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2} = \dfrac{\sqrt{4+5}-3}{4-2} = \dfrac{0}{2} = 0$

2.6.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(3x)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sin(3x)\right)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{(3x)'\cos(3x)}{1} =$

$= \lim\limits_{x\to0}\left[3\cos(3x)\right] = 3\cos0 = 3\times1 = 3$

2.7. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(\pi x)}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}} \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(\sin(\pi x)\right)'}{(x-1)'} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\pi x)'\cos(\pi x)}{1} =$

$= \lim\limits_{x\to1}\left[\pi\cos(\pi x)\right] = \pi\cos(\pi) = -\pi$

2.8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\tan x}{\sin(2x)} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+\tan x)'}{(\sin(2x))'} =$

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{(x)'}{\cos^2 x}}{(2x)'\cos(2x)} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{\cos^2 x}}{2\cos(2x)} = \dfrac{1+\frac{1}{1}}{2\times1} = \dfrac{2}{2} = 1$

2.9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+x}{2x+1}-\frac{3}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x^2+2x-6x^2-3x}{4x+2}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{4x+2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(-x)'}{(4x+2)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4}$

2.10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\times\frac{2x^2-1}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(2x^2-1)'}{(x^2+x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(4x)'}{(2x+1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{2}=2$

3.1. A percentagem da variedade arábica no lote de café obtido é dada pelo quociente:

$$\frac{\text{Quantidade da arábica}}{\text{Quantidade total de café}}$$

(expressos na mesma unidade)

	Lote inicial	Mistura acrescentada	Mistura final
Total	10	x	$10+x$
Arábica	3	$0,6x$	$3+0,6x$

Então,

$P(x)=\frac{3+0,6x}{10+x}\Leftrightarrow P(x)=\frac{15+3x}{50+5x}$, com $x>0$

3.2. $P'(x)=\frac{(15+3x)'(50+5x)-(15+3x)(50+5x)'}{(50+5x)^2}=$

$=\frac{3(50+5x)-(15+3x)\times 5}{(50+5x)^2}=$

$=\frac{150+15x-75-15x}{(50+5x)^2}=\frac{75}{(50+5x)^2}$

Como $P'(x)>0$ para todo $x\in\mathbb{R}^+$, P é estritamente crescente em todo o domínio. Atendendo a que a percentagem da variedade arábica da mistura acrescentada é superior à percentagem da mesma variedade do lote inicial, à medida que se acrescenta a mistura do segundo lote, a percentagem da variedade arábica aumenta.

3.3. $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{15+3x}{50+5x}\right)\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(15+3x)'}{(50+5x)'}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{5}=\frac{3}{5}=0,6$

Significa que, aumentando significativamente o café do lote com 60% de arábica mantendo constante a mistura inicial, verifica-se a tendência para o lote final ficar com 60% de arábica.

4.1. $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2-1}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}:x^2-1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

Assíntotas verticais (paralelas a *Oy*)

f é contínua. Logo, só poderão existir assíntotas verticais em -1 e em 1.

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+x}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x^2+x)'}{(x^2-1)'}=$

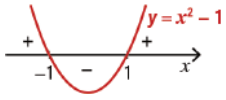
$=\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x+1}{2x}=\frac{2(-1)+1}{2(-1)}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$

Logo, *f* não tem assíntota vertical em -1.

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\frac{1+1}{1-1}=\frac{1}{0}=\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\frac{2}{0^-}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\frac{2}{0^+}=+\infty$



A reta de equação $x=1$ é a única assíntota vertical ao gráfico *f*.

Assíntotas horizontais (paralelas a Ox):

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x}{x^2-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(x^2+x)'}{(x^2-1)'}=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x+1}{2x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2}{2}=1$

A reta de equação $y=1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x\to+\infty$ e quando $x\to-\infty$.

As retas de equações $x=1$ e $y=1$ são assíntotas ao gráfico de *f*, paralelas aos eixos *Oy* e Ox, respetivamente.

4.2. $f(x)=\frac{2x}{(x-2)^2}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}:(x-2)^2\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Assíntotas verticais (paralelas a *Oy*):

f é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical 2.

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\frac{2x}{(x-2)^2}=\frac{4}{0^+}=+\infty$

A reta de equação $x=2$ é a única assíntota vertical ao gráfico de *f*.

Assíntotas horizontais (paralelas a Ox):

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{(x-2)^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(2x)'}{((x-2)^2)'}$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2}{2(x-2)(x-2)'}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{\pm\infty}=0$

A reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x\to+\infty$ e quando $x\to-\infty$.

As retas de equações $x=2$ e $y=0$ são assíntotas ao gráfico de *f*, paralelas aos eixos *Oy* e Ox, respetivamente.

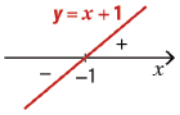
4.3. $f(x)=\begin{cases}1+x & \text{se } x\leq -1\\ \frac{3x+1}{x+1} & \text{se } x>-1\end{cases}$

$D_f=\mathbb{R}$

Assíntotas verticais (paralelas a *Oy*):

f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Logo, só poderá existir assíntota vertical em -1.

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}(1+x) = 1-1 = 0$



$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{3x+1}{x+1} =$

$= \dfrac{-3+1}{-1+1} = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty$

A reta de equação $x=-1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f.

Assíntotas horizontais (paralelas a Ox):

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}(1+x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x+1}{x+1}\right) \underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(3x+1)'}{(x+1)'} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3}{1} = 3$

A reta de equação $y=3$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x\to +\infty$.

As retas de equações $x=-1$ e $y=3$ são assíntotas ao gráfico de f, paralelas aos eixos Oy e Ox, respetivamente.

4.4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2-x} & \text{se } x<2 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x\geq 2 \end{cases}$

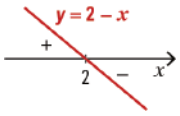
$D_f = \mathbb{R}$

Assíntotas verticais (paralelas a Oy):

f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Logo, só poderá existir assíntota vertical em 2.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x}{2-x}\right) = \dfrac{2}{2-2} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$



A reta de equação $x=2$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f.

Assíntotas horizontais (paralelas a Ox):

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x}{2-x}\right) \underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{(x)'}{(2-x)'} =$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{-1} = -1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

As retas de equações $y=-1$ e $y=0$ são assíntotas horizontais ao gráfico de f quando $x\to +\infty$ e quando $x\to -\infty$, respetivamente.

As retas de equações $x=2$, $y=-1$ e $y=0$ são assíntotas ao gráfico de f, paralelas aos eixos Oy ($x=2$) e Ox ($y=-1$ e $y=0$).

Pág. 73

5.1. $f(x) = \dfrac{-3x^2-4x+3}{x+2}$

$D_f = \{x\in\mathbb{R} : x+2\neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

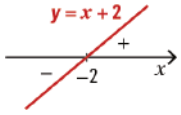
Assíntotas verticais (paralelas a Oy):

f é contínua. Logo, só poderão existir assíntotas verticais em -2.

$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-3x^2-4x+3}{x+2} = \dfrac{-12+8+3}{-2+2} = \dfrac{-1}{0} = \infty$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$



A reta de equação $x=-2$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f.

Assíntotas não verticais:

$m = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{-3x^2-4x+3}{x(x+2)} =$

$= \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{-3x^2-4x+3}{x^2+2x} \underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{\left(-3x^2-4x+3\right)'}{\left(x^2+2x\right)'} =$

$= \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{-6x-4}{2x+2} \underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{(-6x-4)'}{(2x+2)'} = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{-6}{2} = -3$

$b = \lim\limits_{x\to \pm\infty}[f(x)-mx] = \lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\dfrac{-3x^2-4x+3}{x+2}+3x\right) =$

$= \lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\dfrac{-3x^2-4x+3+3x^2+6x}{x+2}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{2x+3}{x+2} \underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{(2x+3)'}{(x+2)'} = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{2}{1} = 2$

A reta de equação $y=-3x+2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x\to +\infty$ e quando $x\to -\infty$.

As retas de equações $x=-2$ e $y=-3x+2$ são as únicas assíntotas ao gráfico de f.

5.2. $f(x) = \dfrac{x^3+3x}{x^2+1}$; $D_f = \left\{x\in\mathbb{R} : \underbrace{x+1\neq 0}_{\text{condição universal}}\right\} = \mathbb{R}$

Assíntotas verticais:

f é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, não existem assíntotas verticais ao seu gráfico.

Assíntotas não verticais:

$m = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x^3+3x}{x(x^2+1)}$

$= \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x^3+3x}{x^3+x} \underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{\left(x^3+3x\right)'}{\left(x^3+x\right)'} =$

$= \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{3x^2+3}{3x^2+1} \underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{6x}{6x} = 1$

$b = \lim\limits_{x\to \pm\infty}[f(x)-mx] = \lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\dfrac{x^3+3x}{x^2+1}-x\right) =$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+3x-x^3-x}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2+1}$$

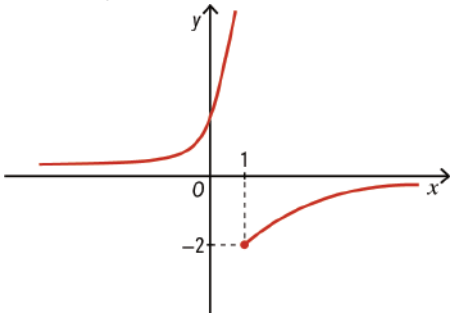
$$\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2x)'}{(x^2+1)'} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{2x} = \frac{1}{\pm\infty} = 0$$

A reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.
A reta de equação $y = x$ é a única assíntota ao gráfico de f.

6. $D_f = \mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -2 = f(1)$; $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a),\ a \neq 1$

Possível gráfico de f:



f é estritamente crescente em $]-\infty, 1[$ e em $[1, +\infty[$.

Seja g a função definida por: $g(x) = \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$

A função f não tem zeros porque:

- em $]-\infty, 1[$, f é estritamente crescente e tem a reta de equação $y = 0$ como assíntota horizontal quando $x \to -\infty$;
- em $[1, +\infty[$, f é estritamente crescente, tem a reta de equação $y = 0$ como assíntota horizontal e $f(1) = -2$;
- f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a),\ a \neq 1$).

$D_g = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} = \mathbb{R}$

Assíntotas verticais de g:
g é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, não existem assíntotas verticais do seu gráfico.
Assíntotas horizontais de g:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Então, g não tem assíntotas horizontais. Logo, $\frac{1}{f}$ não tem assíntotas paralelas aos eixos coordenados.

7. $D_f = \mathbb{R}^+$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\left(\sqrt{x} + f(x)\right)}{x} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{f(x)}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right) + \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(0 + \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$$

C.A.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} \underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Então, o declive da assíntota ao gráfico de f é $\frac{1}{2}$.

Opção (A).

8.1. $D_f = \mathbb{R}$

Assíntotas verticais (paralelas a Oy)
f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Logo, só poderá existir assíntota vertical em -1.

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-}\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{-1}{1-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{k+x}{x+2} = \frac{k-1}{1} = k-1$$

A reta de equação $x = -1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f.

Assíntotas horizontais (paralelas a Ox):

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right) \underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty} \frac{(x)'}{(1+x)'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{k+x}{x+2} \underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{(k+x)'}{(x+2)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1} = 1$$

A reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.
As retas de equações $x = -1$ e $y = 1$ são assíntotas ao gráfico de f, paralelas a Oy e a Ox, respetivamente.

8.2. f é contínua em $x = 1$ se e só se

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1)$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = k-1$

Então, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.

Logo, f é descontínua em $x = 1$, qualquer que seja o valor de k.

8.3. Se $x \geq -1$:

$$f'(x) = \left(\frac{k+x}{x+2}\right)' = \frac{(k+x)'(x+2) - (k+x)(x+2)'}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{1(x+2) - (k+x)\times 1}{(x+2)^2} = \frac{x+2-k-x}{(x+2)^2} = \frac{2-k}{(x+2)^2}$$

Para que f seja decrescente em $[-1, +\infty[$,

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2-k}{(x+2)^2} < 0 \Leftrightarrow 2-k < 0 \Leftrightarrow k > 2$$

$$k \in]2, +\infty[$$

9.1. $x = 6$; $f(6) = \frac{9+6}{6-3} = \frac{15}{3} = 5$

$\overline{OB} = x = 6$; $\overline{AB} = f(6) = 5$

$$A_{[OBA]} = \frac{\overline{OB} \times \overline{AB}}{2} = \frac{6\times 5}{2} = 15 \text{ u.a.}$$

9.2. Seja $A(x)$ a área do triângulo [OBA] em função de x. Pretende-se determinar o mínimo da função A.

$\overline{OB} = x$; $\overline{AB} = f(x)$

$$A(x) = \frac{x \times f(x)}{2} = \frac{x \times \frac{9+x}{x-3}}{2} = \frac{9x+x^2}{2x-6}$$

$$A'(x) = \left(\frac{9x+x^2}{2x-6}\right)' =$$

$$= \frac{(9x+x^2)'(2x-6) - (9x+x^2)(2x-6)'}{(2x-6)^2}$$

$$= \frac{(9+2x)(2x-6) - (9x+x^2)\times 2}{(2x-6)^2}$$

$$= \frac{18x - 54 + 4x^2 - 12x - 18x - 2x^2}{(2x-6)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 12x - 54}{(2x-6)^2}$$

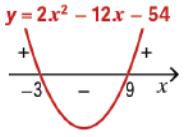
$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 12x - 54}{(2x-6)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 12x - 54 = 0 \wedge (2x-6)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 = 0 \wedge 2x - 6 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36+108}}{2\times 1} \wedge x \neq 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 12}{2} \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 9$$



Como $x > 3$, $x = 9$.

x	3		9	$+\infty$
A'		−	0	+
A		↘	13,5	↗
			Mín.	

Como $(2x-6)^2 > 0, \forall x > 3$, o sinal de A' depende apenas do sinal do numerador.

$$A(9) = \frac{9\times 9 + 9^2}{2\times 9 - 6} = \frac{162}{12} = 13{,}5$$

O valor mínimo da área do triângulo [OBA] é 13,5 u.a. quando $x = 9$.

Pág. 75

Avaliação formativa 3

1.1. $$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^3}{x^3-1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{\left((x-1)^3\right)'}{\left(x^3-1\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3(x-1)^2 \times (x-1)'}{3x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x^2} = \frac{(1-1)^2}{1^2} = 0$$

1.2. $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x \sin x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x\sin x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{0-(-\sin x)}{(x)'\sin x + x(\sin x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin x + x\cos x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(\sin x + x\cos x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\cos x + (x)'\cos x + x(\cos x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2\cos x - x\sin x} = \frac{\cos 0}{2\cos 0 - 0} = \frac{1}{2}$$

1.3. $$\lim_{x\to -\infty} \frac{(x-1)^2}{1+x-2x^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}} \lim_{x\to -\infty} \frac{\left((x-1)^2\right)'}{\left(1+x-2x^2\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{2(x-1)(x-1)'}{1-4x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2(x-1)}{1-4x} =$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}} \lim_{x\to -\infty} \frac{(2x-2)'}{(1-4x)'} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

1.4. $$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1-2x^2}{x+1} + 2x\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1-2x^2+2x^2+2x}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2x+1}{x+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{(2x+1)'}{(x+1)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{1} = 2$$

2.1. Em $]-\infty, 1[\setminus \{-2\}$ e em $]1, +\infty[$, a função f é contínua por ser, nestes intervalos, definida por funções racionais. No ponto $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{3}{4-x^2} = \frac{3}{4-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x} + x - 1\right) = \frac{1}{1} + 1 - 1 = 1$$

$$f(1) = \frac{1}{1} + 1 - 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

Então, f é contínua em $x = 1$.

Logo, f é contínua no seu domínio.

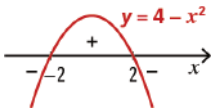
2.2. Assíntotas verticais:

f é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical em $x=-2$.

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{3}{4-x^2}=\frac{3}{4-(-2)^2}=\frac{3}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\frac{3}{0^+}=+\infty$$



A reta de equação $x=-2$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f.

Assíntotas não verticais:

Se $x\to -\infty$:

$$m=\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{3}{x\left(4-x^2\right)}=\frac{3}{+\infty(-\infty)}=\frac{3}{-\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to -\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to -\infty}\frac{3}{4-x^2}=\frac{3}{-\infty}=0$$

A reta de equação $y=0$ é assíntota ao gráfico de f quando $x\to -\infty$

Se $x\to +\infty$:

$$m=\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}+x-1}{x}=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x^2}+1-\frac{1}{x}\right)$$

$$=0+1-0=1$$

$$b=\lim_{x\to +\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}+x-1-x\right)$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}-1\right)=0-1=-1$$

A reta de equação $y=x-1$ é assíntota ao gráfico de f quando $x\to +\infty$.

As retas de equações $x=-2$, $y=0$ e $y=x-1$ são as únicas assíntotas ao gráfico de f.

3. $D_f=D_g=\mathbb{R}^+$

$$\lim_{x\to +\infty}(f(x)+3x)=0$$

$$g(x)=f(x)-x+1$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(f(x)+3x\right)=0\Leftrightarrow\lim_{x\to +\infty}\left(f(x)-(-3x)\right)=0$$

Então, a reta de equação $y=-3x$ é assíntota ao gráfico de f.

Significa que $\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=-3$.

Assíntota de g:

$$m=\lim_{x\to +\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)-x+1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-1+\frac{1}{x}\right)=-3-1+0=-4$$

$$b=\lim_{x\to +\infty}\left[g(x)-mx\right]=\lim_{x\to +\infty}\left(f(x)-x+1+4x\right)=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left(f(x)+3x+1\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(f(x)+3x\right)+1=0+1=1$$

A reta de equação $y=-4x+1$ é assíntota do gráfico de g.

4. $D_f=\mathbb{R}^+$

$$h(x)=\frac{1}{x}-2x-f(x)$$

Se $y=2x-3$ é assíntota de f, então:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=2$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left[f(x)-2x\right]=-3$$

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=+\infty$$

I. $\lim_{x\to +\infty}h(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}-2x-f(x)\right)=\frac{1}{+\infty}-\infty-\infty=-\infty$

I – b)

II. $\lim_{x\to +\infty}\left(2x-f(x)\right)=-\lim_{x\to +\infty}\left(f(x)-2x\right)=-(-3)=3$

II – c)

III. $m=\lim_{x\to +\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}-2x-f(x)}{x}$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x^2}-2-\frac{f(x)}{x}\right)=\frac{1}{+\infty}-2-2=-4$$

III – c)

IV. $\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=2\Leftrightarrow\lim_{x\to +\infty}\frac{ax^2}{x(bx+3)}=2$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to +\infty}\frac{ax^2}{bx^2+3x}=2\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\Leftrightarrow}}\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(ax^2\right)'}{\left(bx^2+3x\right)'}=2$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to +\infty}\frac{2ax}{2bx+3}=2\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\Leftrightarrow}}\lim_{x\to +\infty}\frac{(2ax)'}{(2bx+3)'}=2$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to +\infty}\frac{2a}{2b}=2\Leftrightarrow\lim_{x\to +\infty}\frac{a}{b}=2\Leftrightarrow a=2b,\ b\neq 0$$

$$f(x)=\frac{2bx^2}{bx+3}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left[f(x)-2x\right]=-3\Leftrightarrow\lim_{x\to +\infty}\left[\frac{2bx^2}{bx+3}-2x\right]=-3$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to +\infty}\frac{2bx^2-2bx^2-6x}{bx+3}=-3\Leftrightarrow\lim_{x\to +\infty}\frac{-6x}{bx+3}=-3$$

$$\underset{\text{R L'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\Leftrightarrow}}\lim_{x\to +\infty}\frac{(-6x)'}{(bx+3)'}=-3\Leftrightarrow\lim_{x\to +\infty}\frac{-6}{b}=-3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b=\frac{-6}{-3}\Leftrightarrow b=2$$

$$a=2b\Leftrightarrow a=2\times 2\Leftrightarrow a=4$$

IV – a)

I – b), II – c), III – c), IV – a)

4. Função inversa

Pág. 76

Tarefa 5

Na função *f* porque existem retas horizontais que intersetam o gráfico de *f* em dois pontos.

Pág. 77

Questão 69

69.1. $f(x) = -3x$

1.º Escrevemos *y* em função de x: $f(x) = y$

$f(x) = y \Leftrightarrow -3x = y$

2.º Resolvemos a equação $f(x) = y$ em ordem a x.

$-3x = y \Leftrightarrow x = -\frac{y}{3}$

3.º Trocamos as variáveis x e y

$y = -\frac{x}{3}$

$f^{-1}(x) = -\frac{x}{3}$

69.2. $f(x) = -x + \frac{1}{10}$

1.º Escrevemos *y* em função de $x: f(x) = y$

$f(x) = y \Leftrightarrow -x + \frac{1}{10} = y$

2.º Resolvemos a equação $f(x) = y$ em ordem a x.

$-x + \frac{1}{10} = y \Leftrightarrow -x = y - \frac{1}{10} \Leftrightarrow x = -y + \frac{1}{10}$

3.º Trocamos as variáveis x e y

$y = -x + \frac{1}{10}$

$f^{-1}(x) = -x + \frac{1}{10}$

69.3. $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$

1.º Escrevemos *y* em função de $x: f(x) = y$

$f(x) = y \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x + \frac{1}{4} = y$

2.º Resolvemos a equação $f(x) = y$ em ordem a x.

$-\underset{(\times 4)}{\frac{1}{3}}x + \underset{(\times 3)}{\frac{1}{4}} = \underset{(\times 12)}{y} \Leftrightarrow -4x + 3 = 12y \Leftrightarrow -4x = 12y - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -3y + \frac{3}{4}$

3.º Trocamos as variáveis x e y

$y = -3x + \frac{3}{4}$

$f^{-1}(x) = -3x + \frac{3}{4}$

Pág. 78

Questão 70

70.1. $f(x) = x^3$; $f(x) = y \Leftrightarrow x^3 = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$

$y = \sqrt[3]{x}$

$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow \sqrt[3]{x}$

70.2. $f(x) = \frac{2x^3 - 1}{3}$

$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{2x^3 - 1}{3} = y \Leftrightarrow 2x^3 - 1 = 3y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^3 = 3y + 1 \Leftrightarrow x^3 = \frac{3y+1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{3y+1}{2}}$

$y = \sqrt[3]{\frac{3x+1}{2}}$

$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow \sqrt[3]{\frac{3x+1}{2}}$

70.3. $f(x) = x^5 - \frac{1}{3}$

$f(x) = y \Leftrightarrow x^5 - \frac{1}{3} = y \Leftrightarrow x^5 = y + \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{y + \frac{1}{3}}$

$y = \sqrt[5]{y + \frac{1}{3}}$

$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow \sqrt[5]{y + \frac{1}{3}}$

Questão 71

71.1.

C.A. $\left| \begin{array}{l} 3x - 1 \quad \lfloor x + 2 \\ -3x - 6 \quad\quad 3 \\ \hline -7 \end{array} \right.$

$f(x) = 3 - \frac{7}{x+2}$

$x = -2$: assíntota vertical

$y = 3$: assíntota horizontal

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $D'_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$



71.2. $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+2} = y \underset{x \neq -2}{\Leftrightarrow} 3x - 1 = yx + 2y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x - yx = 2y + 1 \Leftrightarrow x(3 - y) = 2y + 1 \underset{y \neq 3}{\Leftrightarrow} x = \frac{2y+1}{3-y}$

$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3-x}$

Pág. 80

Tarefas de consolidação 4

1.1. $D_f = [0,5]$; $D'_f = [1,9]$

1.2. Sejam A, B e C pontos do gráfico de f tais que $A(0,1)$, $B(4,3)$ e $C(5,9)$.

Para $0 \leq x \leq 4$:

$m_{AB} = \frac{3-1}{4-0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$y = mx + b$

$y = \frac{1}{2}x + 1$; $A(0,1)$; $b = 1$

Para $4 < x \leq 5$:

$m_{BC} = \frac{9-3}{5-4} = 6$

$y = mx + b$

$y = 6x + b$

$B(4,3)$

$3 = 6 \times 4 + b \Leftrightarrow 3 = 24 + b \Leftrightarrow b = -21$

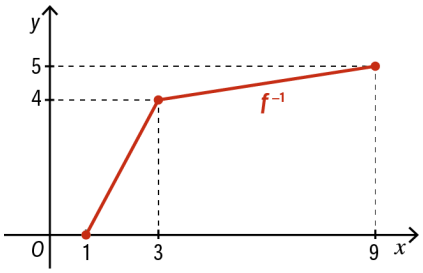
$y = 6x - 21$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 4 \\ 6x - 21 & \text{se} \quad 4 < x \leq 5 \end{cases}$$

1.3.







1.4. Sejam A, B e C pontos do gráfico de f^{-1} tais que $A(1,0)$, $B(3,4)$ e $C(9,5)$.

Para $1 \leq x \leq 3$

$m_{AB} = \frac{4-0}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$

$y = mx + b$

$y = 2x + b$; $A(1,0)$

$0 = 2 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -2$

$y = 2x - 2$

Para $3 < x \leq 9$:

$m_{BC} = \frac{5-4}{9-3} = \frac{1}{6}$

$y = mx + b$

$y = \frac{1}{6}x + b$; $A(3,4)$

$4 = \frac{1}{6} \times 3 + b \Leftrightarrow b = 4 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = \frac{7}{2}$

$y = \frac{1}{6}x + \frac{7}{2} = \frac{x+21}{6}$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{x+21}{6} & \text{se} \quad 3 < x \leq 9 \end{cases}$$

$D_{f^{-1}} = [1,9]$, $D'_{f^{-1}} = [0,5]$

1.5. **a)** Para $1 \leq x \leq 3$:

$(f^{-1})'(x) = (2x-2)' = 2$

$(f^{-1})'(2) = 2$

b) Para $3 < x \leq 9$:

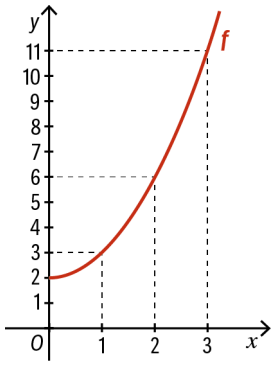
$(f^{-1})'(x) = \left(\frac{1}{6}x + \frac{7}{2}\right)' = \frac{1}{6}$

$(f^{-1})'(6) = \frac{1}{6}$

2.1. $f(0) = 0^2 + 2 = 2$; $f(1) = 1^2 + 2 = 3$

$f(2) = 2^2 + 2 = 6$; $f(3) = 3^2 + 2 = 11$

$D'_f = [2, +\infty[$



2.2. $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 2 = y \Leftrightarrow x^2 = y - 2 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{y-2}$

$y = \sqrt{x-2}$

$f^{-1}: [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_0^+$

$x \rightarrow \sqrt{x-2}$

2.3. $(f^{-1})'(x) = \left[(x-2)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(x-2)^{\frac{1}{2}-1} \times (x-2)' =$

$= \frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{1}{2}} \times 1 = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$

$m = (f^{-1})'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3-2}} = \frac{1}{2}$

C.A. $\left|\begin{array}{l} f^{-1}(3)=\sqrt{3-2}=1 \\ (3,1)\end{array}\right.$

$y=\frac{1}{2}x+b$

$1=\frac{1}{2}\times 3+b \Leftrightarrow 1-\frac{3}{2}=b \Leftrightarrow b=-\frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

3.1. $f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{3-x}=y \Leftrightarrow$

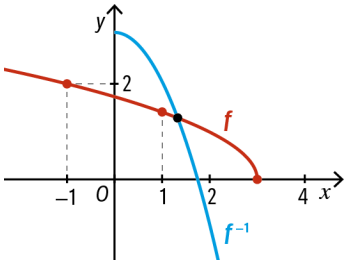
$\underset{x<3}{\Leftrightarrow} 3-x=y^2 \Leftrightarrow -x=y^2-3 \Leftrightarrow x=-y^2+3$

$y=-x^2+3$

$f^{-1}:\mathbb{R}_0^+ \rightarrow]-\infty,3]$

$x \rightarrow -x^2+3$

3.2.



3.3. $f'(x)=\left[(3-x)^{\frac{1}{2}}\right]'=\frac{1}{2}(3-x)^{\frac{1}{2}-1}\times(3-x)'=$

$=\frac{1}{2}(3-x)^{-\frac{1}{2}}\times(-1)=-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}$

$y=mx+b$

$m=f'(-1)=-\frac{1}{2\sqrt{3-(-1)}}=-\frac{1}{4}$

C.A. $\left|\begin{array}{l} f(-1)=\sqrt{3-(-1)}=2 \\ (-1,2)\end{array}\right.$

$y=-\frac{1}{4}x+b$

$2=-\frac{1}{4}\times(-1)+b \Leftrightarrow 2-\frac{1}{4}=b \Leftrightarrow b=\frac{7}{4}$

$y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}$

4. $f^{-1}(2)+f^{-1}(3)-f^{-1}\left[f(5)\right]=1+3-5=-1$

$0 \overset{f}{\underset{f^{-1}}{\rightleftarrows}} 0$

$1 \overset{f}{\underset{f^{-1}}{\rightleftarrows}} 2$

$3 \overset{f}{\underset{f^{-1}}{\rightleftarrows}} 3$

$6 \overset{f}{\underset{f^{-1}}{\rightleftarrows}} 4$

$5 \overset{f}{\underset{f^{-1}}{\rightleftarrows}} f(5)$

5.1. $f(x)=\frac{1}{2x+10}$; $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-5\}$

$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{1}{2x+10}=y \underset{x\neq -5}{\Leftrightarrow} 1=2xy+10y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2xy=10y-1 \Leftrightarrow x=\frac{10y}{-2y}-\frac{1}{-2y} \Leftrightarrow x=-5+\frac{1}{2y}$

$y=-5+\frac{1}{2x}$

$f^{-1}(x)=-5+\frac{1}{2x}$; $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f^{-1}:\mathbb{R}\setminus\{0\} \rightarrow \mathbb{R}\setminus\{5\}$

$x \rightarrow -5+\frac{1}{2x}$

5.2. $f(x)=\sqrt{x^2+4}$; $D_f=\mathbb{R}_0^+$

Como 0 é o menor valor do domínio de *f* e *f* é uma função estritamente crescente, $f(0)=\sqrt{0^2+4}=2$ é o menor valor do contradomínio de *f*.

$D_f'=[2,+\infty[$

$f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4}=y \underset{x^2+4>0}{\Leftrightarrow} x^2+4=y^2 \Leftrightarrow$

$\underset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2=y^2-4 \Leftrightarrow x=\sqrt{y^2-4}$

$y=\sqrt{x^2-4}$

$f^{-1}:[2,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}_0^+$

$x \rightarrow \sqrt{x^2-4}$

Pág. 81

6. $f(x)=\sqrt{x+1}$; $D_f=[1,+\infty[$

$g(x)=x^2$; $D_g=\mathbb{R}_0^+$

C.A. $f(x)=5 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=5 \underset{x>1}{\Leftrightarrow} x-1=25 \Leftrightarrow x=26$

$26 \overset{f}{\underset{f^{-1}}{\rightleftarrows}} 5$

$g(x)=4 \Leftrightarrow x^2=4 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x=2$

$2 \overset{g}{\underset{g^{-1}}{\rightleftarrows}} 4$

$f(x)=2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=2 \Leftrightarrow x-1=4 \Leftrightarrow x=5$

$5 \overset{f}{\underset{f^{-1}}{\rightleftarrows}} 2$

$f^{-1}(5)+(f^{-1}\circ g^{-1})(4)=26+f^{-1}\left[g^{-1}(4)\right]=$

$=26+f^{-1}(2)=26+5=31$

7. Como o gráfico de f^{-1} se obtém do gráfico de *f* pela reflexão do eixo $y=x$, a figura que pode ser parte do gráfico da função f^{-1} é o da opção (C).

8. $(g \circ f^{-1})(-2) = g\left[f^{-1}(-2)\right] = g(-3) = |-3| = 3$

9. $f(-2) = -2$

$g(x) = kx + 3$

$(f+g)^{-1}(-5) = -2 \Leftrightarrow (f+g)(-2) = -5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(-2) + g(-2) = -5 \Leftrightarrow -2 + g(-2) = -5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(-2) = -3$

Por outro lado, $g(-2) = -2k + 3$.

Logo, $-2k + 3 = -3 \Leftrightarrow -2k = -6 \Leftrightarrow k = 3$

Opção (D)

Pág. 83

Avaliação formativa 4

1. **Opção (A)**

$f(x) = 2x$; $f(x) = y \Leftrightarrow 2x = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{2}$

$y = \frac{x}{2}$; $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$; Verdadeira.

Opção (B)

$f(x) = x$; $f(x) = y \Leftrightarrow x = y$

$y = x$; $f^{-1}(x) = x$; Falsa.

Opção (C); Verdadeira.

Opção (D)

$f(x) = \frac{x}{6}$

$D_f = [3,6]$; $D'_f = \left[\frac{1}{2}, -1\right]$

$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{6} = y \Leftrightarrow x = 6y$

$y = 6x$; $f^{-1}(x) = g(x) = 6x$

$D_g = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$; $D'_g = [3,6]$; Verdadeira.

Opção (E)

$f(x) = x^2$

$D_f = \mathbb{R}_0^-$; $D'_f = \mathbb{R}_0^+$

$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y \underset{x<0}{\Leftrightarrow} x = -\sqrt{y}$

$y = -\sqrt{x}$

$f^{-1}(x) = g(x) = -\sqrt{x}$

$D_g = \mathbb{R}_0^+$; $D'_g = \mathbb{R}_0^-$; Falsa.

2. $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 3 = y \Leftrightarrow x + 6 = 2y \Leftrightarrow x = 2y - 6$

$\underset{(\times 2)}{} \quad \underset{(\times 2)}{}$

$y = 2x - 6$

$f^{-1}(x) = 2x - 6$

3.1. $f(x) = \frac{1}{3x + 12}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 3x + 12 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-4\} = D'_{f^{-1}}$

$3x \neq -12 \Leftrightarrow x \neq -4$

Vamos escrever a expressão analítica de f^{-1} e calcular o seu domínio.

$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{3x + 12} = y \underset{x \neq -4}{\Leftrightarrow} 1 = 3xy + 12y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3xy = 1 - 12y \Leftrightarrow x = \frac{1 - 12y}{3y}$

$y = \frac{1 - 12x}{3x}$

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{4\}$

$x \rightarrow \frac{1 - 12x}{3x}$

3.2. $g(x) = \frac{x}{x-1}$; $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Vamos escrever a expressão analítica de $g_{f^{-1}}$ e calcular o seu domínio.

$g(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} = y \underset{x \neq 1}{\Leftrightarrow} x = y(x-1) \Leftrightarrow x = xy - y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - xy = y \Leftrightarrow x(1-y) = -y \Leftrightarrow x = \frac{y}{y-1}$

$y = \frac{x}{x-1}$

$g^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}$; $D_{g^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$g^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$x \rightarrow \frac{x}{x-1}$

4. $f(x) = \sqrt{x-2}$; $D_f = [2, +\infty[$

$f(x) = 2 \underset{x \geq 2}{\Leftrightarrow} \sqrt{x-2} = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 4 \Leftrightarrow x = 6$

$f^{-1}(2) = 6$

I – c)

$f(x) = 3 \underset{x \geq 2}{\Leftrightarrow} \sqrt{x-2} = 3 \Leftrightarrow x - 2 = 9 \Leftrightarrow x = 11$

$f^{-1}(3) = 11$

II – c)

$f(x) = y \underset{x \geq 2}{\Leftrightarrow} \sqrt{x-2} = y \Leftrightarrow x - 2 = y^2 \Leftrightarrow x = y^2 + 2$

$y = x^2 + 2$; $f^{-1}(x) = x^2 + 2$

III – a)

$D_{f^{-1}} = D'_f$

f é uma função estritamente crescente e o menor valor de f ocorre quando $x = 2$, ou seja,

$\sqrt{2-2} = 0$; logo, $D'_f = [0, +\infty[= \mathbb{R}_0^+$. Assim,

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$.

IV – a)

5. Funções exponenciais

Pág. 84

Tarefa 6

1.1. $f(1)=4^1=4$

1.2. $g(-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$

1.3. $f(0)=4^0=1$

1.4. $f\left(\frac{1}{2}\right)=4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$

1.5. $f\left(\frac{3}{2}\right)=4^{\frac{3}{2}}=\left(2^2\right)^{\frac{3}{2}}=2^3=8$

1.6. $g\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

2.1. $\left[f(2)\right]^{-2}=\left(4^2\right)^{-2}=4^{-4}=\frac{1}{4^4}=\frac{1}{256}$

2.2. $f(-2)\times f(2)=4^{-2}\times 4^2=4^0=1$

2.3. $f(2)\times g(-2)=4^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=2^4\times 2^2=2^6=64$

2.4. $\frac{g(2)}{g(3)}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$

2.5. $\frac{f(-2)}{g(-2)}=\frac{4^{-2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}=\left(4:\frac{1}{2}\right)^{-2}=(4\times 2)^{-2}=8^{-2}=\frac{1}{64}$

2.6. $f(2)\times g(2):g(-3)=4^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2:\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=$

$=\left(\frac{4}{2}\right)^2:\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=2^2:2^3=2^{-1}=\frac{1}{2}$

Pág. 85

Questão 72

72.1. 2^x e 5^x são da forma a^x, $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Então, as funções representadas em (B) e (C) são funções exponenciais.

72.2. a) $f(0)=\left(\frac{2}{3}\right)^0=1$

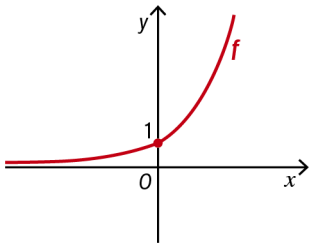
b) $f(1)=\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{3}$

c) $f(2)\times f(-3)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2-3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{2}$

Pág. 86

Tarefa 7

1. Se $a>1$:



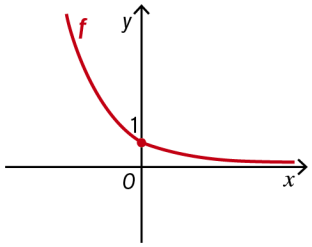
$D_f=\mathbb{R}$; $D'_f=\mathbb{R}^+$

f é crescente

A reta de equação $y=0$ é assíntota ao gráfico de f quando $x\to-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Se $0<a<1$:



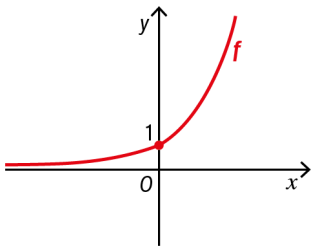
$D_f=\mathbb{R}$; $D'_f=\mathbb{R}^+$

f é decrescente.

A reta de equação $y=0$ é assíntota ao gráfico de f quando $x\to+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

2. $e\approx 2{,}78>1$; $f(x)=e^x$



Pág. 88

Questão 73

73.1. $f(x)=a^x$, $a>0\wedge a\neq 1$

O ponto de coordenadas $\left(3,\frac{1}{8}\right)$ pertence ao gráfico de f. Então,

$f(3)=\frac{1}{8}\Leftrightarrow a^3=\frac{1}{8}\Leftrightarrow a=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$

Logo, $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

73.2. $g(x)=a^x$, $a>0 \wedge a\neq 1$

O ponto de coordenadas $(2,25)$ pertence ao gráfico de *g*. Então,

$g(2)=25 \Leftrightarrow a^2=25 \Leftrightarrow a=\pm\sqrt{25} \Leftrightarrow a=\pm 5$

Como $a>0$, $a=5$.

Logo, $g(x)=5^x$.

73.3. a) $h(x)=\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{(5)^x}=\left(\frac{1}{10}\right)^x$

$D'_h=\mathbb{R}^+$

$h:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

$x \rightarrow \left(\frac{1}{10}\right)^x$

Como *h* é definida por uma expressão da forma a^x com $0<a<1$, *h* é estritamente decrescente.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^x=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^x=0$

Questão 74

$f(a)=b \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^a=b \Leftrightarrow b=\frac{1}{3^a}$

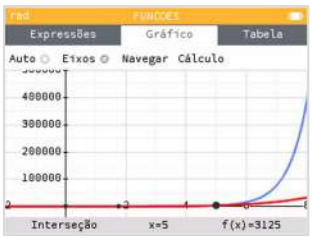
$\frac{3}{b}=\frac{3}{\frac{1}{3^a}}=3\times 3^a=3^{a+1}$

Opção (D)

Pág. 89

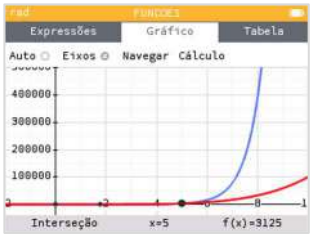
Questão 75

75.1. Visualizando os gráficos *f* e *g* no intervalo $[-2,8]$, verificamos que, para $x>5$, o gráfico de *g* está acima do gráfico de *f*.



75.2. Para obtermos uma visão mais ampla, consideramos agora o intervalo $[-2,10]$.

Graficamente, verificamos que a função exponencial de base 5 cresce muito mais rapidamente que a função *f* definida por $f(x)=x^5$, quando x tende para $+\infty$.



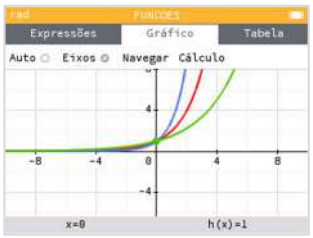
75.3. Pela questão anterior, e observando os valores da tabela ao lado, o numerador cresce muito mais rapidamente do que o denominador, pelo que, intuitivamente, se conclui que: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5^x}{x^5}=+\infty$.



Pág. 90

Tarefa 8

1. Seja *f* a função do tipo $f(x)=a^x$, com $a>1$.



Na figura, podemos observar três dessas funções de expressões: $y=2^x$, $y=3^x$ e $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$.

$D_f=\mathbb{R}$; $D'_f=\mathbb{R}^+$

f não interseta o eixo Ox, ou seja, *f* não tem zeros.

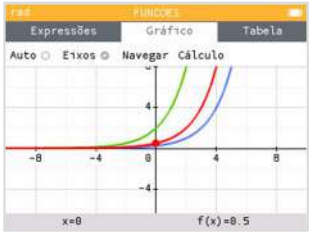
f não interseta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0,1)$, ou seja, $f(0)=1$.

f é estritamente crescente.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

$y=a^{x-c}$, $(b=1 \wedge d=0)$

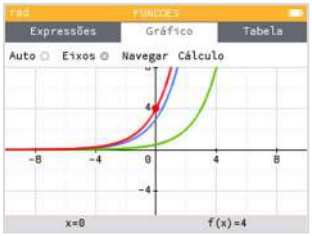
Seja *g* a função definida por $g(x)=2^{x-c}$ e representamos três funções deste tipo ($g_1(x)=2^{x-1}$, $g_2(x)=2^{x-2}$ e $g_3(x)=2^{x+1}$).



$D_g=\mathbb{R}$; $D'_g=\mathbb{R}^+$

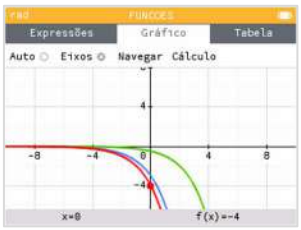
g não interseta o eixo Ox, ou seja, *g* não tem zeros.
As funções intersetam o eixo *Oy* nos pontos de coordenadas $(0;0,5)$, $(0;0,25)$ e $(0,2)$ respetivamente, ou seja, $g_1(0)=0,5$; $g_2(0)=0,25$ e $g_3(0)=2$.
g é estritamente crescente.
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$
$y=ba^{x-c}$, $(b\neq 0 \wedge d=0)$

Seja *h* a função definida por $h(x)=b2^x$, com $b>0$, e representamos três funções deste tipo $(h_1(x)=4\times 2^x$, $h_2(x)=3\times 2^x$ e $h_3(x)=\frac{1}{2}\times 2^x)$.



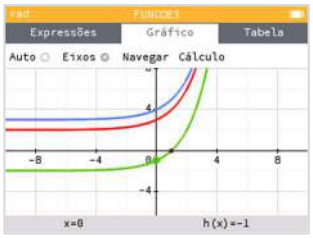
$D_h=\mathbb{R}$; $D'_h=\mathbb{R}^+$
h não interseta o eixo Ox, ou seja, *h* não tem zeros.
As funções intersetam o eixo *Oy* nos pontos de coordenadas $(0,4)$, $(0,3)$ e $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.
respetivamente, ou seja, $h_1(0)=4$; $h_2(0)=3$ e $h_3(0)=\frac{1}{2}$.
h é estritamente crescente.
$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0$

Seja *i* a função definida por $i(x)=b2^x$, com $b<0$, e representemos três funções deste tipo $(i(x)=-4\times 2^x$, $i_2(x)=-3\times 2^x$ e $i_3(x)=-\frac{1}{2}\times 2^x)$.



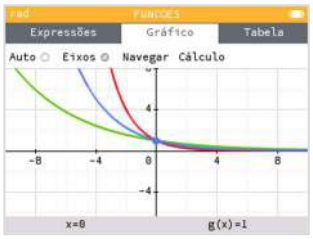
$D_i=\mathbb{R}$; $D'_i=\mathbb{R}^-$
i não interseta o eixo Ox, ou seja, *i* não tem zeros.
As funções intersetam o eixo *Oy* nos pontos de coordenadas $(0,-4)$, $(0,-3)$ e $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$,
respetivamente, ou seja, $i_1(0)=-4$; $i_2(0)=-3$ e $i_3(0)=-\frac{1}{2}$.
i é estritamente decrescente.
$\lim\limits_{x\to+\infty} i(x)=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} i(x)=0$
$y=ba^{x-c}$, $(b\neq 0)$

Seja *j* a função definida por $j(x)=2^x+d$ e representemos três funções deste tipo $(j_1(x)=2^x+2$, $j_2(x)=2^x+3$ e $j_3(x)=2^x-2)$.



$D_j=\mathbb{R}$
$D'_{j_1}=]2,+\infty[$; $D'_{j_2}=]3,+\infty[$ e $D'_{j_3}=]-2,+\infty[$
j_1 e j_2 não intersetam o eixo Ox, ou seja, *h* não tem zeros. j_3 interseta o eixo Ox no ponto de coordenadas $(1,0)$, ou seja, 1 é zero de j_3.
As funções intersetam o eixo *Oy* nos pontos de coordenadas $(0,3)$, $(0,4)$ e $(0,-1)$,
respetivamente, ou seja, $j_1(0)=3$; $j_2(0)=4$ e $j_3(0)=-1$.
j é estritamente crescente.
$\lim\limits_{x\to+\infty} j(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} j_1(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} j_2(x)=3$, $\lim\limits_{x\to-\infty} j_3(x)=-2$

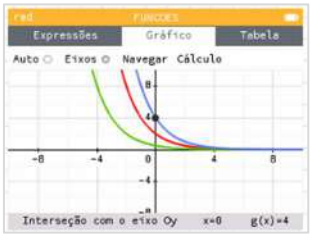
2. Seja *f* a função do tipo $f(x)=a^x$, com $0<a<1$.



Na figura podemos observar três dessas funções de expressões: $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ e $y=\left(\frac{4}{5}\right)^x$.

$D_f=\mathbb{R}$; $D'_f=\mathbb{R}^+$
f não interseta o eixo Ox, ou seja, *f* não tem zeros.
f não interseta o eixo *Oy* no ponto de coordenadas $(0,1)$, ou seja, $f(0)=1$.
f é estritamente decrescente.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$
$y=a^{x-c}$, $(b=1\wedge d=0)$

Seja *g* a função definida por $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-c}$ e representamos três funções deste tipo $(g_1(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$, $g_2(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ e $g_3(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1})$.



$D_g = \mathbb{R}$; $D'_g = \mathbb{R}^+$

g não interseta o eixo Ox, ou seja, *g* não tem zeros.

As funções intersetam o eixo *Oy* nos pontos de coordenadas $(0,2)$, $(0,4)$ e $(0;0,5)$.

respetivamente, ou seja, $g_1(0) = 2$; $g_2(0) = 4$ e $g_3(0) = 0,5$.

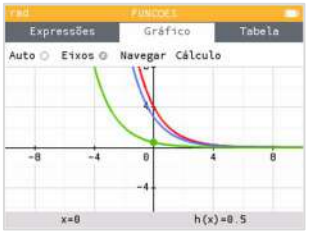
g é estritamente decrescente.

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

$y = ba^{x-c}$, $(b \neq 0 \wedge d = 0)$

Seja *h* a função definida por $h(x) = b \times \left(\frac{1}{2}\right)^x$, com $b > 0$, e representamos três funções deste tipo

$(h_1(x) = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $h_2(x) = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $h_3(x) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^x)$.



$D_h = \mathbb{R}$; $D'_h = \mathbb{R}^+$

h não interseta o eixo Ox, ou seja, *h* não tem zeros. As funções intersetam o eixo *Oy* nos pontos de coordenadas $(0,4)$, $(0,3)$ e $\left(0,\frac{1}{2}\right)$,

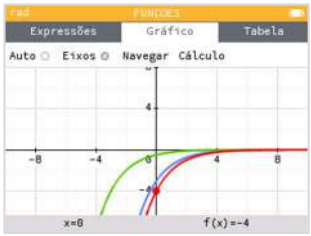
respetivamente, ou seja, $h_1(0) = 4$; $h_2(0) = 3$ e $h_3(0) = \frac{1}{2}$.

h é estritamente decrescente.

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$

Seja *i* a função definida por $i(x) = b\left(\frac{1}{2}\right)^x$, com $b < 0$, e representemos três funções deste tipo

$(i(x) = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $i_2(x) = -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $i_3(x) = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^x)$.



$D_i = \mathbb{R}$; $D'_i = \mathbb{R}^-$

i não interseta o eixo Ox, ou seja, *i* não tem zeros.

As funções intersetam o eixo *Oy* nos pontos de coordenadas $(0,-4)$, $(0,-3)$ e $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$

respetivamente, ou seja, $i_1(0) = -4$; $i_2(0) = -3$ e $i_3(0) = -\frac{1}{2}$.

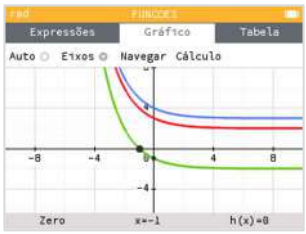
i é estritamente decrescente.

$\lim\limits_{x \to +\infty} i(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} i(x) = -\infty$

$y = ba^{x-c} + d$, $(b \neq 0)$

Seja *j* a função definida por $j(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + d$ e representemos três funções deste tipo

$(j_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$, $j_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$ e $j_3(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2)$.



$D_j = \mathbb{R}$

$D'_{j_1} =]2,+\infty[$; $D'_{j_2} =]3,+\infty[$ e $D'_{j3} =]-2,+\infty[$

j_1 e j_2 não intersetam o eixo Ox, ou seja, não tem zeros. j_3 interseta o eixo Ox no ponto de coordenadas $(-1,0)$, ou seja, -1 é zero de j_3.

As funções intersetam o eixo *Oy* nos pontos de coordenadas $(0,3)$, $(0,4)$ e $(0,-1)$,

respetivamente, ou seja, $j_1(0) = 3$; $j_2(0) = 4$ e $j_3(0) = -1$.

j é estritamente decrescente.

$\lim\limits_{x \to -\infty} j(x) = +\infty$

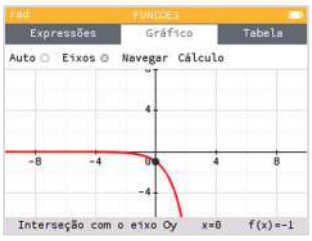
e $\lim\limits_{x \to +\infty} j_1(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} j_2(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to +\infty} j_3(x) = -2$

Pág. 91

Questão 76

76.1. $f(x) = -3^x$

O gráfico de *f* obtém-se do gráfico da função definida por $y = 3^x$ por uma reflexão de eixo Ox.



$D'_f = \mathbb{R}^-$

f é estritamente decrescente.

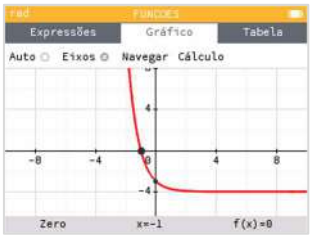
O gráfico de *f* interseta o eixo *Oy* no ponto $(0, -3^0) = (0, -1)$ e não interseta o eixo Ox.

A reta de equação $y = 0$ é assíntota ao gráfico de *f*.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-3^x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} (-3^x) = 0$

76.2. $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 4$

O gráfico de *g* obtém-se do gráfico da função definida por $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ por um deslocamento vertical de quatro unidades para baixo.



$D'_g =]-4, +\infty[$

g é estritamente decrescente.

$g(0) = \left(\frac{1}{4}\right)^0 - 4 = 1 - 4 = -3$

$g(-1) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} - 4 = 4 - 4 = 0$

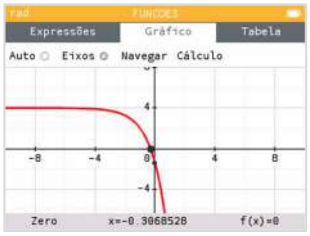
O gráfico de *g* interseta o eixo *Oy* no ponto $(0, -3)$ e o eixo Ox no ponto de coordenadas $(-1, 0)$.

A reta de equação $y = -4$ é assíntota ao gráfico de *g*.

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -4$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

76.3. $h(x) = -2e^{x+1} + 4$

O gráfico de *h* obtém-se do gráfico da função definida por $y = e^x$ pela aplicação sucessiva de: um deslocamento horizontal de uma unidade para a esquerda; dilatação vertical de coeficiente 2; reflexão de eixo Ox; deslocamento vertical de 4 unidades para cima.



$D'_h =]-\infty, 4[$

h é estritamente decrescente.

O gráfico de *h* interseta o eixo *Oy* no ponto $(0, -2e + 4)$ e interseta o eixo Ox num ponto, ou seja, *h* tem um zero.

A reta de equação $y = 4$ é assíntota ao gráfico de *h*.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-2e^{x+1} + 4) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} g(-2e^{x+1} + 4) = 4$

Pág. 92

Questão 77

77.1. $2^{\frac{x}{2}} = 64 \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2^6 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 6 \Leftrightarrow x = 12$; $S = \{12\}$

77.2. $8^{2x-1} - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 8^{2x-1} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left(2^3\right)^{2x-1} = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{6x-3} = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 6x - 3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 12x - 6 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{12}$; $S = \left\{\frac{7}{12}\right\}$

77.3. $\left(4^{1-x}\right)^2 = 8^{-x} \Leftrightarrow 4^{2-2x} = 8^{-x} \Leftrightarrow \left(2^2\right)^{2-2x} = \left(2^3\right)^{-x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{4-4x} = 2^{-3x} \Leftrightarrow 4 - 4x = -3x \Leftrightarrow -4x + 3x = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x = -4 \Leftrightarrow x = 4$; $S = \{4\}$

77.4. $-5^{2x+3} - 1 = 4 \Leftrightarrow -5^{2x+3} = 5 \Leftrightarrow 5^{2x+3} = -5$

Equação impossível ($5^{2x-3} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$) ; $S = \{\ \}$

Questão 78

78.1. O gráfico de *f* obtém-se do gráfico da função definida por $y = 4^x$ por um deslocamento vertical de 8 unidades para baixo. Logo, a reta de equação $y = -8$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

O gráfico de *g* obtém-se do gráfico da função definida por $y = 2^x$ pela aplicação sucessiva de: deslocamento horizontal de 2 unidades para a esquerda seguida de um deslocamento vertical de 24 unidades para cima. Logo, a reta da equação $y = 24$ é assíntota horizontal ao gráfico de *g*.

As retas de equações $y = -8$ e $y = 24$ são assíntotas horizontais aos gráficos de *f* e de *g*, respetivamente.

78.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4^x - 8 = 0 \Leftrightarrow 4^x = 8 \Leftrightarrow \left(2^2\right)^x = 2^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{2x} = 2^3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}$ é o zero de *f*.

78.3. $f(0)=4^0-8=1-8=-7$

$A(0,-7)$

$g(0)=2^{0-2}+24=2^2+24=4+24=28$

$C(0,28)$

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 4^x-8\Leftrightarrow 2^{x+2}+24\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(2^2\right)^x-8=2^x\times 2^2+24\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2-4\times 2^x-32=0$

Fazendo $2^x=y$, resulta:

$$y^2-4y-32=0\Leftrightarrow y=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times 1\times(-32)}}{2\times 1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{4\pm\sqrt{144}}{2}\Leftrightarrow y=\frac{4\pm 12}{2}\Leftrightarrow y=8\vee y=-4\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2^x=2^3\vee \underbrace{2^x=-4}_{\text{equação impossível}}\Leftrightarrow x=3$

$\overline{AC}=28-(-7)=35$

$$A_{[ABC]}=\frac{\overline{AC}\times x_B}{2}=\frac{35\times 3}{2}=52{,}5 \text{ u. a.}$$

Pág. 93

Questão 79

79.1. $A(0)=0{,}24e^{0{,}3\times 0}=0{,}24\times e^0=0{,}24\times 1=0{,}24 \text{ m}^2$

Significa que a área ocupada pelas ervas aromáticas na primeira observação era de $0{,}24 \text{ m}^2$.

79.2. $$\frac{A(t+1)}{A(t)}=\frac{0{,}24e^{0{,}3(t+1)}}{0{,}24e^{0{,}3t}}=\frac{e^{0{,}3t+0{,}3}}{e^{0{,}3t}}=\frac{e^{0{,}3t}\times e^{0{,}3}}{e^{0{,}3t}}=e^{0{,}3}\approx$$

$\approx 1{,}35$

$$\frac{A(t+1)}{A(t)}\approx 1{,}35\Leftrightarrow A(t+1)=1{,}35A(t)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow A(t+1)=A(t)+0{,}35A(t)$

Significa que a área ocupada pelas ervas aromáticas aumenta cerca de 35% em cada semana.

79.3. $A(t+x)=2A(t)$

a) $A(t+x)=2A(t)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}24\times e^{0{,}3(t+x)}=2\times 0{,}24e^{0{,}3t}\Leftrightarrow$

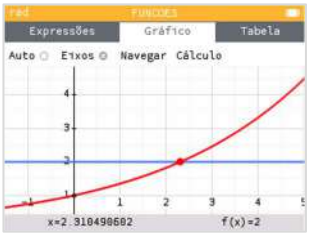
$$\Leftrightarrow e^{0{,}3t+0{,}3x}=\frac{2\times 0{,}24e^{0{,}3t}}{0{,}24}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow e^{0{,}3t}\times e^{0{,}3x}=2e^{0{,}3t}\Leftrightarrow$

$$\underset{\left(e^{0{,}3t}\neq 0\right)}{\Leftrightarrow} e^{0{,}3x}=\frac{2e^{0{,}3t}}{e^{0{,}3t}}\Leftrightarrow e^{0{,}3t}=2$$

b) Recorrendo à calculadora gráfica, determinamos a abscissa do ponto de interseção dos gráficos das funções definidas por:

$y_1=e^{0{,}3x}$ e $y_2=2$



Conclui-se que $x\approx 2{,}3$. Significa que a área ocupada pelas ervas aromáticas duplica, aproximadamente, a cada 2,3 semanas.

Questão 80

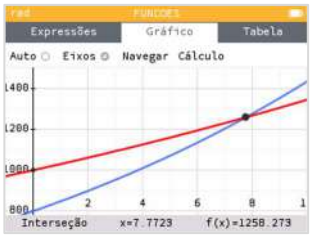
Seja A_n o capital acumulado que se obtém aplicando-se juros compostos à taxa de 3% aos 1000 € e B_n o capital acumulado que se obtém aplicando-se juros compostos à taxa de juros de 6% aos 800 €.

$A_n=1000(1+0{,}03)^n=1000\times 1{,}03^n$

$B_n=800(1+0{,}06)^n=800\times 1{,}06^n$

Recorrendo à calculadora gráfica, determinamos a abscissa do ponto de interseção dos gráficos das funções definidas por:

$y_1=1000\times 1{,}03^x$ e $y_2=800\times 1{,}06^x$



O capital acumulado é igual nas duas aplicações, ao fim de, aproximadamente, 8 anos.

Pág. 94

Questão 81

81.1. $m(100)=5\times e^{-0{,}000\,121\times 100}=5e^{-0{,}0121}\approx 4{,}9$

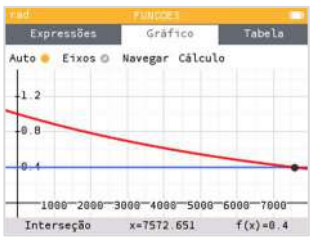
A quantidade de ^{14}C passados 100 anos da morte do organismo é, aproximadamente, 4,9 mg.

81.2. $m(t)=0{,}4m_0\Leftrightarrow m_0e^{-0{,}000\,121t}=0{,}4m_0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-0{,}000\,121t}=0{,}4$

Recorrendo à calculadora gráfica, determinamos a abscissa do ponto de interseção dos gráficos das funções definidas por:

$y_1=e^{-0{,}000\,121t}$ e $y_2=0{,}4$



O fóssil tem cerca de 7573 anos.

Pág. 95

Questão 82

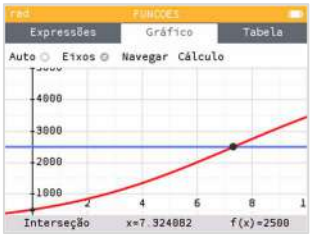
82.1. $P(0)=\dfrac{5000}{1+9e^{-0,3\times 0}}=\dfrac{5000}{1+9\times 1}=500$

No início do estudo existiam 500 peixes.

82.2. Pretende-se determinar t, tal que: $P(t)=2500$

Recorrendo à calculadora gráfica, determinamos a abcissa do ponto de interseção dos gráficos das funções definidas por:

$y_1=\dfrac{5000}{1+9e^{-0,3x}}$ e $y_2=2500$



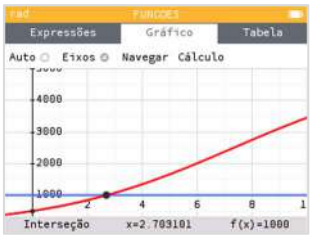
A população atinge os 2500 peixes ao fim de, aproximadamente, 7,3 anos.

82.3. $P(t)=2P(0)\Leftrightarrow \dfrac{5000}{1+9e^{-0,3t}}=2\times 500\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{5000}{1+9e^{-0,3t}}=1000$

Recorrendo à calculadora gráfica, determinamos a abcissa do ponto de interseção dos gráficos das funções definidas por:

$y_1=\dfrac{5000}{1+9e^{-0,3x}}$ e $y_2=1000$



$t\approx 2,7$

2,7 anos é o tempo necessário para o número de peixes no lago duplicar, relativamente ao número inicial.

82.4. $\dfrac{P(3)-P(2)}{P(2)}\approx\dfrac{1073,162-841,849}{1073,162}\approx 0,27$

C.A.
$P(2)=\dfrac{5000}{1+9e^{-0,3\times 2}}=\dfrac{5000}{1+9e^{-0,6}}\approx 841,849$

$P(3)=\dfrac{5000}{1+9e^{-0,3\times 3}}=\dfrac{5000}{1+9e^{-0,9}}\approx 1073,162$

Durante o terceiro ano após o início do estudo, a variação do número de peixes foi de, aproximadamente, 27%.

82.5. $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{5000}{1+9e^{-0,3t}}=\dfrac{5000}{1+9e^{-0,3\times 0}}=5000$

Significa que o número de peixes no lago tende a aproximar-se de 5000.

Pág. 96

Tarefas de consolidação 5

1.1. $x^2\times\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\dfrac{x^2}{x^{\frac{2}{3}}}=x^{2-\frac{2}{3}}=x^{\frac{4}{3}}$

1.2. $\dfrac{3a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{3}{2}}}{a^3}=\dfrac{3a^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}}{a^3}=\dfrac{3a^2}{a^3}=3a^{2-3}=3a^{-1}=\dfrac{3}{a}$

1.3. $\dfrac{\left(2^{\sqrt{2}}\right)^2+4^{\sqrt{2}}}{2^2}=\dfrac{2^{2\sqrt{2}}+\left(2^2\right)^{\sqrt{2}}}{2^2}=\dfrac{2^{2\sqrt{2}}+2^{2\sqrt{2}}}{2^2}=$

$=\dfrac{2\times 2^{2\sqrt{2}}}{2^2}=\dfrac{2^{1+2\sqrt{2}}}{2^2}=2^{1+2\sqrt{2}-2}=2^{2\sqrt{2}-1}$

2. $f(x)=ba^x,\ a>0, b\neq 0$

$\begin{cases}f(1)=6\\f(3)=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b\times a=6\\b\times a^3=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b\times a=6\\b\times a\times a^2=24\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}b\times a=6\\6\times a^2=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b\times a=6\\a^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b\times a=6\\a=\pm 2\end{cases}$

Como $a>0$, $\begin{cases}b\times 2=6\\a=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3\\a=2\end{cases}$

$\begin{cases}g(-1)=3\\g(1)=\dfrac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b\times a^{-1}=3\\b\times a=\dfrac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{b}{a}=3\\b\times a=\dfrac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}b=3a\\3a\times a=\dfrac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3a\\3a^2=\dfrac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3a\\a^2=\pm\dfrac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3a\\a=\pm\dfrac{2}{3}\end{cases}$

Como $a>0$, $\begin{cases}b=3a\\a=\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3\times\dfrac{2}{3}\\a=\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\a=\dfrac{2}{3}\end{cases}$

$g(x)=2\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$

3. O gráfico da função g obtém-se do gráfico de f por uma reflexão de eixo Ox. Então, o gráfico que a representa é o IV.

O gráfico da função h obtém-se do gráfico de f por um deslocamento horizontal de uma unidade para a esquerda e $h(0)=3^{0+1}=3^1=3$. Então, o gráfico que a representa é o I.

O gráfico de i obtém-se do gráfico de f por um deslocamento horizontal de uma unidade para a esquerda seguido de um deslocamento vertical de duas unidades para baixo e

$i(0)=3^{0+1}-2=3-2=1$.

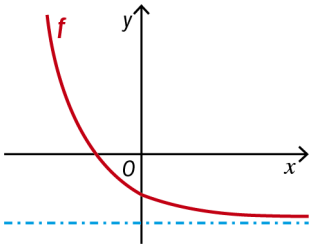
Então, o gráfico que representa é o III.

4.1. O gráfico de f obtém-se do gráfico da função definida por $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ (de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}^+$) por um deslocamento horizontal de 2 unidades para a esquerda, seguido

de um deslocamento vertical de 2 unidades para baixo. Então, $D_f = \mathbb{R}$ e $D'_f =]-2, +\infty[$.

4.2. $y = -2$ é a equação da assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

4.3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



4.4. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(2^{-2}\right)^{x+2} = 2 \Leftrightarrow 2^{-2x-4} = 2^1 \Leftrightarrow -2x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$

$-\frac{5}{2}$ é o zero da função *f*.

Pág. 97

5.1. $5^x - 25 = 0 \Leftrightarrow 5^x = 25 \Leftrightarrow 5^x = 5^2 \Leftrightarrow x = 2$

$S = \{2\}$

5.2. $8^x - \frac{1}{32} = 0 \Leftrightarrow 8^x = \frac{1}{32} \Leftrightarrow \left(2^3\right)^x = \frac{1}{2^5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-5} \Leftrightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$; $S = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$

5.3. $4^{x^2-1} = 8^x \Leftrightarrow \left(2^2\right)^{x^2-1} = \left(2^3\right)^x \Leftrightarrow 2^{2x^2-2} = 2^{3x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 3x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 5}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 2$; $S = \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$

5.4. $4^x - 2^x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(2^2\right)^x - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 2^x - 2 = 0$

Fazendo $2^x = y$, resulta:

$y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow y = -1 \vee y = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{2^x = -1}_{\text{Equação impossível}} \vee 2^x = 2^1 \Leftrightarrow x = 1$; $S = \{1\}$

6.1. $P(0) = 50e^{0,03 \times 0} = 50e^0 = 50 \times 1 = 50$

Significa que, atualmente, a população desse país é de 50 milhões de habitantes.

6.2. $\frac{P(t+1)}{P(t)} = \frac{50e^{0,03(t+1)}}{50e^{0,03t}} = \frac{e^{0,03t+0,03}}{e^{0,03t}} = \frac{e^{0,03t} \times e^{0,03}}{e^{0,03t}} =$

$= e^{0,03} \approx 1,03$

$\frac{P(t+1)}{P(t)} \approx 1,03 \Leftrightarrow P(t+1) \approx 1,03 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(t+1) \approx P(t) + 0,03P(t)$

$\frac{P(t+1)}{P(t)} \approx 1,03$. Significa que a população do país cresce cerca de 3% ao ano.

6.3. $P(10) - P(0) = 50e^{0,03 \times 10} - 50 = 50e^{0,3} - 50 =$

$\approx 17,493$

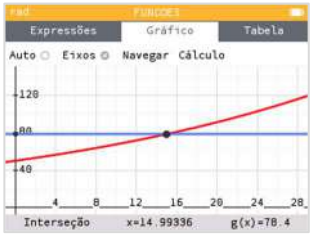
$\frac{P(10) - P(0)}{P(0)} \approx \frac{17,493}{50} \approx 0,350$

Estima-se que, nos próximos 10 anos, a população aumente cerca de 35,0%.

6.4. $P(t) = 78,4 \Leftrightarrow 50e^{0,03t} = 78,4$

Recorrendo à calculadora gráfica, determinamos a abcissa do ponto de interseção dos gráficos das funções definidas por:

$y_1 = 50e^{0,03x}$ e $y_2 = 78,4$



$x \approx 15$

A população será de 78,4 milhões de habitantes ao fim de, aproximadamente, 15 anos.

7.1. $4^{x+1} > 0 \Leftrightarrow 4^{x+1} + 2 > 0 + 2 \Leftrightarrow f(x) > 2$

$D'_f =]2, +\infty[$

$2^x > 0 \Leftrightarrow 9 \times 2^x > 9 \times 0 \Leftrightarrow g(x) > 0$

$D'_g = \mathbb{R}^+$

7.2. $y = 2$ é a equação da assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

7.3. $f(0) = 4^{0+1} + 2 = 4 + 2 = 6$

$A(0,6)$. Então, $\overline{OA} = 6$.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4^{x+1} + 2 = 9 \times 2^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 \times 4^x + 2 - 9 \times 2^x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 \times \left(2^x\right)^2 - 9 \times 2^x + 2 = 0$

Fazendo $2^x = y$, resulta:

$4y^2 - 9y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \times 4 \times 2}}{2 \times 4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{8} \Leftrightarrow y = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{8} \Leftrightarrow y = \frac{9 \pm 7}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{4} \vee y = 2 \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{4} \vee 2^x = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x = 2^{-2} \vee 2^x = 2^1 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$

Como a abcissa de B é negativa, $x_B = -2$.

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times |x_B|}{2} = \frac{7 \times |-2|}{2} = \frac{6 \times 2}{2} = 6 \text{ u. a.}$$

Pág. 99

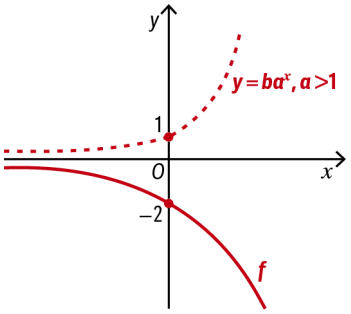
Avaliação formativa 5

1. Sabe-se que $f(0) = -2$ e na opção (C),

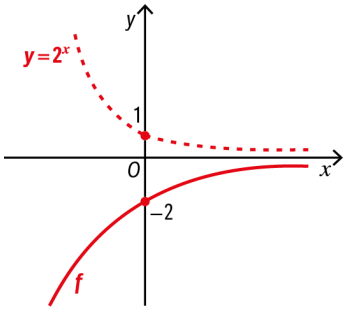
$f(0) = 2 \times 2^0 = 2 \times 1 = 2 \neq -2$.

Logo, a expressão apresentada na opção (C) não pode definir a função representada.

As expressões apresentadas nas opções (A) e (D) também não podem definir a função representada, porque se trata de funções obtidas a partir de uma função de $y = ba^x$, $a > 1$ e $b \neq 0$ por uma dilatação de coeficiente 2 de seguida de uma reflexão de eixo Ox, que resultaria numa função decrescente.



A expressão apresentada em (B) pode definir a função f, pois obtém-se do gráfico de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ por uma dilatação de coeficiente 2, seguida de uma reflexão de eixo Ox.



2. $\left(2 - 2e^{x-1}\right)\left(e^{2x} - e\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 - 2e^{x-1} = 0 \vee e^{2x} - e = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2e^{x-1} = -2 \vee e^{2x} = e \Leftrightarrow e^{x-1} = 1 \vee e^{2x} = e^1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{x-1} = e^0 \vee 2x = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{1}{2}$; $S = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$

3. $f(x) = -2 \times 2^{x-2} + 8$

I. $2^{x-2} > 0 \Leftrightarrow -2 \times 2^{x-2} < -2 \times 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 \times 2^{x-2} + 8 < 0 + 8 \Leftrightarrow f(x) < 8$

Logo, $D'_f =]-\infty, 8[$.

I – c)

II. $f(0) = -2 \times 2^{0-2} + 8 = -2 \times 2^{-2} + 8 = -\frac{2}{2^2} + 8 =$

$= -\frac{1}{2} + 8 = \frac{15}{2}$

II – a)

III. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2 \times 2^{x-2} + 8 = 0 \Leftrightarrow -2^{1+x-2} = -8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{x-1} = 2^3 \Leftrightarrow x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$

III – b)

IV. $D'_f =]-\infty, 8[$

Então, a reta de equação $y = 8$ é assíntota ao gráfico de f.

IV – b)

4.1. $P(0) = \frac{800}{1 + 7e^{-0,2 \times 0}} = \frac{800}{1 + 7} = 100$

Foram introduzidos no lago 100 peixes.

4.2. $P(5) = \frac{800}{1 + 7e^{-0,2 \times 5}} = \frac{800}{1 + 7e^{-1}} \approx 224$

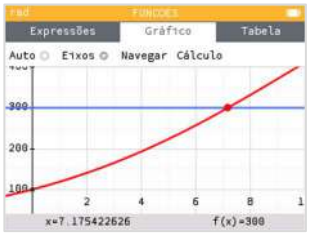
Ao fim de 5 anos existiam cerca de 224 peixes daquela população.

4.3. $P(t) = 3 \times P(0) \Leftrightarrow \frac{800}{1 + 7e^{-0,2t}} = 3 \times 100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{800}{1 + 7e^{-0,2t}} = 300$

Recorrendo à calculadora gráfica, determinamos a abcissa do ponto de interseção dos gráficos das funções definidas por:

$y_1 = \frac{800}{1 + 7e^{-0,2x}}$ e $y_2 = 300$



$x \approx 7$

A população triplicou ao fim de, aproximadamente, 7 anos.

4.4. $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{800}{1 + 7e^{-0,2t}} = \frac{800}{1 + 7e^{-\infty}} = \frac{800}{1 + 7 \times 0} = 800$

$\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = 800$

Representa a capacidade de suporte do lago.

6. Funções logarítmicas

Pág. 100

Tarefa 9

1. Com 3 dobragens o número de camadas é 8.
Com 4 dobragens o número de camadas é 16.

2. $f(x)=2^x$

2.1. $x=6$; $2^6=64$

2.2. $f(x)=256$ significa o número de dobragens necessárias para obter 256 camadas.

Pág. 101

Questão 83

83.1. $\log_2 16=\log_2 2^4=4$

83.2. $\log_2 \frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1$

83.3. $\log_2 \sqrt{32}=\log_2 32^{\frac{1}{2}}=\log_2 \left(2^5\right)^{\frac{1}{2}}=\log_2 2^{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}$

Pág. 102

Questão 84

84.1. $\log_2 32=\log_2 2^5=5$ ou

$\log_2 32=y \Leftrightarrow 2^y=32 \Leftrightarrow 2^y=2^5 \Leftrightarrow y=5$

84.2. $\log_5 5=1$ ou $\log_5 5=y \Leftrightarrow 5^y=5 \Leftrightarrow y=1$

84.3. $\log_3 \frac{1}{27}=\log_3 27^{-1}=\log_3 \left(3^3\right)^{-1}=$

$=\log_3 3^{-3}=-3$ ou

$\log_3 \frac{1}{27}=y \Leftrightarrow 3^y=\frac{1}{27} \Leftrightarrow 3^y=27^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^y=\left(3^3\right)^{-1} \Leftrightarrow 3^y=3^{-3} \Leftrightarrow y=-3$

84.4. $\log_{\frac{1}{4}} 16=\log_{\frac{1}{4}} 4^2=\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=-2$ ou

$\log_{\frac{1}{4}} 16=y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^y=16 \Leftrightarrow 4^{-y}=4^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -y=2 \Leftrightarrow y=-2$

84.5. $\log_9 81=\log_9 9^2=2$ ou $\log_9 81=y \Leftrightarrow 9^y=81 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9^y=9^2 \Leftrightarrow y=2$

84.6. $\log_{81} 9=y \Leftrightarrow 81^y=9 \Leftrightarrow \left(9^2\right)^y=9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9^{2y}=9 \Leftrightarrow 2y=1 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$

84.7. $\log_5 125=\log_5 5^3=3$ ou

$\log_5 125=y \Leftrightarrow 5^y=125 \Leftrightarrow 5^y=5^3 \Leftrightarrow y=3$

84.8. $\log_{\sqrt{8}} \sqrt{32}=y \Leftrightarrow \left(\sqrt{8}\right)^y=\sqrt{32} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(8^{\frac{1}{2}}\right)^y=32^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 8^{\frac{y}{2}}=32^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \left(2^3\right)^{\frac{y}{2}}=\left(2^5\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{\frac{3y}{2}}=2^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow \frac{3y}{2}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 3y=5 \Leftrightarrow y=\frac{5}{3}$

84.9. $\log_7 1+\log_2 \frac{1}{16}+\log_{\frac{1}{32}} 4=$

$=0+\log_2 16^{-1}-\frac{2}{5}=\log_2 \left(2^4\right)^{-1}-\frac{2}{5}=$

$=\log_2 2^{-4}-\frac{2}{5}=-4-\frac{2}{5}=-\frac{22}{5}$

C.A.

$\log_{\frac{1}{32}} 4=y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{32}\right)^y=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(2^{-5}\right)^y=2^2 \Leftrightarrow 2^{-5y}=2^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5y=2 \Leftrightarrow y=-\frac{2}{5}$

Pág. 103

Questão 85

85.1. $\log 0{,}001=\log 10^{-3}=-3$

85.2. $\log \left(\frac{1}{10}\right)^{-2}=\log \left(10^{-1}\right)^{-2}=\log 10^2=2$

85.3. $\log \left(\frac{\sqrt{0{,}001}}{10^3}\right)=\log \left(\frac{\sqrt{10^{-3}}}{10^3}\right)=\log \left(\frac{\left(10^{-3}\right)^{\frac{1}{2}}}{10^3}\right)=$

$=\log \left(\frac{10^{-\frac{3}{2}}}{10^3}\right)=\log \left(10^{-\frac{3}{2}-3}\right)=\log 10^{-\frac{9}{2}}=-\frac{9}{2}$

85.4. $\ln \left(\sqrt[3]{e^2}\right)=\ln \left(\left(e^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)=\ln e^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$

85.5. $\ln \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)+\ln \left(e\sqrt{e}\right)=\ln \left(\left(\sqrt{e}\right)^{-1}\right)+\ln \left(e \times e^{\frac{1}{2}}\right)=$

$=\ln \left(\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right)+\ln e^{1+\frac{1}{2}}=\ln e^{-\frac{1}{2}}+\ln e^{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$

Pág. 104

Tarefa 10

10.1. $f(x)=\log_a x$, $a>1$

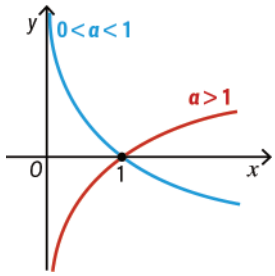
$D_f=\mathbb{R}^+$; $D'_f=\mathbb{R}$

f é estritamente crescente

Assíntota vertical: $x=0$

Zero de f: 1

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$



10.2. $f(x)=\log_a x$, $0<a<1$

$D_f=\mathbb{R}^+$; $D'_f=\mathbb{R}$

f é estritamente decrescente

Assíntota vertical: $x=0$

Zero de f : 1

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Pág. 106

Questão 86

86.1. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0{,}125 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow x = 3$

$S = \{3\}$

86.2. $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$

$S = \{\ln 3\}$

86.3. $2e^{x-3} = 2 \Leftrightarrow e^{x-3} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{x-3} = e^0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$S = \{3\}$

86.4. $2^{x+1} - 6 = 0 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x \times 2 = 6 \Leftrightarrow 2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$

$S = \{\log_2 3\}$

86.5. $2^{x+1} - 3 \times 2^{x-1} = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x \times 2 - 3 \times 2^x \times 2^{-1} = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x \left(2 - 3 \times \frac{1}{2}\right) = 3 \Leftrightarrow 2^x \times \frac{1}{2} = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x = 6 \Leftrightarrow x = \log_2 6$

$S = \{\log_2 6\}$

86.6. $3 \times 2^x - 3^x = 0 \Leftrightarrow 3 \times 2^x = 3^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 = \frac{3^x}{2^x} \Leftrightarrow 3 = \left(\frac{3}{2}\right)^x \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} 3$

$S = \left\{\log_{\frac{3}{2}} 3\right\}$

86.7. $2e^{6x} - 3 = 5e^{3x} \Leftrightarrow 2e^{6x} - 5e^{3x} - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left(e^{3x}\right)^2 - 5e^{3x} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 5y - 3 = 0 \Leftrightarrow$

M.V. $\mid e^{3x} = y$

$\Leftrightarrow y = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{5 \pm 7}{4} \Leftrightarrow y = 3 \vee y = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{3x} = 3 \vee \underbrace{e^{3x} = -\frac{1}{2}}_{\text{Equação impossível}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x = \ln 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\ln 3$

$S = \left\{\frac{1}{3}\ln 3\right\}$

Questão 87

87.1. $10^{2x-2} > 0 \Leftrightarrow -10^{2x-2} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -10^{2x-2} + 2 < 2 \Leftrightarrow g(x) < 2$

$D'_g =]-\infty, 2[$

87.2. $g(x) = 0 \Leftrightarrow -10^{2x-2} + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -10^{2x-2} = -2 \Leftrightarrow 10^{2x-2} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - 2 = \log 2 \Leftrightarrow 2x = \log 2 + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\log 2 + 1$

Zero de g : $\frac{1}{2}\log 2 + 1$

87.3. Vamos determinar a expressão algébrica de g^{-1}.

$-10^{2x-2} + 2 = y \Leftrightarrow -10^{2x-2} = y - 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10^{2x-2} = 2 - y \Leftrightarrow 2x - 2 = \log(2 - y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = \log(2 - y) + 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\log(2 - y) + 1$

$y = \frac{1}{2}\log(2 - x) + 1$

$g^{-1}(x) = \frac{1}{2}\log(2 - x) + 1$

$D_g = \mathbb{R}$; $D'_g =]-\infty, 2[$

$D'_{g^{-1}} = \mathbb{R}$; $D_{g^{-1}} =]-\infty, 2[$

$g^{-1} :]-\infty, 2[\to \mathbb{R}$

$x \to \frac{1}{2}\log(2 - x) + 1$

Pág. 107

Questão 88

88.1. $f(x) = \log(x - 4)$

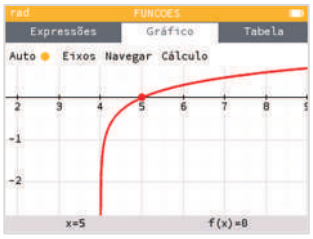
$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : \underbrace{x - 4 > 0}_{(x>4)}\right\} =]4, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to4^+} f(x) = -\infty$

O gráfico da função f admite uma assíntota vertical de equação $x = 4$.

$D'_f = \mathbb{R}$

Como $D_f =]4, +\infty[$, o gráfico de f não interseta o eixo Oy.



88.2. $g(x) = \ln(x + e) + 2$

$D_g = \left\{x \in \mathbb{R} : \underbrace{x + e > 0}_{x>-e}\right\} =]-e, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

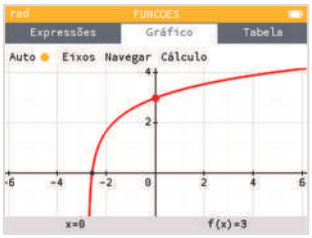
$\lim\limits_{x\to -e^{+}} g(x) = -\infty$

O gráfico da função g admite uma assíntota vertical de equação $x = -e$.

$D'_g = \mathbb{R}$

$g(0) = \ln(0+e) + 2 = \ln e + 2 = 1 + 2 = 3$

Ponto de interseção do gráfico da função g com o eixo Oy: $(0, 3)$



88.3. $h(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+2) + 5$

$D_h = \left\{x \in \mathbb{R} : x + 2 \underset{(x>-2)}{>} 0\right\} =]-2, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -2^{+}} h(x) = +\infty$

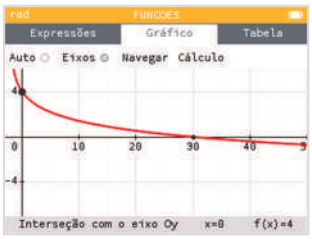
O gráfico da função h admite uma assíntota vertical de equação $x = -2$.

$D'_h = \mathbb{R}$

$h(0) = \log_{\frac{1}{2}}(0+2) + 5 = \log_{\frac{1}{2}} 2 + 5 =$

$= \log_{2^{-1}} 2 + 5 = -1 + 5 = 4$

Ponto de interseção do gráfico da função h com o eixo Oy: $(0, 4)$



Pág. 109

Questão 89

89.1. $\ln e^4 + e^{2\ln 3} = 4 + e^{\ln 3^2} = 4 + 3^2 = 13$

89.2. $\frac{5}{2}\ln 4 - 5\ln 6 + 10\ln\sqrt{3} =$

$= \frac{5}{2}\ln 2^2 - 5\ln 6 + 10\ln 3^{\frac{1}{2}} =$

$= \frac{5}{2} \times 2\ln 2 - 5\ln 6 + 10 \times \frac{1}{2}\ln 3 =$

$= 5\ln 2 - 5\ln 6 + 5\ln 3 = 5(\ln 2 - \ln 6 + \ln 3) =$

$= 5\left(\ln\frac{2}{6} + \ln 3\right) = 5\left(\ln\frac{1}{3} + \ln 3\right) = 5\ln\left(\frac{1}{3} \times 3\right) =$

$= 5\ln 1 = 5 \times 0 = 0$

89.3. $e^{2+2\ln\sqrt{5}} = e^{2+2\ln 5^{\frac{1}{2}}} = e^{2+2\times\frac{1}{2}\ln 5} =$

$= e^{2+\ln 5} = e^2 \times e^{\ln 5} = e^2 \times 5 = 5e^2$

89.4. $\log_a\left(\log_b b^{a^3}\right) = \log_a a^3 = 3$

Questão 90

90.1. $\log_a b \times \log_b c = \log_a c$

$\log_a b \times \log_b c = \cancel{\log_a b} \times \frac{\log_a c}{\cancel{\log_a b}} = \log_a c$

90.2. $\log_a(ab^2) = 7 \Leftrightarrow \log_a a + \log_a b^2 = 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \log_a b^2 = 7 \Leftrightarrow \log_a b^2 = 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\log_a b = 6 \Leftrightarrow \log_a b = 3$

$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{3}$

Pág. 110

Questão 91

91.1. Domínio da condição:

$D = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 > 0\} = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$\log_3(2x-1) = \log_3 2 \Leftrightarrow 2x - 1 = 2 \wedge x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \wedge x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

$S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

91.2. Domínio da condição:

$D = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 > 0\} = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$2\log_3(2x-1) = 2 \Leftrightarrow \log_3(2x-1) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - 1 = 3^1 \wedge x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = 4 \wedge x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2 \wedge x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2$

$S = \{2\}$

91.3. Domínio da condição:

$D = \{x \in \mathbb{R} : (2x-1)^2 > 0\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 \neq 0\} =$

$= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{1}{2}\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

$\log_3(2x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 3^2 \wedge x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x - 1 = 3 \vee 2x - 1 = -3) \wedge x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x = 4 \vee 2x = -2) \wedge x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = 2 \vee x = -1) \wedge x \neq \frac{1}{2}$

$S = \{-1, 2\}$

91.4. Domínio da condição:

$$D=\left\{x\in\mathbb{R}: x-2\underset{(x>2)}{>}0\right\}=]2,+\infty[$$

$$\log_2 5+\log_2(x-2)=\log_2 10\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-2)=\log_2 10-\log_2 5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-2)=\log_2\frac{10}{5}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-2)=\log_2 2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-2=2\wedge x>2\Leftrightarrow x=4\wedge x>2$$

$$S=\{4\}$$

91.5. Domínio da condição:

$$D=\left\{x\in\mathbb{R}: 3x>0\wedge 2x+1>0\underset{\left(x>0\wedge x>-\frac{1}{2}\right)}{\underset{(x>0)}{}}\right\}=]0,+\infty[$$

$$\ln(3x)-\ln(2x+1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(3x)=\ln(2x+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x=2x+1\wedge x>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1\wedge x>0\Leftrightarrow x=1$$

$$S=\{1\}$$

91.6. Domínio da condição:

$$D=\left\{x\in\mathbb{R}: x+1\underset{(x>-1)}{>}0\right\}=]-1,+\infty[$$

$$\log_2(x+1)=1-\log_2 3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1)=\log_2 2-\log_2 3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1)=\log_2\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1=\frac{2}{3}\wedge x>-1\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}-1\wedge x>-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}\wedge x>-1$$

$$S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

91.7. Domínio da condição:

$$D=\left\{x\in\mathbb{R}: \underset{\text{Condição universal}}{x^2+3>0}\wedge \underset{(x>-2)}{x+2>0}\wedge \underset{(x\neq -1)}{x+2\neq 1}\right\}=$$

$$=]-2,+\infty[\setminus\{-1\}$$

$$\log_{x+2}(x^2+3)=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2=x^2+3\wedge x>-2\wedge x\neq -1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^2}+4x+4=\cancel{x^2}+3\wedge x>-2\wedge x\neq -1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x=-1\wedge x>-2\wedge x\neq -1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}\wedge x>-2\wedge x\neq -1$$

$$S=\left\{-\frac{1}{4}\right\}$$

91.8. Domínio da condição:

$$D=\left\{x\in\mathbb{R}: \underbrace{1-x>0}_{(x<1)}\wedge \underbrace{1-2x>0}_{\left(x<\frac{1}{2}\right)}\right\}=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$$

$$x\log(1-x)-2\log(1-x)=(2-x)\log(1-2x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log(1-x)(x-2)=-(x-2)\log(1-2x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log(1-x)(x-2)+(x-2)\log(1-2x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\log(1-x)+\log(1-2x)\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\log\left[(1-x)(1-2x)\right]\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-2=0\vee\log\left(1-2x-x+2x^2\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=2\vee\log\left(2x^2-3x+1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x=2\vee 2x^2-3x+1=10^0\right)\wedge x<\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x=2\vee 2x^2-3x+1=1\right)\wedge x<\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x=2\vee x(2x-3)=0\right)\wedge x<\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x=2\vee x=0\vee 2x-3=0\right)\wedge x<\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x=2\vee x=0\vee x=\frac{3}{2}\right)\wedge x<\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0$$

$$S=\{0\}$$

Pág. 111

Questão 92

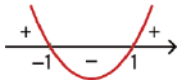
92.1. $D=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2-1>0\wedge(x+1)^2>0\right\}=$

$$=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$$

C.A.

$$x^2-1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-1\vee x=1$$



$$(x+1)^2>0\Leftrightarrow x\neq -1$$

92.2. $f(x)=2\log_2(x^2-1)-\log_2(x+1)^2=$

$$=\log_2(x^2-1)^2-\log_2(x+1)^2=\log_2\frac{(x^2-1)^2}{(x+1)^2}=$$

$$=\log_2\frac{(x^2-1)(x^2-1)}{(x+1)(x+1)}=$$

$$=\log_2\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x+1)}}=$$

$$=\log_2(x-1)^2=2\log_2(x-1)\wedge x>1$$

92.3. $f(x)=0 \Leftrightarrow 2\log_2(x-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2(x-1)=0 \Leftrightarrow x-1=2^0 \wedge x>1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2 \wedge x>1$

Zero de f : 2

Questão 93

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{5x-5}{e^{x-1}-1}, & x<1\\ 7\times 2^{x-1}-2, & x\geq 1\end{cases}$$

$\log_2(h(x))=x+\log_2 3 \wedge x\geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2(7\times 2^{x-1}-2)=x+\log_2 3 \wedge x\geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2(7\times 2^x\times 2^{-1}-2)=x+\log_2 3 \wedge x\geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{7}{2}\times 2^x-2\right)=\log_2 2^x+\log_2 3 \wedge x\geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{7}{2}2^x-2\right)=\log_2(2^x\times 3) \wedge x\geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{7}{2}2^x-2=3\times 2^x \wedge x\geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{7}{2}2^x-3\times 2^x \wedge x\geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x\left(\frac{7}{2}-3\right)=2 \wedge x\geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x\times\frac{1}{2}=2 \wedge x\geq 1 \Leftrightarrow 2^x=4 \wedge x\geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x=2^2 \wedge x\geq 1 \Leftrightarrow x=2 \wedge x\geq 1$

$S=\{2\}$

Questão 94

94.1. $f(x)=0 \Leftrightarrow 1+\ln(3e^x+4)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(3e^x+4)=-1 \Leftrightarrow 3e^x+4=e^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3e^x=e^{-1}-4 \Leftrightarrow e^x=\frac{e^{-1}-4}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x=\frac{1}{3e}-\frac{4}{3} \Leftrightarrow e^x=\frac{1-4e}{3e} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^x=-1{,}2107\ldots}_{\text{Equação impossível}}$

A função f não tem zeros.

94.2. $f(x)=2x+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{1}+\ln(3e^x+4)=2x+\cancel{1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3e^x+4=e^{2x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -(e^x)^2+3e^x+4=0 \Leftrightarrow$

M.V. $\mid e^x=y$

$-y^2+3y+4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times(-1)\times 4}}{2\times(-1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{-2} \Leftrightarrow y=\frac{-3\pm 5}{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=4 \vee y=-1 \Leftrightarrow e^x=4 \vee \underbrace{e^x=-1}_{\text{Equação impossível}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\ln 4 \Leftrightarrow x=\ln 2^2 \Leftrightarrow x=2\ln 2$

A abcissa do ponto de interseção é $2\ln 2$.

94.3. $f(x)=y \Leftrightarrow 1+\ln(3e^x+4)=y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(3e^x+4)=y-1 \Leftrightarrow 3e^x+4=e^{y-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3e^x=e^{y-1}-4 \Leftrightarrow e^x=\frac{e^{y-1}-4}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{e^{y-1}-4}{3}\right)$

$y=\ln\left(\frac{e^{x-1}-4}{3}\right)$

$f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{e^{x-1}-4}{3}\right)$

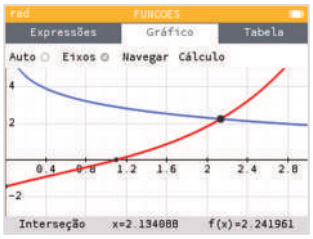
Pág. 112

Questão 95

$f(x)=e^{x-1}-\frac{3e^{-x}+2}{e}$

$g(x)=-\ln x+3$

Recorrendo à calculadora gráfica, com $y_1=f(x)=e^{x-1}-\frac{3e^{-x}+2}{e}$ e $y_2=g(x)=-\ln x+3$, no intervalo $]0,5[$, determinou-se o zero de f, bem como as coordenadas do ponto B, interseção dos dois gráficos, tendo-se obtido os seguintes resultados, com arredondamento às centésimas: $x_A\approx 1{,}10$, $x_B\approx 2{,}13$ e $y_B\approx 2{,}24$.



$A_{[OAB]}=\frac{\overline{OA}\times y_B}{2}=\frac{x_A\times y_B}{2}=$

$=\frac{1{,}10\times 2{,}24}{2}\approx 1{,}2$ u. a.

A área pedida é cerca de 1,2 u. a.

Pág. 113

Questão 96

$P=P_0e^{-\frac{t}{250}}$

Pretende-se determinar t, tal que

$P=\frac{1}{4}P_0 \Leftrightarrow P_0e^{-\frac{t}{250}}=\frac{1}{4}P_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{t}{250}}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{t}{250}=\ln\frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -t = \ln 4^{-1} \times 250 \Leftrightarrow -t = -\ln 4 \times 250 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \ln 4 \times 250 \Leftrightarrow t \approx 346{,}57$

São necessários 347 dias, aproximadamente.

Questão 97

97.1. $t = 0$

$$N = \frac{600}{1+4e^{-\ln 2 \times 0}} = \frac{600}{1+4e^{0}} = \frac{600}{1+4\times 1} = 120$$

$120 \times 10 = 1200$ indivíduos.

$t = 2$

$$N = \frac{600}{1+4e^{-(\ln 2)\times 2}} = \frac{600}{1+4e^{-2\ln 2}} = \frac{600}{1+4e^{\ln 2^{-2}}} =$$

$$= \frac{600}{1+4\times 2^{-2}} = \frac{600}{1+4\times \frac{1}{4}} = \frac{600}{2} = 300$$

$300 \times 10 = 3000$ indivíduos.

$$\frac{3000-1200}{2} = \frac{1800}{2} = 900$$

A afirmação é verdadeira.

97.2. $N = \dfrac{600}{1+4e^{-(\ln 2)t}} \Leftrightarrow N + 4Ne^{-(\ln 2)t} = 600 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4Ne^{-(\ln 2)t} = 600 - N \Leftrightarrow e^{-(\ln 2)t} = \frac{600-N}{4N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(\ln 2)t = \ln\frac{600-N}{4N} \Leftrightarrow t = \frac{\ln\frac{600-N}{4N}}{-\ln 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-\ln\frac{600-N}{4N}}{\ln 2} \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{600-N}{4N}\right)^{-1}}{\ln 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{4N}{600-N}\right)}{\ln 2}$$

Pág. 114

Tarefas de consolidação 6

1.1. $y = \log_a x$; $P(4,-2)$; $a > 0$ e $a \neq 1$

$-2 = \log_a 4 \Leftrightarrow a^{-2} = 4 \Leftrightarrow a^{-2} = 2^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^2 = 2^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a} = 2 \Leftrightarrow 1 = 2a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

1.2. $y = \log_a x$; $P\left(\frac{1}{9},-2\right)$; $a > 0$ e $a \neq 1$

$-2 = \log_a \frac{1}{9} \Leftrightarrow -2 = \log_a 9^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 = \log_a 3^{-2} \Leftrightarrow a^{-2} = 3^{-2} \Leftrightarrow a = 3$

2. $e^{2-3x} = 2 \Leftrightarrow \ln e^{2-3x} = \ln 2$

A equação da opção **(B)** é equivalente à equação $e^{2-3x} = 2$.

$e^{2-3x} = 2 \Leftrightarrow 2 - 3x = \ln 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3x = -2 + \ln 2 \Leftrightarrow 3x = 2 - \ln 2$

A equação da opção **(C)** é equivalente à equação $e^{2-3x} = 2$.

$e^{1-3x} = 2e^{-1} \Leftrightarrow \dfrac{e^{1-3x}}{e^{-1}} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{1-3x-(-1)} = 2 \Leftrightarrow e^{1-3x+1} = 2 \Leftrightarrow e^{2-3x} = 2$

A equação da opção **(D)** é equivalente à equação $e^{2-3x} = 2$.

A equação que não é equivalente à equação $e^{2-3x} = 2$ é a opção **(A)**.

3.1. Os pontos A e B pertencem aos gráficos das funções f e g e têm abcissas 1 e 2 respetivamente. Então, $f(1) = g(1)$ e $f(2) = g(2)$.

$f(1) = 4 + a$; $g(1) = 3 \times 2^{1+b}$

$f(2) = 4^2 + a = 16 + a$; $g(2) = 3 \times 2^{2+b}$

Assim, $\begin{cases} f(1) = g(1) \\ f(2) = g(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + a = 3 \times 2^{1+b} \\ 16 + a = 3 \times 2^{2+b} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 + a = 3 \times 2 \times 2^b \\ 16 + a = 3 \times 2^2 \times 2^b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + a = 6 \times 2^b \\ 16 + a = 12 \times 2^b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 + 6 \times 2^b \\ 16 - 4 + 6 \times 2^b = 12 \times 2^b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 + 6 \times 2^b \\ 12 + 6 \times 2^b = 12 \times 2^b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 + 6 \times 2^b \\ 6 \times 2^b - 12 \times 2^b = -12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 + 6 \times 2^b \\ -6 \times 2^b = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 + 6 \times 2^b \\ 2^b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 + 6 \times 2^1 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 1 \end{cases}$$

3.2. $f(x) = 4^x + 8$ $g(x) = 3 \times 2^{x+1}$

$4^x > 0 \Leftrightarrow 4^x + 8 > 8$

$2^{x+1} > 0 \Leftrightarrow 3 \times 2^{x+1} > 0$

$D'_f =]8, +\infty[$; $D'_g =]0, +\infty[= \mathbb{R}^+$

3.3. **a)** $f(1) = 4 + 8 = 12$. O ponto de coordenadas $(1,12)$ pertence ao gráfico de f logo, o ponto $(12,1)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

$f(2) = 4^2 + 8 = 16 + 8 = 24$. O ponto de coordenadas $(2,24)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

Resumindo, os pontos $(12,1)$ e $(24,2)$ são imagens dos pontos A e B, pertencentes ao gráfico de f, pela reflexão cujo eixo é a bissetriz dos quadrantes ímpares.

b) Vamos determinar a expressão algébrica de f^{-1}.

$f(x) = y \Leftrightarrow 4^x + 8 = y \Leftrightarrow 4^x = y - 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \log_4 (y - 8)$

$y = \log_4 (x - 8)$

$f^{-1}(x) = \log_4 (x - 8)$

$f^{-1}:]8,+\infty[\to \mathbb{R}$
$x \to \log_4(x-8)$

$D_f = \mathbb{R}$

$D'_f =]8,+\infty[$

c) $f^{-1}(x)=0 \Leftrightarrow \log_4(x-8)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-8=4^0 \wedge x>8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-8=1 \wedge x>8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=9 \wedge x>8$

Zero de f^{-1}: 9

Pág. 115

4.1. $\log_{a^c} b = \frac{1}{c}\log_a b$

$\log_{a^c} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^c} = \frac{\log_a b}{c} = \frac{1}{c}\log_a b$

4.2. Domínio da condição:

$D = \{x \in \mathbb{R} : x>0\} =]0,+\infty[$

$\log_2 x = \log_4 25 \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{\log_2 25}{\log_2 4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2 x = \frac{\log_2 5^2}{\log_2 2^2} \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{2\log_2 5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 5 \Leftrightarrow x=5 \wedge x>0 \Leftrightarrow x=5$

$S=\{5\}$

5.1. Domínio da condição:

$D = \left\{x \in \mathbb{R} : \underset{\substack{2x>4\\x>2}}{2x-4>0}\right\} =]2,+\infty[$

$\ln(2x-4)=2 \Leftrightarrow 2x-4=e^2 \wedge x>2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=e^2+4 \wedge x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{e^2}{2}+2 \wedge x>0$

$S=\left\{\frac{1}{2}e^2+2\right\}$

5.2. Domínio da condição:

$D = \left\{x \in \mathbb{R} : \underset{\substack{e^x>3\\x>\ln 3}}{e^x-3>0}\right\} =]\ln 3,+\infty[$

$\ln(e^x-3)+x=\ln 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(e^x-3)=\ln 4-\ln e^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(e^x-3)=\ln\frac{4}{e^x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x-3=\frac{4}{e^x} \wedge x>\ln 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (e^x)^2-3e^x=4 \wedge x>\ln 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (e^x)^2-3e^x-4=0 \wedge x>\ln 3 \Leftrightarrow$

M.V. $\mid e^x=y$

$y^2-3y-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-4)}}{2\times1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow y=\frac{3\pm5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=4 \vee y=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\underset{\substack{\text{Equação}\\\text{impossível}}}{e^x=4 \vee e^x=-1}\right) \wedge x>\ln 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x=\ln 4 \vee x \in \varnothing) \wedge x>\ln 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\ln 4 \Leftrightarrow x=\ln 2^2 \Leftrightarrow x=2\ln 2$

$S=\{2\ln 2\}$

6. $pH=-\log[H^+]$

6.1. $pH=-\log[5\times10^{-4}]=-[\log 5+\log 10^{-4}]=$

$=-[\log 5-4\log 10]=-[\log 5-4\times1]=$

$=-\log 5+4\approx 3,3$

6.2. $pH=5,0$

$pH=5 \Leftrightarrow -\log[H^+]=5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log[H^+]=-5 \Leftrightarrow [H^+]=10^{-5}$

7.1. $\log P=\log c-k\log W \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log P=\log c-\log W^k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log P=\log\frac{c}{W^k} \Leftrightarrow P=\frac{c}{W^k}$

7.2.

a) $\begin{cases}800=\frac{c}{2^k}\\200=\frac{c}{4^k}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=800\times2^k\\200=\frac{800\times2^k}{4^k}\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}c=800\times2^k\\200\times4^k=800\times2^k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=800\times2^k\\\frac{4^k}{2^k}=\frac{800}{200}\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}c=800\times2^k\\\left(\frac{4}{2}\right)^k=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}C=800\times2^k\\2^k=2^2\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}c=800\times2^2\\k=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=3200\\k=2\end{cases}$

b) $W=10$ milhões de euros

$c=3200$

$k=2$

$P=\frac{c}{W^k} \Leftrightarrow P=\frac{3200}{10^2} \Leftrightarrow P=32$

Pág. 117

Avaliação formativa 6

1.1. $e^{2\ln 3}=e^{\ln 3^2}=e^{\ln 9}=9$

1.2. $\log_6 8+\log_6 27=\log_6(8\times27)=$

$=\log_6(2^3\times3^3)=\log_6(6^3)=3$

1.3. $\ln\left(\frac{1}{e^5}\right)=\ln\left(e^{-5}\right)=-5$

1.4. $10^{-2\log 5}=10^{\log 5^{-2}}=5^{-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$

2.1. $\log_a\left(\frac{\sqrt{a}}{b^2}\right)=\log_a\sqrt{a}-\log_a b^2=$

$=\log_a a^{\frac{1}{2}}-2\log_a b=\frac{1}{2}-2\times\frac{\log_b b}{\log_b a}=$

$=\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}+2\times 3=\frac{1}{2}+6=\frac{13}{2}$

2.2. $\log_a\left(\sqrt{b}\times a^3\right)=\log_a\sqrt{b}+\log_a a^3=$

$=\log_a b^{\frac{1}{2}}+3=\frac{1}{2}\log_a b+3=$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\log_b b}{\log_b a}+3=\frac{1}{2}\times\frac{1}{-\frac{1}{3}}+3=$

$=-\frac{1}{2}\times 3+3=-\frac{3}{2}+3=\frac{3}{2}$

2.3. $\log_b c+\frac{1}{\log_c b}=\frac{\log_c c}{\log_c b}+\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}+2=2+2=4$

2.4. $\log_b\left(\frac{\sqrt{b}\times\sqrt[3]{a}}{c^2}\right)=\log_b\left(\sqrt{b}\times\sqrt[3]{a}\right)-\log_b c^2=$

$=\log_b\sqrt{b}+\log_b\sqrt[3]{a}-\log_b c^2=$

$=\log_b b^{\frac{1}{2}}+\log_b a^{\frac{1}{3}}-\log_b c^2=$

$=\frac{1}{2}\log_b b+\frac{1}{3}\log_b a-2\log_b c=$

$=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)-2\frac{\log_c c}{\log_c b}=$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-2\times\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-2\times 2=$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-4=-\frac{65}{18}$

3. $f(x)=\log_2\left(x^2+x\right)$

$g(x)=\log_2(3x-3)+1$

$D_g=\left\{x\in\mathbb{R}:\underset{x>1}{3x-3}>0\right\}=]1,+\infty[$

• $g(x)=0\Leftrightarrow\log_2(3x-3)+1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log_2(3x-3)=-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x-3=2^{-1}\wedge x>1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x=\frac{1}{2}+3\wedge x>1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x=\frac{7}{2}\wedge x>1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\frac{7}{2}}{3}\wedge x>1\Leftrightarrow\ x=\frac{7}{6}\wedge x>1\Leftrightarrow x=\frac{7}{6}$

I → b)

• $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:x^2+x>0\right\}=]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

C.A.

$x^2+x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x+1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee x=-1$



$x^2+x>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

$D_g=\left\{x\in\mathbb{R}:3x-3>0\right\}=]1,+\infty[$

$D_f\cap D_g=\left(]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[\right)\cap]1,+\infty[=]1,+\infty[$

II → a)

• Domínio da condição:
$]1,+\infty[$

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow\log_2\left(x^2+x\right)=\log_2(3x-3)+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log_2\left(x^2+x\right)=\log_2(3x-3)+\log_2 2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log_2\left(x^2+x\right)=\log_2\left[2(3x-3)\right]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log_2\left(x^2+x\right)=\log_2(6x-6)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+x=6x-6\wedge x>1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\wedge x>1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times 1\times 6}}{2\times 1}\wedge x>1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}\wedge x>1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x=3\vee x=2)\wedge x>1$

$S=\{2,3\}$

III → c)

4.1. $I_0=10^{-12}\ \text{W/m}^2$

$I=10^{-3}\ \text{W/m}^2$

$B=10\log\left(\frac{10^{-3}}{10^{-12}}\right)=10\log\left(10^{-3-(-12)}\right)=$

$=10\log\left(10^{-3+12}\right)=10\log 10^9=$

$=10\times 9=90\ \text{dB}$

4.2. $B=50\ \text{dB}$

$I_0=10^{-12}\ \text{W/m}^2$

Pretendemos determinar I.

$B=10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)\Leftrightarrow 50=10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)=5\Leftrightarrow\frac{I}{10^{-12}}=10^5\Leftrightarrow$

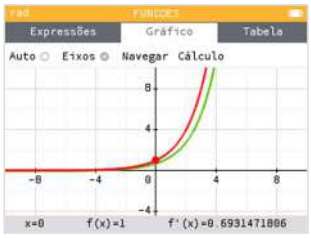
$\Leftrightarrow I=10^5\times 10^{-12}\Leftrightarrow I=10^{-7}\ \text{W/m}^2$

7. Derivadas de funções exponenciais e logarítmicas. Limites e aplicações

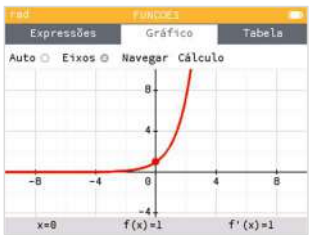
Pág. 118

Tarefa 11

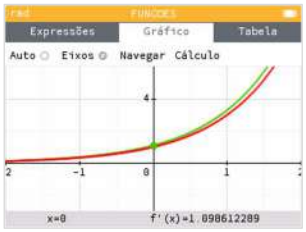
1. $f(x)=2^x$



$f(x)=e^x$



$f(x)=3^x$



1.1. O gráfico da função $f(x)=e^x$ coincide com o gráfico da sua primeira derivada.

1.2. • $f(x)=2^x$

$m=f'(0)\approx 0{,}693$

• $f(x)=e^x$

$m=f'(0)=1$

• $f(x)=3^x$

$m=f'(0)\approx 1{,}099$

Pág. 119

Questão 98

98.1. $f'(x)=\left(e^x-2\right)'=e^x$

Seja *t* a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 0.

$m_t=f'(0)=e^0=1$

$f(0)=e^0-2=1-2=-1$

$t: y-(-1)=1(x-0)\Leftrightarrow y+1=x\Leftrightarrow y=x-1$

$t: y=x-1$

98.2. $f''(x)=\left(e^x\right)'=e^x$; $f''(x)=e^x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Logo, o gráfico da função *f* tem a concavidade voltada para cima e não tem pontos de inflexão.

Questão 99

99.1. $f(x)=e^x-3x$

$f'(x)=\left(e^x-3x\right)'=e^x-3$

$f''(x)=\left(e^x-3\right)'=e^x$

99.2. $f(x)=x^2e^x$

$f'(x)=\left(x^2e^x\right)'=\left(x^2\right)'e^x+x^2\left(e^x\right)'=2xe^x+x^2e^x=$

$=\left(x^2+2x\right)e^x$

$f''(x)=\left[\left(x^2+2x\right)e^x\right]'=\left(x^2+2x\right)'e^x+\left(x^2+2x\right)\left(e^x\right)'=$

$=(2x+2)e^x+\left(x^2+2x\right)e^x=\left(2x+2+x^2+2x\right)e^x=$

$=\left(x^2+4x+2\right)e^x$

99.3. $f(x)=e^x-x^5$

$f'(x)=\left(e^x-x^5\right)'=e^x-5x^4$

$f''(x)=\left(e^x-5x\right)'=e^x-5x^4$

Pág. 120

Questão 100

100.1. $f(x)=e^{-4x}$

$f'(x)=\left(e^{-4x}\right)'=(-4x)'e^{-4x}=-4e^{-4x}$

100.2. $f(x)=e^{-2x+x^2}$

$f'(x)=\left(e^{-2x+x^2}\right)'=\left(-2x+x^2\right)'e^{-2x+x^2}=(-2+2x)e^{-2x+x^2}$

100.3. $f(x)=e^{\sqrt{x}}$

$f'(x)=\left(e^{\sqrt{x}}\right)'=\left(\sqrt{x}\right)'e^{\sqrt{x}}=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'e^{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}e^{\sqrt{x}}=$

$=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$

100.4. $f(x)=\left(e^{-x}+e^x\right)^2$

$f'(x)=\left[\left(e^{-x}+e^x\right)^2\right]'=2\left(e^{-x}+e^x\right)\left(e^{-x}+e^x\right)'=$

$=2\left(e^{-x}+e^x\right)\left(-e^{-x}+e^x\right)=2\left(-\left(e^{-x}\right)^2+\left(e^x\right)^2\right)=$

$=2\left(-e^{-2x}+e^{2x}\right)=-2\left(e^{-2x}-e^{2x}\right)$

100.5. $f(x)=(2x-1)^2e^{-x}$

$f'(x)=\left[(2x-1)^2e^{-x}\right]'=$

$$= \left[(2x-1)^2\right]' e^{-x} + (2x-1)^2 \left(e^x\right)' =$$

$$= 2(2x-1)(2x-1)' e^{-x} + (2x-1)^2 (-x)' e^{-x} =$$

$$= e^{-x}\left[2(2x-1)\times 2 + (2x-1)^2 \times (-1)\right] =$$

$$= \left[8x-4-\left(4x^2-4x+1\right)\right]e^{-x} =$$

$$= \left(8x-4-4x^2+4x-1\right)e^{-x} = \left(-4x^2+12x-5\right)e^{-x}$$

100.6. $f(x) = e^{\sin x} + e^{\frac{1}{x}}$

$$f'(x) = \left(e^{\sin x} + e^{\frac{1}{x}}\right)' = (\sin x)' e^{\sin x} + \left(\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \cos x\, e^{\sin x} + \frac{(1)' \times x - 1 \times (x)'}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = \cos x\, e^{\sin x} - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

100.7. $f(x) = \cos\left(e^{-x}\right)$

$$f'(x) = \left[\cos\left(e^{-x}\right)\right]' = -\left(e^{-x}\right)' \sin\left(e^{-x}\right) =$$

$$= -(-x)' e^{-x} \sin\left(e^{-x}\right) = -(-1) e^{-x} \sin\left(e^{-x}\right) =$$

$$= e^{-x} \sin\left(e^{-x}\right)$$

100.8. $f(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

$$f'(x) = \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)' = \frac{(2)'\left(e^x + e^{-x}\right) - 2\left(e^x + e^{-x}\right)'}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} =$$

$$= \frac{-2\left[e^x + (-x)' e^{-x}\right]}{\left(e^x\right)^2 + 2e^x \times e^{-x} + \left(e^{-x}\right)^2} = \frac{-2\left(e^x - e^{-x}\right)}{e^{2x} + 2 + e^{-2x}} =$$

$$= \frac{-2e^x + 2e^{-x}}{e^{2x} + e^{-2x} + 2}$$

100.9. $f(x) = \dfrac{x e^{2x}}{2x+1}$

$$f'(x) = \left(\frac{x e^{2x}}{2x+1}\right)' = \frac{\left(x e^{2x}\right)'(2x+1) - x e^{2x}(2x+1)'}{(2x+1)^2} =$$

$$= \frac{\left[(x)' e^{2x} + x\left(e^{2x}\right)'\right](2x+1) - x e^{2x} \times 2}{(2x+1)^2} =$$

$$= \frac{\left[e^{2x} + x(2x)' e^{2x}\right](2x+1) - 2x e^{2x}}{(2x+1)^2} =$$

$$= \frac{e^{2x}(1+2x)(2x+1) - 2x e^{2x}}{(2x+1)^2} = \frac{e^{2x}\left[(2x+1)^2 - 2x\right]}{(2x+1)^2} =$$

$$= \frac{e^{2x}\left(4x^2+4x+1-2x\right)}{(2x+1)^2} = \frac{e^{2x}\left(4x^2+2x+1\right)}{(2x+1)^2}$$

Pág. 121

Questão 101

101.1. $f(x) = 3^x$

$$f'(x) = \left(3^x\right)' = 3^x \ln 3$$

101.2. $f(x) = 5^{\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \left(5^{\sqrt{x}}\right)' = \left(\sqrt{x}\right)' 5^{\sqrt{x}} \ln 5 = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' \times 5^{\sqrt{x}} \ln 5 =$$

$$= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \times 5^{\sqrt{x}} \ln 5 = \frac{1}{2\sqrt{x}} 5^{\sqrt{x}} \ln 5$$

101.3. $f(x) = 3^{\cos(3x)}$

$$f'(x) = \left(3^{\cos(3x)}\right)' = \left(\cos(3x)\right)' \times 3^{\cos(3x)} \ln 3 =$$

$$= -(3x)' \sin(3x) \times 3^{\cos(3x)} \ln 3 = -3\sin(3x) \times 3^{\cos(3x)} \ln 3$$

101.4. $f(x) = \dfrac{2^x}{1+x}$

$$f'(x) = \left(\frac{2^x}{1+x}\right)' = \frac{\left(2^x\right)'(1+x) - 2^x(1+x)'}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{2^x \ln 2(1+x) - 2^x \times 1}{(1+x)^2} = \frac{2^x \ln 2(1+x) - 2^x}{(1+x)^2}$$

101.5. $f(x) = \dfrac{3^x - 1}{3^{x+1}}$

$$f'(x) = \left(\frac{3^x - 1}{3^{x+1}}\right)' = \frac{(3x-1)' \times 3^{x+1} - \left(3^x - 1\right)\left(3^{x+1}\right)'}{\left(3^{x+1}\right)^2} =$$

$$= \frac{3^x \ln 3 \times 3^{x+1} - \left(3^x - 1\right) \times (x+1)' \times 3^{x+1} \ln 3}{\left(3^{x+1}\right)^2} =$$

$$= \frac{3^{x+1}\left[3^x \ln 3 - \left(3^x - 1\right) \times 1 \times \ln 3\right]}{\left(3^{x+1}\right)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{3^x \ln 3} - \cancel{3^x \ln 3} + \ln 3}{3^{x+1}} = \frac{\ln 3}{3^{x+1}}$$

101.6. $f(x) = a^{e^x}$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \left(a^{e^x}\right)' = \left(e^x\right)' \times a^{e^x} \times \ln a = e^x \times a^{e^x} \ln a$$

101.7. $f(x) = a^{\sin(2x)}$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \left(a^{\sin(2x)}\right)' = \left(\sin(2x)\right)' a^{\sin(2x)} \times \ln a =$$

$$= (2x)' \cos(2x) a^{\sin(2x)} \times \ln a = 2\cos(2x) a^{\sin(2x)} \times \ln a$$

Questão 102

102.1. $g(x) = x^{\sqrt{3}}$

$$g'(x) = \left(x^{\sqrt{3}}\right)' = \sqrt{3} x^{\sqrt{3}-1}$$

102.2. $g(x)=\left(x^2+1\right)^{\pi}$

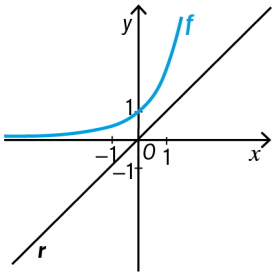
$$g'(x)=\left[\left(x^2+1\right)^{\pi}\right]'=\pi\left(x^2+1\right)^{\pi-1}\times\left(x^2+1\right)'=$$

$$=\pi\left(x^2+1\right)^{\pi-1}\times 2x=2\pi x\left(x^2+1\right)^{\pi-1}$$

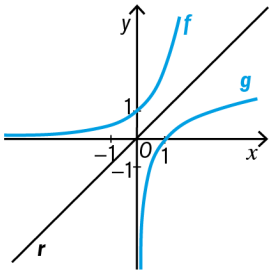
Pág. 122

Tarefa 12

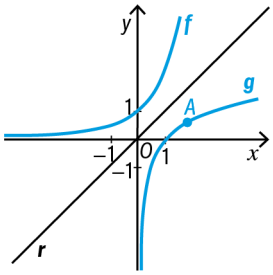
1.1.



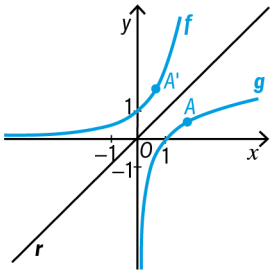
1.2.



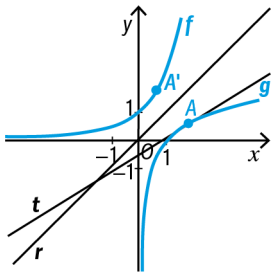
2.1.



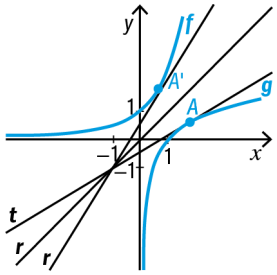
2.2.



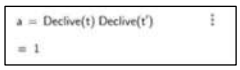
3.1.



3.2.



3.3.



O produto dos declives das duas retas tangentes é 1 e este produto não se altera, movimentando o ponto *A*.

4.1. $f'(x)=\left(e^x\right)'=e^x$

$$\left(g(x_0),x_0\right)=\left(\ln x_0,x_0\right)$$

$$m_f=f'\left(\ln x_0\right)=e^{\ln x_0}=x_0$$

$$f'(x_0)=e^{x_0}$$

4.2. $m_g\times m_f=1\Leftrightarrow m_g\times x_0=1\Leftrightarrow m_g=\dfrac{1}{x_0}$

$$g'(x_0)=\frac{1}{x_0}$$

Pág. 123

Questão 103

103.1. $f(x)=\ln\left(x^2\right)$

$$f'(x)=\left[\ln\left(x^2\right)\right]'=\frac{\left(x^2\right)'}{x^2}=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$$

103.2. $f(x)=x\ln x$

$$f'(x)=\left(x\ln x\right)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\times\frac{1}{x}=$$

$$=\ln x+1$$

103.3. $f(x)=\ln^2(2x)$

$$f'(x)=\left[\ln^2(2x)\right]'=2\ln(2x)\times\left[\ln^2(2x)\right]'=$$

$$=2\ln(2x)\times\frac{(2x)'}{2x}=\ln(2x)\times\frac{2}{x}=\frac{2\ln(2x)}{x}$$

103.4. $f'(x)=\left[\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)\right]'=\frac{\left(\frac{1}{\cos x}\right)'}{\frac{1}{\cos x}}=$

$=\frac{(1)'\cos x-1\times(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos x}}=\frac{\sin x\times\cos x}{\cos^2 x}=$

$=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$

103.5. $f(x)=\sqrt{x}\ln x-\sqrt{x}$

$f'(x)=\left(\sqrt{x}\ln x-\sqrt{x}\right)'=\left(\sqrt{x}\right)'\ln x+\sqrt{x}(\ln x)'-\left(\sqrt{x}\right)'=$

$=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'\ln x+\sqrt{x}\times\frac{1}{x}-\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\ln x+\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=$

$=\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\ln x-1}{2\sqrt{x}}+\frac{2\cancel{x}}{2\cancel{x}\sqrt{x}}=\frac{\ln x+1}{2\sqrt{x}}$

Pág. 124

Questão 104

104.1. $f(x)=\log_3\left(x^2-4\right)$

$f'(x)=\left[\log_3\left(x^2-4\right)\right]'=\frac{\left(x^2-4\right)'}{\left(x^2-4\right)\ln 3}=\frac{2x}{\left(x^2-4\right)\ln 3}$

104.2. $f(x)=\log\sqrt{x}$

$f'(x)=\left(\log\sqrt{x}\right)'=\left(\log x^{\frac{1}{2}}\right)'=\left(\frac{1}{2}\log x\right)'=\frac{1}{2}\times\frac{(x)'}{x\ln 10}=$

$=\frac{1}{2x\ln 10}$

Outro processo:

$f'(x)=\left(\log\sqrt{x}\right)'=\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\sqrt{2}\ln 10}=\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'}{\sqrt{x}\ln 10}=\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}\ln 10}=$

$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\ln 10}=\frac{1}{2x\ln 10}$

104.3. $f(x)=x\log_2\left(x^2+2\right)$

$f'(x)=\left[x\log_2\left(x^2+2\right)\right]'=$

$=(x)'\log_2\left(x^2+2\right)+x\left[\log_2\left(x^2+2\right)\right]'=$

$=1\log_2\left(x^2+2\right)+x\frac{\left(x^2+2\right)'}{\left(x^2+2\right)\ln 2}=$

$=\log_2\left(x^2+2\right)+x\frac{2x}{\left(x^2+2\right)\ln 2}=$

$=\log_2\left(x^2+2\right)+\frac{2x^2}{\left(x^2+2\right)\ln 2}$

104.4. $f(x)=\log_2\left(\sin^2 x\right)$

$f'(x)=\left[\log_2\left(\sin^2 x\right)\right]'=$

$=\frac{\left(\sin^2 x\right)'}{\sin^2 x\ln 2}=\frac{2\sin x(\sin x)'}{\sin^2 x\ln 2}=\frac{2\cos x}{\sin x\ln 2}=\frac{\frac{2\cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}}}{\frac{\sin x}{\cos x}\ln 2}=$

$=\frac{2}{\ln 2\times\tan x}$

104.5. $f(x)=\frac{-1+\log_3 x}{\log_3 x}$

$f'(x)=\left(\frac{-1+\log_3 x}{\log_3 x}\right)'=$

$=\frac{(-1+\log_3 x)'\times\log_3 x-(-1+\log_3 x)(\log_3 x)'}{(\log_3 x)^2}=$

$=\frac{\frac{(x)'}{x\ln 3}\times\log_3 x-(-1+\log_3 x)\times\frac{(x)'}{x\ln 3}}{\left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right)^2}=$

$=\frac{\frac{1}{x\ln 3}\left(\cancel{\log_3 x}+1-\cancel{\log_3 x}\right)}{\left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right)^2}=\frac{\ln^2 3}{x\ln 3\times\ln^2 x}=\frac{\ln 3}{x\ln x^2}$

104.6. $f(x)=\frac{\log(2x)}{x}$

$f'(x)=\left(\frac{\log(2x)}{x}\right)'=\frac{\left[\log(2x)\right]'x-\log(2x)\times(x)'}{x^2}=$

$=\frac{\frac{(2x)'}{2x\ln 10}\times x-\log(2x)\times 1}{x^2}=\frac{\frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}\ln 10}-\log(2x)}{x^2}=$

$=\frac{\frac{1-\ln 10\times\log(2x)}{\ln 10}}{x^2}=\frac{1-\ln 10\log(2x)}{x^2\ln 10}$

104.7. $f(x)=\ln\left[x^2(3x+1)\right]$

$f'(x)=\left(\ln\left[x^2(3x+1)\right]\right)'=\frac{\left[x^2(3x+1)\right]'}{x^2(3x+1)}=$

$=\frac{\left(x^2\right)'(3x+1)+x^2(3x+1)'}{x^2(3x+1)}=$

$=\frac{2x\cancel{(3x+1)}}{x^2\cancel{(3x+1)}}+\frac{\cancel{x^2}\times 3}{\cancel{x^2}(3x+1)}=\frac{2}{x}+\frac{3}{3x+1}$

Outro processo:

$f'(x)=\left(\ln\left[x^2(3x+1)\right]\right)'=\left(\ln\left(3x^3+x^2\right)\right)'=$

$=\frac{\left(3x^3+x^2\right)'}{3x^3+x^2}=\frac{9x^2+2x}{x\left(3x^2+x\right)}=\frac{\cancel{x}(9x+2)}{\cancel{x}\left(3x^2+x\right)}=\frac{9x+2}{3x^2+x}$

104.8. $f(x)=\log\left(\dfrac{\sqrt{2x}}{5x+2}\right)$

$$f'(x)=\left[\log\left(\frac{\sqrt{2x}}{5x+2}\right)\right]'=\frac{\left(\dfrac{\sqrt{2x}}{5x+2}\right)'}{\dfrac{\sqrt{2x}}{5x+2}\ln 10}=$$

$$=\frac{\dfrac{\left(\sqrt{2x}\right)'(5x+2)-\sqrt{2x}(5x+2)'}{(5x+2)^2}}{\dfrac{\sqrt{2x}}{5x+2}\ln 10}=$$

$$=\frac{\dfrac{\left[(2x)^{\frac{1}{2}}\right]'(5x+2)-\sqrt{2x}\times 5}{5x+2}}{\sqrt{2x}\ln 10}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(2x)^{-\frac{1}{2}}(2x)'(5x+2)-5\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}(5x+2)\ln 10}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2x}}\times 2(5x+2)-5\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}(5x+2)\ln 10}=$$

$$=\frac{\dfrac{5x+2-5\times 2x}{\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}(5x+2)\ln 10}=\frac{2-5x}{2x(5x+2)\ln 10}$$

Pág. 125

Tarefa 13

1.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\dfrac{e^0-1}{0}=\dfrac{0}{0}$

Pode-se aplicar a regra de L'Hôpital porque $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$ conduz a uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$ e as funções $x\to y=e^x-1$ e $x\to y=x$ são diferenciáveis no ponto 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=\frac{e^0}{1}=1$$

1.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=\dfrac{\ln 1}{0}=\dfrac{0}{0}$

Pode-se aplicar a regra de L'Hôpital porque $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ conduz a uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$ e as funções $x\to y=\ln(x+1)$ e $x\to y=x$ são diferenciáveis no ponto 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left[\ln(x+1)\right]'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{(x+1)'}{x+1}}{1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{0+1}=1$$

Pág. 126

Questão 105

105.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\dfrac{0}{0}$

Usando o limite notável:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

Usando a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{e^0}{2}=\frac{1}{2}$$

105.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2}{2x}=\dfrac{0}{0}$

Usando o limite notável:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\left(e^x-1\right)}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=2\times 1=2$$

Usando a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(2e^x-1\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x}{1}=2\times e^0=2$$

105.3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{e^{x+2}-1}{4x+8}=\dfrac{0}{0}$

Usando o limite notável:

$$\lim_{x\to -2}\frac{e^{x+2}-1}{4x+8}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -2}\frac{e^{x+2}-1}{4(x+2)}=\frac{1}{4}\lim_{x\to -2}\frac{e^{x+2}-1}{x+2}=$$

$$\underset{\text{M.V.}}{=}\frac{1}{4}\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{4}$$

M.V. $\left|\begin{array}{l} y=x+2 \\ x\to -2\ ,\ y\to 0\end{array}\right.$

Usando a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to -2}\frac{e^{x+2}-1}{4x+8}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to -2}\frac{\left(e^{x+2}-1\right)'}{(4x+8)'}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)'e^{x+2}}{4}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{e^{x+2}}{4}=\frac{e^0}{4}=\frac{1}{4}$$

105.4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+6}{e^{x+2}-1}=\dfrac{0}{0}$

Usando o limite notável:

$$\lim_{x\to -2}\frac{3x+6}{e^{x+2}-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -2}\frac{3(x+2)}{e^{x+2}-1}=3\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{e^{x+2}-1}=$$

$$\underset{\text{M.V.}}{=}3\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}=3\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{y}{y}}{\dfrac{e^y-1}{y}}=3\times\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{e^y-1}}=3\times\frac{1}{1}=3$$

M.V. $\left|\begin{array}{l} y=x+2 \\ x\to -2\ ,\ y\to 0\end{array}\right.$

Usando a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to -2}\frac{3x+6}{e^{x+2}-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to -2}\frac{(3x+6)'}{\left(e^{x+2}-1\right)'}=\lim_{x\to -2}\frac{3}{(x+2)'\,e^{x+2}-0}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{3}{e^{x+2}}=\frac{3}{e^0}=3$$

105.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{3x}=\dfrac{0}{0}$

Usando o limite notável:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{3x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$$

Usando a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{3x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left[\ln(x+1)\right]'}{(3x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(x+1)'}{x+1}}{3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3(x+1)}=\frac{1}{3\times 1}=\frac{1}{3}$$

105.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2x+1)}{x}=\dfrac{0}{0}$

Usando o limite notável:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2x+1)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2x+1)}{x}\times 2=$$

M.V.

$y=2x$

$x\to 0,\ y\to 0$

$$=2\lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y}=2\times 1=2$$

Usando a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2x+1)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left[\ln(2x+1)\right]'}{(x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(2x+1)'}{2x+1}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{2x+1}=\frac{2}{2\times 0+1}=2$$

105.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{3x}}{e^{-x}-1}=\dfrac{0}{0}$

Usando o limite notável:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{3x}}{e^{-x}-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{e^{-x}-1}=-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{3x}-1}{x}}{\frac{e^{-x}-1}{x}}=$$

$$-\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\times 3}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}(\times -1)}=-\frac{\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}\times 3}{\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^{z}-1}{z}\times(-1)}=-\frac{1\times 3}{1\times(-1)}=3$$

M.V.

$y=3x$

$x\to 0,\ y\to 0$

$z=-x$

$x\to 0,\ z\to 0$

Usando a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{3x}}{e^{-x}-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-e^{3x}\right)'}{\left(e^{-x}-1\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-(3x)'\,e^{3x}}{(-x)'\,e^{-x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-3e^{3x}}{-1e^{-x}}=\lim_{x\to 0}\left(3e^{4x}\right)=3\times e^0=3$$

105.8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{x-2}-1}{x^2-x-2}=\dfrac{0}{0}$

Usando o limite notável:

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^{x-2}-1}{x^2-x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-2}-1}{(x-2)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{e^{x-2}-1}{x-2}\times\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+1}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}\times\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$$

C.A.

	1	−1	−2
2		2	2
	1	1	0

M.V.

$y=2x$

$x\to 0,\ y\to 0$

Usando a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^{x-2}-1}{x^2-x-2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to 2}\frac{\left(e^{x-2}-1\right)'}{\left(x^2-x-2\right)'}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)'\,e^{x-2}}{2x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{e^{x-2}}{2x-1}=\frac{e^0}{2\times 2-1}=\frac{1}{3}$$

105.9. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\ln(x+4)^2}{x+3}=\dfrac{\ln(1)}{0}=\dfrac{0}{0}$

Usando o limite notável:

$$\lim_{x\to -3}\frac{\ln(x+4)^2}{x+3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -3}\frac{2\ln(x+3+1)}{x+3}=2\lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y}=$$

$$=2\times 1=2$$

M.V.

$y=x+3$

$x\to -3,\ y\to 0$

Usando a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to -3}\frac{\ln(x+4)^2}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{2\ln(x+4)}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{\ln(x+4)}{x+3}=$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}2\lim_{x\to -3}\frac{\left[\ln(x+4)\right]'}{(x+3)'}=2\lim_{x\to -3}\frac{\frac{(x+4)'}{x+4}}{1}=$$

$$=2\lim_{x\to -3}\frac{1}{x+4}=2\times\frac{1}{-3+4}=2\times 1=2$$

105.10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(x^4\right)}{x^2-1}=\dfrac{\ln(1)}{1-1}=\dfrac{0}{0}$

Usando o limite notável:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(x^4\right)}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{4\ln x}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=4\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x-1+1)}{x-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=$$

$$=4\lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y}\times\frac{1}{1+1}=4\times 1\times\frac{1}{2}=2$$

M.V. $\left| \begin{array}{l} y = x-1 \\ x \to 1,\ y \to 0 \end{array} \right.$

Usando a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(x^4\right)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4\ln x}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}4\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{\left(x^2-1\right)'}=$$

$$=4\lim_{x\to 1}\frac{\frac{(x)'}{x}}{2x}=4\lim_{x\to 1}\frac{1}{2x^2}=4\times\frac{1}{2\times 1}=2$$

Pág. 127

Questão 106

106.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log x}{x^2}=\dfrac{\infty}{\infty}$

Usando o limite notável: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log x}{x^2}=0$

106.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\log x}=\dfrac{\infty}{\infty}$

Usando o limite notável:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\log x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\log x}{x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

106.3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3}=\dfrac{\infty}{\infty}$

Usando o limite notável: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3}=+\infty$

106.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x}{x^3+5x}=\dfrac{\infty}{\infty}$

Usando o limite notável:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x}{x^3+5x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3^x}{x^3}}{\frac{x^3+5x}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x}{x^3}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}=\frac{+\infty}{1+0}=+\infty$$

106.5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}}{x^{\mathrm{e}}}=\dfrac{\infty}{\infty}$

Usando o limite notável:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}}{x^{\mathrm{e}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\mathrm{e}^2\right)^x}{x^{\mathrm{e}}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}}{x^{\mathrm{e}}}=+\infty+0=+\infty$$

106.6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{2^x}=\dfrac{\infty}{\infty}$

Usando o limite notável:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{2^x}{x^3}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x}{x^3}}=\frac{1}{+\infty}=0$$

106.7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\cos x}{\left(\mathrm{e}^x-1\right)^2}=\dfrac{0}{0}$

Usando a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\left(\mathrm{e}^x-1\right)^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R.L'H}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{\left[\left(\mathrm{e}^x-1\right)^2\right]'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-(-\sin x)}{2\left(\mathrm{e}^x-1\right)\left(\mathrm{e}^x-1\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\left(\mathrm{e}^x-1\right)\mathrm{e}^x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R.L'H}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{\left(2\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\times(2x)'\,\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{4\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x}=$$

$$=\frac{\cos 0}{4\times 1-2\times 1}=\frac{1}{2}$$

106.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}=\dfrac{0}{0}$

Usando a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R.L'H}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left[\ln(1+x)-x\right]'}{\left[x\ln(1+x)\right]'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1+x)'}{1+x}-1}{(x)'\ln(1+x)+x\left[\ln(1+x)\right]'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{\ln(1+x)+x\frac{(1+x)'}{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-1-x}{1+x}}{\ln(1+x)+x\frac{1}{1+x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x}{1+x}}{(x+1)\ln(1+x)+x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{(x+1)\ln(1+x)+x}=$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R.L'H}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(-x)'}{\left[(x+1)\ln(1+x)+x\right]'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{(x+1)'\ln(1+x)+(x+1)\left[\ln(1+x)\right]'+1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{1\times\ln(1+x)+(x+1)\frac{(1+x)'}{(x+1)}+1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\ln(1+x)+1+1}=\frac{-1}{0+2}=-\frac{1}{2}$$

Pág. 128

Questão 107

107.1. $f(x)=\dfrac{x^3}{e^x}$

• Domínio: $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:\underset{\text{Condição universal}}{e^x\neq 0}\right\}=\mathbb{R}$

• Zeros:

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^3}{e^x}=0\Leftrightarrow x^3=0\wedge\underset{\text{Condição universal}}{e^x\neq 0}\Leftrightarrow x=0$$

• Monotonia e extremos:

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{e^x}\right)'=\frac{\left(x^3\right)'e^x-x^3\left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2}=\frac{3x^2e^x-x^3e^x}{\left(e^x\right)^2}=$$

$$=\frac{x^2e^x(3-x)}{\left(e^x\right)^2}=\frac{x^2(3-x)}{e^x}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^2(3-x)}{e^x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2=0\vee 3-x=0\right)\wedge\underset{\text{Condição universal}}{e^x\neq 0}\Leftrightarrow x=0\vee x=3$$

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
f'	+	0	+	0	−
f	↗	0	↗	$\frac{27}{e^3}$	↘
				Máx.	

$$f(0)=\frac{0^3}{e^0}=\frac{0}{1}$$

$$f(3)=\frac{3^3}{e^3}=\frac{27}{e^3}$$

A função f é estritamente crescente em $]-\infty,3]$ e estritamente decrescente em $[3,+\infty[$. Tem um máximo absoluto igual a $\frac{27}{e^3}$ para $x=3$.

• Concavidades e pontos de inflexão:

$$f''(x)=\left[\frac{x^2(3-x)}{e^x}\right]'=\left(\frac{3x^2-x^3}{e^x}\right)'=$$

$$=\frac{\left(3x^2-x^3\right)'e^x-\left(3x^2-x^3\right)\left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(6x-3x^2\right)e^x-\left(3x^2-x^3\right)e^x}{\left(e^x\right)^2}=$$

$$=\frac{e^x\left(6x-3x^2-3x^2+x^3\right)}{\left(e^x\right)^2}=\frac{x^3-6x^2+6x}{e^x}=$$

$$=\frac{x\left(x^2-6x+6\right)}{e^x}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{x\left(x^2-6x+6\right)}{e^x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2-6x+6\right)=0\wedge\underset{\text{condição universal}}{e^x\neq 0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0\vee x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\times1\times6}}{2\times1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0\vee x=\frac{6\pm\sqrt{12}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0\vee x=3-\sqrt{3}\vee x=3+\sqrt{3}$$

x	$-\infty$	0		$3-\sqrt{3}$		$3+\sqrt{3}$	$+\infty$
f''	−	0	+	0	−	0	+
f	⌒	0	⌣	$\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^3}{e^{3-\sqrt{3}}}$	⌒	$\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^3}{e^{3+\sqrt{3}}}$	⌣
				P.I.		P.I.	P.I.

$$f\left(3-\sqrt{3}\right)=\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^3}{e^{3-\sqrt{3}}};\quad f\left(3+\sqrt{3}\right)=\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^3}{e^{3+\sqrt{3}}}$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,0[$ e em $]3-\sqrt{3},3+\sqrt{3}[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]0,3-\sqrt{3}[$ e em $]3+\sqrt{3},+\infty[$. Os pontos de coordenadas $(0,0)$, $\left(3-\sqrt{3},\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^3}{e^{3-\sqrt{3}}}\right)$ e $\left(3+\sqrt{3},\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^3}{e^{3+\sqrt{3}}}\right)$ são pontos de inflexão do gráfico de f.

• Assíntotas:

Verticais:

Como $D_f=\mathbb{R}$ e f é contínua, o gráfico de f não tem assíntotas verticais.

Horizontais:
Quando $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{e^x}{x^3}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}}=\frac{1}{+\infty}=0$$

A reta de equação $y=0$ é assíntota ao gráfico de f quando $x\to+\infty$.
Verticais:

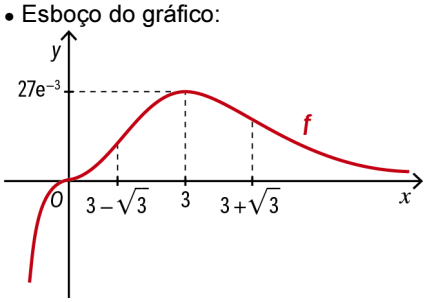
Quando $x\to-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{e^x}=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$.

O gráfico de f não tem assíntota horizontal quando $x\to-\infty$.
Oblíquas:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{xe^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\frac{+\infty}{0^+}=+\infty$$

O gráfico de f não tem assíntota oblíqua quando $x\to-\infty$.
Logo, a reta de equação $y=0$ é a única assíntota ao gráfico de f.

• Esboço do gráfico:



• Contradomínio: $D'_f = \left]-\infty, \frac{27}{e^3}\right]$

107.2. $f(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^x - 1}$

• Domínio:

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

C.A. $\left| \; e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0 \right.$

• Zeros:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x + 2}{e^x - 1} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x + 2 = 0}_{\text{Equação impossível}} \wedge e^x - 1 \neq 0$

A função f não tem zeros.

• Monotonia e extremos:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x + 2}{e^x - 1}\right)' = \frac{(e^x + 2)'(e^x - 1) - (e^x + 2)(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} =$$

$$= \frac{e^x(e^x - 1) - (e^x + 2)e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(\cancel{e^x} - 1 - \cancel{e^x} - 2)}{(e^x - 1)^2} =$$

$$= \frac{-3e^x}{(e^x - 1)^2} < 0, \; \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$f'(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então, f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$ e não tem extremos.

• Concavidades e pontos de inflexão:

$$f''(x) = \left[\frac{-3e^x}{(e^x - 1)^2}\right]' =$$

$$= \frac{(-3e^x)'(e^x - 1)^2 - (-3e^x)\left[(e^x - 1)^2\right]'}{\left[(e^x - 1)^2\right]^2} =$$

$$= \frac{-3e^x(e^x - 1)^2 + 3e^x \times 2(e^x - 1)(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^4} =$$

$$= \frac{3e^x(e^x - 1)\left[-(e^x - 1) + 2e^x\right]}{(e^x - 1)^4} =$$

$$= \frac{3e^x(-e^x + 1 + 2e^x)}{(e^x - 1)^3} = \frac{3e^x(e^x + 1)}{(e^x - 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3e^x(e^x + 1)}{(e^x - 1)^3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3e^x(e^x + 1) = 0 \wedge (e^x - 1)^3 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\underbrace{3e^x = 0}_{\text{Equação impossível}} \vee \underbrace{e^x + 1 = 0}_{\text{Equação impossível}}\right) \wedge x \neq 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	−	N.D.	+
f	⌒	N.D.	⌣

O gráfico f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e voltada para cima em $]0, +\infty[$. Não tem pontos de inflexão.

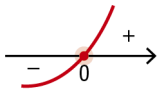
• Assíntotas:

Verticais:

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e f é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical em 0.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + 2}{e^x} = \frac{e^0 + 2}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty \; ; \; \lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$$



A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

Horizontais:

Quando $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{RL'H}}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{(e^x + 2)'}{(e^x - 1)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

A reta de equação $y = 1$ é assíntota ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

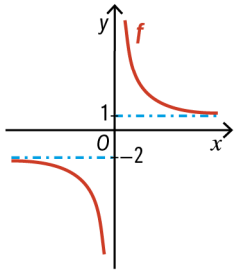
Quando $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \frac{0 + 2}{0 - 1} = -2$$

A reta de equação $y = -2$ é assíntota ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

O gráfico de f tem uma assíntota vertical de equação $x = 0$ e duas assíntotas horizontais de equação $y = 1$ e $y = -2$ quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, respetivamente.

• Esboço do gráfico:



• Contradomínio: $D'_f =]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$

107.3. $f(x)=xe^x$

• Domínio: $D_f=\mathbb{R}$

• Zeros:

$f(x)=0 \Leftrightarrow xe^x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee \underbrace{e^x=0}_{\text{Equação impossível}} \Leftrightarrow x=0$

0 é o único zero da *f*.

Monotonia e extremos:

$f'(x)=\left(xe^x\right)'=(x)'e^x+xe^x=e^x+xe^x=e^x(1+x)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x(1+x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x=0}_{\text{Equação impossível}} \vee 1+x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$

$f(-1)=-1e^{-1}=-\frac{1}{e}$

A função *f* é estritamente decrescente em $]-\infty,-1]$ e estritamente crescente em $[-1,+\infty[$ e tem um mínimo absoluto igual a $-\frac{1}{e}$ para $x=-1$.

• Concavidade e pontos de inflexão:

$f''(x)=\left[e^x(1+x)\right]'=\left(e^x\right)'(1+x)+e^x(1+x)'=$

$=e^x(1+x)+e^x\times 1=e^x(1+x+1)=e^x(x+2)$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow e^x(x+2)=0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x=0}_{\text{equação impossível}} \vee x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	$-\frac{2}{e^2}$	$\smile$

P.I.

O gráfico de *f* tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-2[$, voltada para cima em $]-2,+\infty[$ e tem um ponto de inflexão de coordenadas $\left(-2,-\frac{2}{e^2}\right)$.

• Assíntotas:

Verticais:

Como $D_f=\mathbb{R}$ e *f* é contínua, o gráfico de *f* não tem assíntotas verticais.

Horizontais:

Quando $x\to+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^x\right)=+\infty\times(+\infty)=+\infty$

Quando $x\to-\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)\overset{\infty\times 0}{=}\lim\limits_{y\to+\infty}\left(-ye^{-y}\right)=-\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y}=$

M.V. $\left|\begin{array}{l} y=-x \Leftrightarrow x=-y \\ x\to-\infty,\ y\to+\infty \end{array}\right.$

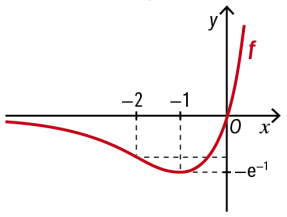
$=-\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y}{\frac{e^y}{y}}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}}=\frac{1}{+\infty}=0$

A reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f* quando $x\to-\infty$.

Oblíquas: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

A reta de equação $y=0$ é a única assíntota ao gráfico de *f*.

• Esboço do gráfico:



• Contradomínio: $D'_f=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right[$

Questão 108

108.1. $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}: x+1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

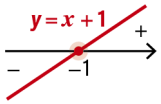
Assíntotas verticais:

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ e *f* é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical em $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{e^x}{x+1}=\frac{e^{-1}}{0}=\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\frac{e^{-1}}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\frac{e^{-1}}{0^-}=-\infty$



A reta de equação $x=-1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de *f*.

Assíntotas não verticais:

Quando $x\to+\infty$:

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}_{\text{RL'H}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(x^2+x\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}_{\text{RL'H}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{(2x+1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$

O gráfico de *f* não tem assíntota não vertical quando $x\to+\infty$.

Quando $x\to-\infty$:

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+x}=\frac{0}{+\infty}=0$

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x+1}=\frac{0}{-\infty}=0$

A reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f* quando $x\to-\infty$.

O gráfico de *f* tem uma assíntota vertical de equação $x=-1$ e uma assíntota horizontal de equação $y=0$ (quando $x\to-\infty$).

108.2. $f(x)=\dfrac{2}{1-\mathrm{e}^{-x}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:1-\mathrm{e}^{x}\neq 0\right\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

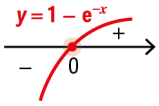
C.A. $\left|\ 1-\mathrm{e}^{x}=0\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{0}\Leftrightarrow -x=0\Leftrightarrow x=0\right.$

Assíntotas verticais:

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e *f* é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical em $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{1-\mathrm{e}^{x}}=\dfrac{2}{0}=\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^{+}} f(x)=\dfrac{2}{0^{+}}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^{-}} f(x)=\dfrac{2}{0^{-}}=-\infty$



A reta de equação $x=0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de *f*.

Assíntotas não verticais:

Quando $x\to+\infty$:

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)}=\dfrac{2}{+\infty}=0$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{1-\mathrm{e}^{-x}}=\dfrac{2}{1-0}=2$

A reta de equação $y=2$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f* quando $x\to+\infty$.

Quando $x\to-\infty$:

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)}=\dfrac{2}{+\infty}=0$

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{1-\mathrm{e}^{-x}}=\dfrac{2}{-\infty}=0$

A reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f* quando $x\to-\infty$.

O gráfico de *f* tem uma assíntota vertical de equação $y=2$ (quando $x\to+\infty$) e $y=0$ (quando $x\to-\infty$).

108.3. $f(x)=\dfrac{2}{\mathrm{e}^{x}-1}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:\mathrm{e}^{x}-1\neq 0\right\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

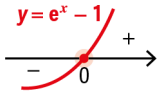
C.A. $\left|\ \mathrm{e}^{x}-1=0\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}=1\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{0}\Leftrightarrow x=0\right.$

Assíntotas verticais:

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e *f* é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical em $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}-1}=\dfrac{1}{0}=\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^{+}} f(x)=\dfrac{1}{0^{+}}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^{-}} f(x)=\dfrac{1}{0^{-}}=-\infty$



A reta de equação $x=0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de *f*.

Assíntotas não verticais:

Quando $x\to+\infty$:

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}-1}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

A reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f* quando $x\to+\infty$.

Quando $x\to-\infty$:

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}-1}=\dfrac{1}{0-1}=-1$

A reta de equação $y=-1$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f* quando $x\to-\infty$.

O gráfico de *f* tem uma assíntota vertical de equação $x=0$ e duas assíntotas horizontais de equação $y=0$ (quando $x\to+\infty$) e $y=-1$ (quando $x\to-\infty$).

Pág. 129

Questão 109

109.1.

a) $f'(x)=\left(a-x+\mathrm{e}^{-x}\right)'=-1+(-x)'\,\mathrm{e}^{-x}=-1-\mathrm{e}^{-x}$

$f'(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Logo, *f* é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$ e consequentemente, não tem extremos.

b) $f''(x)=\left(-1-\mathrm{e}^{-x}\right)'=-(-x)'\,\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}$

$f''(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Logo, *f* tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$, o que significa que não tem pontos de inflexão.

c) $D_f=\mathbb{R}$ e *f* é contínua. Logo, não tem assíntotas verticais.

d) Quando $x\to+\infty$

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a-x+\mathrm{e}^{-x}}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a+\mathrm{e}^{-x}}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=\dfrac{a}{+\infty}-1=-1$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a-x+\mathrm{e}^{-x}+x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a+\mathrm{e}^{-x}\right)=a+0=a$

Logo, a reta de equação $y=-x+a$ é assíntota ao gráfico de *f* quando $x\to+\infty$.

109.2. Seja b a abcissa do ponto de f onde a reta da equação $y=-2x+4$ é tangente.

Então, $f'(b)=-2$ e $f(b)=-2b+4$

$f'(b)=-2 \Leftrightarrow -1-\mathrm{e}^{-b}=-2 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-b}=1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-b}=\mathrm{e}^{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -b=0 \Leftrightarrow b=0$

$f(b)=-2b+4 \Leftrightarrow a-0+e^{0}=0+4 \Leftrightarrow a+1=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=3$

Questão 110

$f(x)=\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2}, D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=\left[\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2}\right]'=$

$=\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)'\mathrm{e}^{-x^2}+\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)'=$

$=\frac{1}{2}\times 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}+\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)\left(-x^2\right)'\mathrm{e}^{-x^2}=$

$=x\,\mathrm{e}^{-x^2}-2x\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2}=\mathrm{e}^{-x^2}\left(x-2x-x^3\right)=$

$=\mathrm{e}^{-x^2}\left(-x-x^3\right)$

$f''(x)=\left[\mathrm{e}^{-x^2}\left(-x-x^3\right)\right]'=$

$=\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)'\left(-x-x^3\right)+\mathrm{e}^{-x^2}\left(-x-x^3\right)'=$

$=\left(-x^2\right)'\mathrm{e}^{-x^2}\left(-x-x^3\right)+\mathrm{e}^{-x^2}\left(-1-3x^2\right)=$

$=-2x\left(-x-x^3\right)\mathrm{e}^{-x^2}+\mathrm{e}^{-x^2}\left(-1-3x^2\right)=$

$=\mathrm{e}^{-x^2}\left(2x^2+2x^4-1-3x^2\right)=\mathrm{e}^{-x^2}\left(2x^4-x^2-1\right)$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x^2}\left(2x^4-x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{\mathrm{e}^{-x^2}=0}_{\text{equação impossível}} \vee 2x^4-x^2-1=0 \Leftrightarrow$

Fazendo $x^2=y$, tem-se que:

$2y^2-y-1=0 \Leftrightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 2\times(-1)}}{2\times 2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{9}}{4} \Leftrightarrow y=\frac{1\pm 3}{4} \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2} \vee y=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{x^2=-\frac{1}{2}}_{\text{equação impossível}} \vee x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$

$f(-1)=\left(1+\frac{1}{2}\times 1\right)\mathrm{e}^{-1}=\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-1}=\frac{3}{2\mathrm{e}}$

$f(1)=\left(1+\frac{1}{2}\times 1\right)\mathrm{e}^{-1}=\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-1}=\frac{3}{2\mathrm{e}}$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f''	$-$	0	$-$	0	$+$
f	⌣	$\frac{3}{2\mathrm{e}}$	⌢	$\frac{3}{2\mathrm{e}}$	⌣

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-1,1[$ e a concavidade voltada para cima em $]-\infty,-1[$ e em $]-1,+\infty[$ e tem pontos de inflexão em $x=-1$ e em $x=1$.

Pág. 130

Questão 111

111.1. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

- Domínio: $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x>0 \wedge x\neq 0\}=\mathbb{R}^+$
- Zeros:

$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \wedge x\neq 0 \wedge x\in D_f \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=e^0 \wedge x\in D_f \Leftrightarrow x=1$

1 é zero da função f.

- Monotonia e extremos:

$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'\times x-\ln x\,(x)'}{x^2}=$

$=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-\ln x=0 \wedge x^2\neq 0 \wedge x\in D_f \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x=1 \wedge x\in\mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x=\mathrm{e}$

$f(\mathrm{e})=\frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}$

x	0		1	$+\infty$
f'	N.D.	$+$	0	$-$
f	N.D.	↗	$\frac{1}{\mathrm{e}}$ Máx.	↘

A função f é estritamente crescente em $]0,\mathrm{e}]$ e é estritamente decrescente em $[\mathrm{e},+\infty[$.

f tem um máximo absoluto igual a $\frac{1}{\mathrm{e}}$ para $x=\mathrm{e}$.

- Concavidade e pontos de inflexão:

$f''(x)=\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)'=\frac{(1-\ln x)'\times x^2-(1-\ln x)\times\left(x^2\right)'}{x^4}=$

$=\frac{-\frac{1}{x}\times x^2-(1-\ln x)\times 2x}{x^4}=\frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=$

$=\frac{x(-1-2+2\ln x)}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x-3}{x^3}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\ln x-3=0 \wedge x^3\neq 0 \wedge x\in D_f \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x=\frac{3}{2} \wedge x\in\mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x=\sqrt{\mathrm{e}^3} \Leftrightarrow x=\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}$

$f\left(e\sqrt{e}\right)=\dfrac{\ln e^{\frac{3}{2}}}{e\sqrt{e}}=\dfrac{3}{2e\sqrt{e}}=\dfrac{3\sqrt{e}}{2e^2}$

x	0		$e\sqrt{e}$	$+\infty$
f''	N.D.	$-$	0	$+$
f	N.D.	∩	$\dfrac{3\sqrt{e}}{2e^2}$ P.I.	∪

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]0,e\sqrt{e}[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]e\sqrt{e},+\infty[$. O ponto de coordenadas $\left(e\sqrt{e},\dfrac{3\sqrt{e}}{2e^2}\right)$ é um ponto de inflexão.

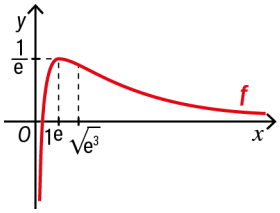
• Assíntotas:
Verticais:
$D_f=\mathbb{R}^+$ e f é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical ao gráfico de f.
Não verticais:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\overset{\text{L.N.}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\times0=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\text{L.N.}}{=}0$$

A reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f.

• Gráfico:

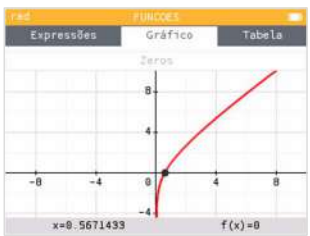


• Contradomínio: $D'_f=\left]-\infty,\dfrac{1}{e}\right]$

111.2. $f(x)=x+\ln x$

• Domínio: $D_f=\{x\in\mathbb{R}:x>0\}=\mathbb{R}^+$

• Zeros (com recurso à calculadora gráfica):
$f(x)=0\Leftrightarrow x+\ln x=0\Leftrightarrow x\approx0{,}567$



• Monotonia e extremos:

$$f'(x)=(x+\ln x)'=1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x+1}{x}=0\Leftrightarrow x+1=0\wedge x\neq0\wedge x\in D_f\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-1\wedge x\in\mathbb{R}^+$$

f' não tem zeros

$f'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}^+$

Então, a função f é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$ e não tem extremos.

• Concavidades e pontos de inflexão:

$$f''(x)=\left(\frac{x+1}{x}\right)'=\frac{(x+1)'\times x-(x+1)\times(x)'}{x^2}=$$

$$=\frac{1\times x-(x+1)\times1}{x^2}=\frac{x-x-1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$$

$f''(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}^+$

Então, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}^+$, pelo que, não tem pontos de inflexão.

• Assíntotas:
Verticais:
$D_f=\mathbb{R}^+$ e f é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical em $x=0$.

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x+\ln x)=0-\infty=-\infty$$

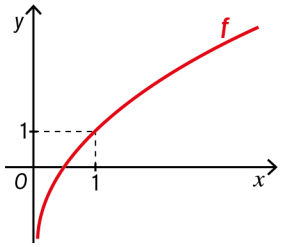
A reta da equação $x=0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f.
Não verticais:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\text{L.N.}}{=}1+0=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\cancel{x}+\ln x-\cancel{x}\right)=+\infty$$

O gráfico de f não tem assíntotas não verticais.

• Gráfico:



• Contradomínio: $D'_f=\mathbb{R}$

111.3. $f(x)=2\ln x-\ln^2 x$

• Domínio: $D_f=\{x\in\mathbb{R}:x>0\}=\mathbb{R}^+$

• Zeros (com recurso à calculadora gráfica):
$f(x)=0\Leftrightarrow2\ln x-\ln^2 x=0\Leftrightarrow\ln x(2-\ln x)=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ln x=0\vee2-\ln x=0\Leftrightarrow\ln x=0\vee\ln x=2\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left(x=e^0\vee x=e^2\right)\wedge x\in D_f\Leftrightarrow x=1\vee x=e^2$

1 e e^2 são os zeros da função f.

• Monotonia e extremos:

$$f'(x)=\left(2\ln x-\ln^2 x\right)'=2\times\frac{1}{x}-2\ln x\times(\ln x)'=$$

$$=\frac{2}{x}-2\ln x\times\frac{1}{x}=\frac{2-2\ln x}{x}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2-2\ln x}{x}=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2-2\ln x=0 \wedge x\neq 0 \wedge x\in D_f \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x=1 \wedge x\in\mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x=e$

$f(e)=2\ln e-\ln^2 e=2\times 1-1^2=1$

x	0		e	$+\infty$
f'	N.D.	+	0	−
f	N.D.	↗	$\frac{1}{e}$	↘

Máx.

A função f é estritamente crescente em $]0,e]$ e estritamente decrescente em $[e,+\infty[$.

f tem um máximo absoluto igual a 1 para $x=e$.

• Concavidades e pontos de inflexão:

$$f''(x)=\left(\frac{2-2\ln x}{x}\right)'=\frac{(2-2\ln x)'\times x-(2-2\ln x)\times(x)'}{x^2}=$$

$$=\frac{-2\times\frac{1}{x}\times x-(2-2\ln x)\times 1}{x^2}=\frac{-2-2+2\ln x}{x^2}=$$

$$=\frac{2\ln x-4}{x^2}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow =\frac{2\ln x-4}{x^2}=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2\ln x-4=0 \wedge x^2\neq 0 \wedge x\in D_f \Leftrightarrow \ln x=2 \wedge x\in\mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=e^2$

x	0		e^2	$+\infty$
f''	N.D.	−	0	+
f	N.D.	⌒	0	⌣

P.I.

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]0,e^2[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]e^2,+\infty[$.

O ponto de coordenadas $(e^2,0)$ é o ponto de inflexão.

• Assíntotas:

Verticais:

$D_f=\mathbb{R}^+$ e f é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical em $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(2\ln x-\ln^2 x\right)=-\infty-\infty=-\infty$$

A reta da equação $x=0$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

Não verticais:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x-\ln^2 x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2\ln x-\ln^2 x\right)'}{(x)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\times\frac{1}{x}-2\ln x\times(\ln x)'}{1}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}-2\ln x\times\frac{1}{x}\right)=$$

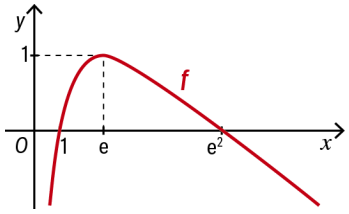
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-2\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}-2\lim_{\substack{x\to+\infty\\ \text{L.N.}}}\frac{\ln x}{x}=0-2\times 0=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(2\ln x-\ln^2 x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln x(2-\ln x)\right]=+\infty(-\infty)=-\infty$$

O gráfico de f não tem assíntotas não verticais.

• Gráfico:



• Contradomínio: $D'_f=]-\infty,1]$

Questão 112

112.1. $f(x)=0 \Leftrightarrow (a-\ln x)\ln x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a-\ln x=0 \vee \ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=a \vee x=e^0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=e^a \vee x=1$

Se $a\neq 0$, f tem dois zeros: 1 e e^a.

112.2. $f'(x)=\left[(a-\ln x)\ln x\right]'=$

$=(a-\ln x)'\times\ln x+(a-\ln x)(\ln x)'=$

$$=-\frac{1}{x}\ln x+(a-\ln x)\times\frac{1}{x}=\frac{-\ln x+a-\ln x}{x}=\frac{a-2\ln x}{x}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{a-2\ln x}{x}=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a-2\ln x=0 \wedge x\neq 0 \wedge x\in D_f \Leftrightarrow \ln x=\frac{a}{2} \wedge x\in\mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=e^{\frac{a}{2}}$

$$f\left(e^{\frac{a}{2}}\right)=\left(a-\ln e^{\frac{a}{2}}\right)\ln e^{\frac{a}{2}}=\left(a-\frac{a}{2}\right)\times\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}=\frac{a}{4}$$

x	0		$e^{\frac{a}{2}}$	$+\infty$
f'	N.D.	+	0	−
f	N.D.	↗	$\frac{a^2}{4}$	↘

A função f é estritamente crescente em $\left]0,e^{\frac{a}{2}}\right]$ e estritamente decrescente em $\left[e^{\frac{a}{2}},+\infty\right[$.

Tem máximo absoluto igual a $\frac{a^2}{4}$, para $x=e^{\frac{a}{2}}$.

112.3. $f''(x)=\left(\frac{a-2\ln x}{x}\right)'=$

$$=\frac{(a-2\ln x)'\times x-(a-2\ln x)\times(x)'}{x^2}=$$

$$=\frac{-2\times\frac{1}{x}\times x-(a-2\ln x)\times 1}{x^2}=\frac{-2-a+2\ln x}{x^2}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-2-a+2\ln x}{x^2}=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -2-a+2\ln x=0 \wedge x^2\neq 0 \wedge x\in D_f \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\ln x = a+2 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \ln x = \frac{a}{2}+1 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = e^{\frac{a}{2}+1}$

$f\left(e^{\frac{a}{2}+1}\right) = \left(a - \ln e^{\frac{a}{2}+1}\right) \times \ln e^{\frac{a}{2}+1} =$

$= \left[a - \left(\frac{a}{2}+1\right)\right] \times \left(\frac{a}{2}+1\right) = \left(a - \frac{a}{2} - 1\right) \times \left(\frac{a}{2}+1\right) =$

$= \left(\frac{a}{2}-1\right)\left(\frac{a}{2}+1\right) = \frac{a^2}{4} - 1$

x	0		$e^{\frac{a}{2}+1}$	$+\infty$
f''	N.D.	$-$	0	$+$
f	N.D.	$\cap$	$\frac{a^2}{4}-1$	$\cup$

P.I.

O gráfico de *f* tem a concavidade voltada para baixo em $\left]0, e^{\frac{a}{2}+1}\right[$ e voltada para cima em $\left]e^{\frac{a}{2}+1}, +\infty\right[$ e tem um ponto de inflexão de abcissa $e^{\frac{a}{2}+1}$.

112.4. Assíntotas verticais:

$D_f = \mathbb{R}^+$ e *f* é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical em $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left[(a - \ln x)\ln x\right] = +\infty(-\infty) = -\infty$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

Logo, o gráfico de *f* tem uma assíntota.

Pág. 131

Questão 113

113.1. $f(x) = \frac{1}{\log_2 x - 2}$

C.A. $\log_2 x - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 2^2 \Leftrightarrow x = 4$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge \log_2 x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R}^+ \setminus \{4\}$

Assíntotas verticais:

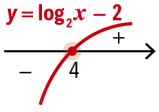
$D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{4\}$ e *f* é contínua. Logo, só poderão existir assíntotas verticais em 0 e 4.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\log_2 x - 2} = \frac{1}{-\infty} = 0$

Então, não existe assíntota vertical em $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} \frac{1}{\log_2 x - 2} = \frac{1}{0} = \infty$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$



A reta de equação $x = 4$ é a única assíntota vertical ao gráfico de *f*.

Assíntotas não verticais:

$m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x(\log_2 x - 2)} = \frac{1}{+\infty} = 0$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\log_2 x - 2} = \frac{1}{+\infty} = 0$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

O gráfico de *f* tem uma assíntota vertical de equação $x = 4$ e uma assíntota horizontal de equação $y = 0$.

113.2. $f(x) = \frac{\log(1+x) - x}{x\log(1+x)}$

C.A. $1 + x > 0 \Leftrightarrow x > -1$

$x\log(1+x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \log(1+x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee 1 + x = 10^0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 0$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 + x > 0 \wedge x\log(1+x) \neq 0\} =]-1, +\infty[\setminus \{0\}$

• Assíntotas verticais:

$D_f =]-1, +\infty[$ e *f* é contínua. Logo, só poderão existir assíntotas verticais em $x = -1$.

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{\log(1+x) - x}{x\log(1+x)} =$

$= \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{\cancel{\log(1+x)}\left(1 - \frac{x}{\log(1+x)}\right)}{x\cancel{\log(1+x)}} = \frac{1 - \frac{1}{-\infty}}{-1} = \frac{1-0}{-1} = -1 \in \mathbb{R}$

Então, não existe assíntota ao gráfico de *f* em $x = -1$.

• Assíntotas não verticais:

$m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x) - x}{x^2\log(1+x)} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cancel{\log(1+x)}}{x^2\cancel{\log(1+x)}} - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2\log(1+x)} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x\log(1+x)} = \frac{1}{+\infty} - \frac{1}{+\infty} = 0 - 0 = 0$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x) - x}{x\log(1+x)} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cancel{\log(1+x)}}{x\cancel{\log(1+x)}} - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\log(1+x)} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\log(1+x)} = 0 - 0 = 0$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

O gráfico de *f* tem uma assíntota horizontal de equação $y = 0$.

113.3. $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-3}{x-1}\right)$

C.A.

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{x-3}{x-1}$	$+$	N.D.	$-$	0	$+$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:\dfrac{x-3}{x-1}>0\right\}=]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$

• Assíntotas verticais:

$D_f=]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$ e f é contínua. Logo, só poderão existir assíntotas verticais em $x=1$ e $x=3$.

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left[\ln\left(\dfrac{x-3}{x-1}\right)\right]=\ln\left(\dfrac{-2}{0^-}\right)=\ln(+\infty)=+\infty$

A reta de equação $x=1$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

$\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\left[\ln\left(\dfrac{x-3}{x-1}\right)\right]=\ln\left(\dfrac{0^+}{2}\right)=-\infty$

A reta de equação $x=3$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

• Assíntotas não verticais:

$m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\ln\left(\dfrac{x-3}{x-1}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\ln\left(\dfrac{\cancel{x}\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right)}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\ln\left(\frac{1-0}{1-0}\right)}{\pm\infty}=\dfrac{\ln1}{\pm\infty}=0$

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\ln\left(\dfrac{x-3}{x-1}\right)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left(\dfrac{\cancel{x}\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right)=$

$=\ln\left(\dfrac{1-0}{1-0}\right)=\ln1=0$

A reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x\to+\infty$ e quando $x\to-\infty$.

O gráfico de f tem duas assíntotas horizontais de equações $x=1$ e $x=3$ e tem uma assíntota horizontal de equação $y=0$.

Questão 114

114.1. $g'(x)=\left(3x-1+\ln(2-x)^4\right)'=3-0+\dfrac{\left[(2-x)^4\right]'}{(2-x)^4}=$

$=3+\dfrac{4(2-x)^3\times(2-x)'}{(2-x)^4}=3+\dfrac{4\times(-1)}{2-x}=\dfrac{2-3x}{2-x}=$

$g'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2-3x}{2-x}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow2-3x=0\wedge2-x\neq0\wedge x\in D_g\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-3x=-2\wedge x\neq2\wedge x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$

$g\left(\dfrac{2}{3}\right)=3\times\dfrac{2}{3}-1+\ln\left(2-\dfrac{2}{3}\right)^4=2-1+\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)^4=$

$=1+4\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$		2	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$	N.D.	$+$
g	$\nearrow$	$g\left(\frac{2}{3}\right)$	$\searrow$	N.D.	$\nearrow$

Máx.

A função g é estritamente crescente em $\left]-\infty,\dfrac{2}{3}\right]$ e em $]2,+\infty[$ e estritamente decrescente em $\left[\dfrac{2}{3},2\right[$.

g tem um máximo relativo para $x=\dfrac{2}{3}$.

114.2. • Assíntotas verticais:

$D_g=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ e g é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical em $x=2$.

$\lim\limits_{x\to2}g(x)=\lim\limits_{x\to2}\left[3x-1+\ln(2-x)^4\right]=6-1+\ln0^+=5-\infty=$

$=-\infty$

A reta de equação $x=2$ é a única assíntota vertical ao gráfico de g.

• Assíntotas não verticais:

$m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x-1+\ln\left[(2-x)^4\right]}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\ln(2-x)^4}{x}=$

$\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}3-\dfrac{1}{\pm\infty}+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\left[\ln(2-x)^4\right]'}{(x)'}=3-0+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\left[(2-x)^4\right]'}{(2-x)^4}=$

$=3+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4(2-x)^3(2-x)'}{(2-x)^4}=3+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{2-x}=3+\dfrac{4}{\mp\infty}=$

$=3\mp0=3$

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[g(x)-3x\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\cancel{3x}-1+\ln\left[(2-x)^4\right]-\cancel{3x}\right)=$

$=-1+\ln(+\infty)=+\infty$

O gráfico de g não tem assíntotas não verticais.

Logo, o gráfico de g tem uma única assíntota $(x=2)$.

114.3. $g(x)=3x-1\Leftrightarrow3x-1+\ln\left[(2-x)^4\right]=3x-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ln(2-x)^4=0\Leftrightarrow(2-x)^4=e^0\wedge x\in D_g\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(2-x)^4=1\wedge x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(2-x=-1\vee2-x=1)\wedge x\neq2\Leftrightarrow x=3\vee x=1$

$g(1)=3\times1-1+\ln(2-1)^4=2+0=2$

$g(3)=3\times3-1+\ln(2-3)^4=9-1+0=8$

Os pontos de coordenadas $(1,2)$ e $(3,8)$, são os pontos de interseção do gráfico de *g* com a reta de equação $y = 3x - 1$.

Pág. 132

Questão 115

115.1. $f(x) = x^4 e^x$, $D_f \in \mathbb{R}$

$f'(x) = \left(x^4 e^x\right)' = \left(x^4\right)' e^x + x^4 \left(e^x\right)' = 4x^3 e^x + x^4 e^x =$

$= x^3 e^x (4 + x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 e^x (4 + x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3 = 0 \vee \underbrace{e^x = 0}_{\text{equação impossível}} \vee 4 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -4$

$f(0) = 0e^0 = 0$

$f(-4) = (-4)^4 e^{-4} = 256e^{-4}$

x	$-\infty$	-4		0	$+\infty$
f'	+	0	−	0	+
f	↗	$256e^{-4}$	↘	0	↗
		Máx.		Mín.	

A função *f* é estritamente crescente em $]-\infty, -4]$ e em $[0, +\infty[$ e estritamente decrescente em $[-4, 0]$.

f tem um máximo relativo igual a $256e^{-4}$ para $x = -4$ e um mínimo absoluto 0 para $x = 0$ $\left(f(x) = x^4 e^x, \forall x \in \mathbb{R}\right)$.

115.2. $f(x) = e^x - 2 - 2x$, $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \left(e^x - 2 - 2x\right)' = e^x - 0 - 2 = e^x - 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

$f(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 - 2\ln 2 = 2 - 2 - 2\ln 2 = -2\ln 2$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
f'	−	0	+
f	↗	$-2\ln 2$	↘
		Mín.	

A função *f* é estritamente decrescente em $]-\infty, \ln 2]$ e estritamente crescente em $[\ln 2, +\infty[$

f tem um mínimo absoluto igual a $-2\ln 2$ para $x = \ln 2$.

115.3.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ -\frac{1}{x^2} - e^{-x^2} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}, D_f = \mathbb{R}$$

Se $x \neq 0$:

$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} - e^{-x^2}\right)' =$

$= \frac{(-1)' \times x^2 - (-1) \times \left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} - \left(-x^2\right)' e^{-x^2} =$

$= \frac{0 + 2x}{x^4} + 2x e^{-x^2} = \frac{2}{x^3} + 2x e^{-x^2} = \frac{2 + 2x^4 e^{-x^2}}{x^3}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{2 + 2x^2 e^{-x^2} = 0}_{\text{equação impossível}} \wedge x^3 \neq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	−	N.D.	+
f	↘		↗

A função *f* é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e estritamente crescente em $]0, +\infty[$.

$f(x) = \frac{1}{x} - e^{-x^2} < 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f(0) = 0$

Então, *f* tem máximo absoluto igual a 0 para $x = 0$.

Questão 116

$f(x) = x - \frac{\ln^2 x}{2}$, $D_f \in \mathbb{R}^+$

$f'(x) = \left(x - \frac{\ln^2 x}{2}\right)' = 1 - \frac{1}{2} \times 2\ln x (\ln x)' = 1 - \ln x \times \frac{1}{x} =$

$= 1 - \frac{\ln x}{x}$

$f''(x) = \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)' = 0 - \frac{(\ln x)' x - \ln x (x)'}{x^2} =$

$= -\frac{\frac{1}{x} x - \ln x \times 1}{x^2} = -\frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{\ln x - 1}{x^2}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \wedge x^2 \neq 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \wedge x^2 \neq 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow \ln x = 1 \wedge x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = e$

$f(e) = e - \frac{\ln^2 e}{2} = e - \frac{1}{2}$

x	0		e	$+\infty$
f''	N.D.	−	0	+
f	N.D.	∩	$e - \frac{1}{2}$	∪
			P.I.	

O gráfico de *f* tem a concavidade voltada para baixo em $]0, e[$ e voltada para cima em $]e, +\infty[$.

O ponto de coordenadas $\left(e, e - \frac{1}{2}\right)$ é um ponto de inflexão do gráfico de *f*.

Pág. 133

Questão 117

117.1.

- *f* é contínua em $]-\infty, 1[$ por ser, nesse intervalo, definida pelo quociente de funções contínuas em $\mathbb{R}$ ($e^{x-1} - x$ é a diferença entre uma função

exponencial e uma função polinomial) e $x-1$ é uma função polinomial.

• f é contínua em $]1,+\infty[$ por ser, nesse intervalo, definida pelo produto de funções contínuas em $\mathbb{R}^+$ ($\ln x$ é uma função logarítmica e $\ln x-2$ é a diferença entre uma função logarítmica e uma função constante.

• f é contínua em $x=1$, se

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{e^{x-1}-x}{x-1}\right)\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\left(e^{x-1}-x\right)'}{(x-1)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)'\,e^{x-1}-1}{1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(e^{x-1}-1\right)=e^0-1=1-1=0$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\ln x(\ln x-2)\right]=\ln 1(\ln 1-2)=0(0-2)=$

$=0=f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

Então, f é contínua em $x=1$.

Logo, f é contínua em $\mathbb{R}$.

117.2. Se $x>1$:

$f'(x)=\left[\ln x(\ln x-2)\right]'=$

$=(\ln x)'(\ln x-2)+\ln x(\ln x-2)'=$

$=\dfrac{1}{x}(\ln x-2)+\ln x\dfrac{1}{x}=\dfrac{\ln x-2+\ln x}{x}=\dfrac{2\ln x-2}{x}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2\ln x-2}{x}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\ln x-2=0\wedge x\neq 0\wedge x>1\Leftrightarrow\ln x=1\wedge x>1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=e$

$f(e)=\ln e(\ln e-2)=1(1-2)=-1$

x	1		e	$+\infty$
f'		$-$	0	$+$
f		↘	-1	↗

A função f é estritamente decrescente em $]1,e]$ e estritamente crescente em $[e,+\infty[$.

f admite um mínimo relativo igual a -1 para $x=e$.

117.3.

• Assíntotas verticais:

f é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que, não tem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

Quando $x\to-\infty$:

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x-1}-x}{x(x-1)}\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(e^{x-1}-x\right)'}{\left(x^2-x\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)'\,e^{x-1}-1}{2x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x-1}-1}{2x-1}=\dfrac{0-1}{-\infty}=0$

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x-1}-x}{x-1}$

$\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(e^{x-1}-x\right)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}-1\right)=0-1=-1$

A reta da equação $y=-1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x\to-\infty$.

Quando $x\to+\infty$:

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln x(\ln x-2)}{x}=$

$\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left[\ln x(\ln x-2)\right]'}{(x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'\times(\ln x-2)+\ln x(\ln x-2)'}{1}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}(\ln x-2)+\ln x\times\dfrac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x-2+\ln x}{x}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x-2}{x}=2\underset{\text{L.N.}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}}-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=2\times 0-0=0$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln x(\ln x-2)\right]=$

$=+\infty(+\infty)=+\infty$

O gráfico de f não tem assíntota não vertical quando $x\to+\infty$.

O gráfico de f tem uma única assíntota de equação $y=-1$ (quando $x\to+\infty$).

Pág. 134

Tarefas de consolidação 7

1. $D_f=\mathbb{R}^+$

Seja m o declive da assíntota oblíqua ao gráfico de f.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+\log x-x}{x}=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log x}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m+0-1=2\Leftrightarrow m=3$

Opção (D)

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(e^x-1\right)}{3x}=\dfrac{2}{3}\underset{\text{L.N.}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}}=\dfrac{2}{3}\times 1=\dfrac{2}{3}$

Opção (D)

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x}{2x^2}$ não conduz uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$. Logo, não é aplicável a regra de L'Hôpital.

A Marta aplicou indevidamente a regra de L'Hôpital.

4.1. Para que a função f admita um extremo relativo em $x=-1$, é necessário que $f'(-1)=0$.

$f'(x)=\left(xe^{-ax}\right)'=(x)'e^{-ax}+x\left(e^{-ax}\right)'=$

$=e^{-ax}+x(-ax)'e^{-ax}=e^{-ax}(1-ax)$

$f'(-1)=0\Leftrightarrow e^{-a}(1+a)=0\Leftrightarrow \underset{\text{equação impossível}}{e^{-a}=0}\vee 1+a=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=-1$

4.2. $a=-2$; $f(x)=xe^{2x}$

$f'(x)=e^{2x}(1+2x)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow \underset{\text{equação impossível}}{e^{2x}=0}\vee 1+2x=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}e^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2e}$

A função f é estritamente decrescente em $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ e estritamente crescente em $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$.

f tem um mínimo absoluto igual a $-\frac{1}{2e}$ para $x=-\frac{1}{2}$.

5.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-(-x)'e^{-x}}{\cos x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{e^0+e^0}{\cos 0}=\frac{1+1}{1}=2$

5.2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{e^x+xe^x-1}\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sin(2x)\right)'}{\left(e^x+xe^x-1\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2x)'\cos(2x)}{e^x+(x)'e^x+x\left(e^x\right)'-0}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{2\times\cos 0}{2\times e^0+0\times e^0}=\frac{2\times 1}{2\times 1+0}=1$

Pág. 135

6. $f(x)=x-\ln x$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}:x>0\}=\mathbb{R}^+$

Assíntotas verticais (paralelas ao eixo *Oy*):

$D_f=\mathbb{R}^+$ e f é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical para $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-\ln x)=0-\ln 0^+=+\infty$

A reta de equação $x=0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f.

Assíntota horizontal (paralela ao eixo *Ox*):

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)\right]=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\times\left(1-\underset{\text{L.N.}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}\right)=+\infty(1-0)=+\infty$

O gráfico de f não tem assíntota horizontal.

O gráfico de f tem uma assíntota paralela ao eixo *Oy* de equação $x=0$ e não tem assíntotas paralelas ao eixo *Ox*.

7.1. f é contínua em $x=1$, se $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{e^{x-1}-1}{x^2+2x-3}+k\right)\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\left(e^{x-1}-1\right)'}{\left(x^2+2x-3\right)'}+k=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)'e^{x-1}}{2x+2}+k=$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{e^{x-1}}{2x+2}+k=\frac{e^0}{2+2}+k=\frac{1}{4}+k$

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2(3-2\ln x)\right)=1^2(3-2\ln x)=$

$=1(3-0)=3=f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=f(1)\Leftrightarrow\frac{1}{4}+k=3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=3-\frac{1}{4}\Leftrightarrow k=\frac{11}{4}$

7.2. Se $x\in\left]0,1\right]$: $f'(x)=\left[x^2(3-2\ln x)\right]'=$

$=\left(x^2\right)'(3-2\ln x)+x^2(3-2\ln x)'=$

$=2x(3-2\ln x)+x^2\left(-2\times\frac{1}{x}\right)=2x(3-2\ln x)-2x=$

$=2x(3-2\ln x-1)=2x(2-2\ln x)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x(2-2\ln x)=0\wedge x\in\left]0,1\right]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(2x=0\vee 2-2\ln x=0)\wedge x\in\left]0,1\right]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x=0\vee\ln x=1)\wedge x\in\left]0,1\right]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x=0\vee x=e)\wedge x\in\left]0,1\right]$

f' não tem zeros em $\left]0,1\right]$.

$f'(x)>0,\ \forall x\in\left]0,1\right]$

Logo, a função f é estritamente crescente em $\left]0,1\right]$.

$f(1)=1^2(3-2\ln 1)=1\times 3=3$

No intervalo $\left]0,1\right]$, f tem um máximo relativo igual a 3 para $x=1$.

8. $f(x)=x^2\ln x$, $D_f=\mathbb{R}^+$

$f'(x)=\left(x^2\ln x\right)'=\left(x^2\right)'\ln x+x^2(\ln x)'=$

$=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}=2x\ln x+x$

$f''(x)=(2x\ln x+x)'=(2x)'\ln x+2x(\ln x)'+1=$

$=2\ln x+2\cancel{x}\times\frac{1}{\cancel{x}}+1=2\ln x+3$

$f''(x)=0\Leftrightarrow 2\ln x+3=0\Leftrightarrow \ln x=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}$

$f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)=\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)^2\ln e^{-\frac{3}{2}}=e^{-3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}e^{-3}$

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$
f''		$-$	0	$+$
f		∩	$-\frac{3}{2}e^{-3}$	∪

P.I.

O ponto de coordenadas $\left(e^{-\frac{3}{2}},-\frac{3}{2}e^{-3}\right)$ é o ponto de inflexão.

Seja $r: y=mx+b$ a equação da reta tangente ao gráfico de *f* no seu ponto de inflexão.

$m=f'\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)=2e^{-\frac{3}{2}}\times\ln e^{-\frac{3}{2}}+e^{-\frac{3}{2}}=$

$=\cancel{2}e^{-\frac{3}{2}}\times\left(-\frac{3}{\cancel{2}}\right)+e^{-\frac{3}{2}}=-3e^{-\frac{3}{2}}+e^{-\frac{3}{2}}=-2e^{-\frac{3}{2}}$

$r: y-\left(-\frac{3}{2}e^{-3}\right)=-2e^{-\frac{3}{2}}\left(x-e^{-\frac{3}{2}}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y+\frac{3}{2}e^{-3}=-2e^{-\frac{3}{2}}x+2e^{-3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-2e^{-\frac{3}{2}}x+2e^{-3}-\frac{3}{2}e^{-3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-2e^{-\frac{3}{2}}x+\frac{e^{-3}}{2}$

9.1. $T(0,5)=12\Leftrightarrow 6\left(4-3e^{-0,5k}\right)=12\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4-3e^{-0,5k}=2\Leftrightarrow 3e^{-0,5k}=2\Leftrightarrow e^{-0,5k}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0,5k=\ln\left(\frac{2}{3}\right)\Leftrightarrow k=\frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{-0,5}\Leftrightarrow k\approx 0,811$

$k\approx 0,811$ e $T(t)=6\left(4-3e^{-0,811t}\right)$

9.2. $T(t)=6\left(4-3e^{-0,8t}\right)$

$T'(t)=\left[6\left(4-3e^{-0,8t}\right)\right]'=6\left(0-3\times(-0,8t)'e^{-0,8t}\right)=$

$=6\times 2,4e^{-0,8t}=14,4e^{-0,8t}$

$T'(1)=14,4e^{-0,8t}\approx 6,5$

Significa que, uma hora após o jarro ser tirado do frigorífico, a temperatura da limonada está a aumentar cerca de $6,5$ °C/h.

9.3. $\lim\limits_{t\to+\infty}T(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[6\left(4-3e^{-kt}\right)\right]=6\left(4-3e^{-\infty}\right)=$

$=6\times(4-0)=24$

$\lim\limits_{t\to+\infty}T(t)=24$

Significa que, com o decorrer do tempo, a temperatura da limonada tende a estabilizar nos 24 °C/h, ou seja, a temperatura ambiente é 24 °C/h.

Pág. 137

Avaliação formativa 7

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log\left(x^2+1\right)}{x}\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left[\log\left(x^2+1\right)\right]'}{(x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)\ln 10}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{\left(x^2+1\right)\ln 10}=$

$\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{\left[\left(x^2+1\right)\ln 10\right]'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{2x\ln 10}=\frac{2}{+\infty}=0$

2. $f(x)=e^{-x^2}$

Seja *a* a função que representa a área do retângulo $[OPQR]$ em função da abcissa x de *Q* $(x>0)$.

$A_{[OPQR]}=\overline{OP}\times\overline{OR}$

$\overline{OP}=x$; $\overline{OR}=f(x)=e^{-x^2}$

Então, $a(x)=xe^{-x^2}$.

$f'(x)=\left(xe^{-x^2}\right)'=(x)'e^{-x^2}+x\left(e^{-x^2}\right)'=$

$=e^{-x^2}+x\times\left(-x^2\right)e^{-x^2}=e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$

$f(x)=0\Leftrightarrow e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underset{\text{equação impossível}}{e^{-x^2}=0}\vee 1-2x^2=0\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Como $x>0$, $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

x	0		$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
a'	N.D.	$+$	0	$-$
a	N.D.	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}$	↘

Máx.

$a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}$

Logo, a área máxima do quadrado é $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}$ quando $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{2x\,e^{x}} & \text{se } x<0\\ \frac{1}{2} & \text{se } x=0\\ \frac{x\ln(x+1)}{e^{x}+e^{-x}-2} & \text{se } x>0\end{cases}$$

$D_f=\mathbb{R}$

f é contínua em $x=0$ se

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin x}{2xe^{x}}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}\times\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{2e^{x}}=$

$=1\times\frac{1}{2\times1}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\ln(x+1)}{e^{x}+e^{-x}-2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\left[x\ln(x+1)\right]'}{\left(e^{x}+e^{-x}-2\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{(x)'\ln(x+1)+x\left[\ln(x+1)\right]'}{e^{x}+(-x)'e^{-x}-0}=$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)+x\times\frac{(x+1)'}{x+1}}{e^{x}-e^{-x}}=$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}{e^{x}-e^{-x}}=$

$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\left[\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}\right]'}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{(x+1)'}{x+1}-\frac{(x)'\times(x+1)-x(x+1)'}{(x+1)^2}}{e^{x}-(-x)'e^{-x}}=$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{x+1-1}{(x+1)^2}}{e^{x}+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{x+1-1}{(x+1)^2}}{e^{x}+e^{-x}}=$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{(x+1)^2\left(e^{x}+e^{-x}\right)}=\frac{0}{1\times2}=0$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$

Logo, f é descontínua em $x=0$.

4.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+kx}{x-1} & \text{se } x<1\\ \frac{2x^2+\ln(x-1)}{x} & \text{se } x>1\end{cases},(k\in\mathbb{R})$$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

I. $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+kx}{x(x-1)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}(x+k)}{\cancel{x}(x-1)}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+k}{x-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x+k)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1}=1$

Então, I – b).

II. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]=2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+kx}{x-1}-x\right)=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+kx-x^2+x}{x-1}\right)=2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{kx+x}{x-1}\right)=2\Leftrightarrow$

$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{RL'H}}{\Leftrightarrow}}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(kx+x)'}{(x-1)'}=2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{k+1}{1}=2\Leftrightarrow k+1=2\Leftrightarrow k=1$

Então, II – b).

III. Assíntotas verticais:

f é contínua para $x>1$. Logo, só poderá existir assíntota vertical em $x=1$.

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{2x^2+\ln(x-1)}{(x-1)'}=\frac{2-\infty}{1}=-\infty$

A reta de equação $x=1$ é assíntota ao gráfico de f.

Assíntota horizontal:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+\ln(x-1)}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left[2x^2+\ln(x-1)\right]'}{(x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x+\frac{(x+1)'}{x-1}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x-\frac{1}{x-1}\right)=+\infty+0=+\infty$

O gráfico da função f não tem assíntota horizontal quando $x\to+\infty$.

Então, III – c).

I – b), II – b), III – c)

Pág. 138

Tarefa 14

1. Não

2. A equação dada tem solução porque o primeiro membro é um polinómio de grau ímpar.

3.1. $f(1)=1^3-1-1=-1$

$f(2)=2^3-2-1=5$

$f(1)=-1$ e $f(2)=5$. Como f é contínua em $[1,2]$ e $f(1)<0<f(2)$, a equação tem, pelo menos, uma solução em $]1,2[$.

3.2. $f(1{,}5)=(1{,}5)^3-1{,}5-1=0{,}875$

$f(1{,}5)=0{,}875>0$. Como f é contínua em $[1;1{,}5]$ e $f(1)<0<f(1{,}5)$, a equação tem, pelo menos, uma solução em $[1;1{,}5]$.

Pág. 139

Questão 118

$\underbrace{x-\cos(x)}_{f(x)}=0\ ;\ ]0,\pi[$

• f é contínua em $[0,\pi]$ por ser definida pela diferença de duas funções contínuas, uma polinomial e outra trigonométrica.

• $f(0)=0-\cos(0)=-1<0$

• $f(\pi)=\pi-\cos(\pi)=\pi-(-1)=\pi+1>0$

• Como f é contínua em $[0,\pi]$ e $f(0)<0<f(\pi)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $f(x)=0$, isto é, a equação $x-\cos x=0$ tem, pelo menos, uma solução em $]0,\pi[$.

Questão 119

$f(x)=\log(x)+x^2$ em $\left]\frac{1}{2},1\right[$

Pretendemos mostrar que a equação $f(x)=0$ tem, pelo menos, uma solução em $\left]\frac{1}{2},1\right[$.

• f é contínua em $\left[\frac{1}{2},1\right]$ por ser definida pela soma de duas funções contínuas, uma logarítmica e outra polinomial.

• $f\left(\frac{1}{2}\right)=\log\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\log 2^{-1}+\frac{1}{4}=$

$=-\log 2+\frac{1}{4}\approx -0{,}05<0$

• $f(1)=\log(1)+1^2=0+1=1>0$

• Como f é contínua em $\left[\frac{1}{2},1\right]$ e $f\left(\frac{1}{2}\right)<0<f(1)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $f(x)=0$, tem pelo menos, uma solução em $\left]\frac{1}{2},1\right[$, isto é, a função f interseta o eixo Ox em, pelo menos, um ponto em $\left]\frac{1}{2},1\right[$.

Pág. 140

Questão 120

$f(x)=\sqrt[3]{x+1}+x^2+x+2$ em $[1,2]$

Seja g a função que dá a área do triângulo $[OAB]$.

$A(a,0);B(a,f(a));a\in[1,2]$

$g(a)=\frac{\overline{OA}\times\overline{AB}}{2}\Leftrightarrow g(a)=\frac{a\times f(a)}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(a)=\frac{a}{2}\left(\sqrt[3]{a+1}+a^2+a+2\right)$

Pretendemos mostrar que a equação $g(a)=4$ tem, pelo menos, uma solução em $]1,2[$.

• g é contínua em $]1,2[$ porque resulta de operações entre funções contínuas nesse intervalo.

• $g(1)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{1+1}+1^2+1+2\right)\approx 2{,}63$

• $g(2)=\frac{2}{2}\left(\sqrt[3]{2+1}+2^2+2+2\right)\approx 9{,}44$

• Como g é contínua em $[1,2]$ e $g(1)<4<g(2)$, então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $g(a)=4$ tem pelo menos, uma solução em $]1,2[$, ou seja, existe um ponto A de abcissa pertence a $]1,2[$ tal que a área do triângulo $[OAB]$ é 4 u.a.

Pág. 141

Questão 121

$e^{-x}=x-1\ ;\ x\in]1,2[$

$e^{-x}=x-1\Leftrightarrow \underbrace{e^{-x}-x+1}_{f(x)}=0$ em $]1,2[$

• f é contínua em $[1,2]$ porque resulta de operações entre funções contínuas nesse intervalo.

• $f(1)=e^{-1}-1+1\approx 0{,}37$

• $f(2)=e^{-2}-2+1\approx -0{,}86$

Como f é contínua em $[1,2]$ e $f(2)<0<f(1)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a

equação $f(x)=0$, ou seja, $e^{-x}=x-1$ tem, pelo menos, uma solução em $]2,3[$.

Questão 122

$h_A(x)=50\left(1-e^{-0,2x}\right)$; $h_B(x)=8x$

Pretendemos resolver a equação $h_A(x)=h_B(x)$ em $]2,4[$

$h_A(x)=h_B(x)\Leftrightarrow 50\left(1-e^{-0,2x}\right)=8x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{50\left(1-e^{-0,2x}\right)-8x}_{f(x)}=0$

- f é contínua em $[2,4]$ porque resulta de operações entre funções contínuas nesse intervalo.
- $f(2)=50\left(1-e^{-0,2\times 2}\right)-8\times 2\approx 0,48$
- $f(4)=50\left(1-e^{-0,2\times 4}\right)-8\times 4\approx -4,47$
- Como f é contínua em $[2,4]$ e $f(4)<0<f(2)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $f(x)=0$, ou seja, $h_A(x)=h_B(x)$ tem, pelo menos, uma solução em $[2,4]$, pelo que existe um instante nesse intervalo em que os dois *drones* estiveram à mesma altura.

Pág. 142

Tarefa 15

1. $f(x)=0\Leftrightarrow x\cos x+1=0$, em $[0,4]$

- f é contínua em em $[0,4]$ porque resulta de operações entre funções contínuas nesse intervalo.
- $f(0)=0\cos(0)+1=1$
- $f(4)=4\cos(4)+1=-1,61$
- Como f é contínua em $[0,4]$ e $f(4)<0<f(0)$, então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $f(x)=0$, tem, pelo menos, uma solução em $]0,4[$.

2.1. **a)** $m_1=\dfrac{0+4}{2}=2$

b) $f(2)=2\cos(2)+1\approx 0,17>0$; Positivo

c) Como $f(2)>0$, há mudança de sinal de f em $]2,4[$.

2.2. **a)** $m_2=\dfrac{2+4}{2}=3$

b) $f(3)=4\cos(3)+1\approx -2,96<0$

Negativo

c) Como $f(3)<0$, há mudança de sinal de f em $]2,3[$.

2.3. **a)** Porque tem a menor das amplitudes dos intervalos considerados e garante a existência de solução da equação.

b) Seja m o ponto médio do intervalo $[2,3]$.

$m=\dfrac{2+3}{2}=2,5$; $x\approx 2,5$

Pág. 143

Questão 123

$1-x\tan(x)=0$, em $[0,1]$

Seja $f(x)=1-x\tan(x)$.

Pretendemos determinar uma solução aproximada da equação em $f(x)=0$, em $[0,1]$.

- f é contínua em $[0,1]$, porque resulta de operações entre funções contínuas nesse intervalo.
- $f(0)=1-0\tan(0)=1>0$
- $f(1)=1-1\tan(1)\approx -0,56<0$
- Como f é contínua em $[0,1]$ e $f(1)<0<f(0)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $f(x)=0$ tem, pelo menos, uma solução em $]0,1[$.

1.ª interação:

$m=\dfrac{0+1}{2}=\dfrac{1}{2}$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1-\dfrac{1}{2}\tan\left(\dfrac{1}{2}\right)\approx 0,73>0$

Novo intervalo: $I_1=\left[\dfrac{1}{2},1\right]$

2.ª interação:

$m=\dfrac{\frac{1}{2}+1}{2}=\dfrac{3}{4}=0,75$

$f(0,75)=1-0,75\tan(0,75)\approx 0,30>0$

Novo intervalo: $I_2=[0,75;1]$

3.ª interação:

$m=\dfrac{0,75+1}{2}=0,875$

$x\approx 0,875$

Pág. 144

Questão 124

f(x)=	x^3-3x^2+1		Intervalo inicial [a, b]		a=	2	b=	3
Iteração	Intervalo inicial				Ponto médio		Novo intervalo	
	a	b	f(a)	f(b)	m	f(m)	a ou m	m ou b
1	2	3	-7	8	2,5	-1,375	2,5	3
2	2,5	3	-1,375	8	2,75	2,796875	2,5	2,75
3	2,5	2,75	-1,375	2,796875	2,625	0,587891	2,5	2,625
4	2,5	2,625	-1,375	0,587891	2,5625	-0,42358	2,5625	2,625
5	2,5625	2,625	-0,42358	0,587891	2,59375	0,074554	2,5625	2,59375
6	2,5625	2,59375	-0,42358	0,074554	2,578125	-0,1764	2,578125	2,59375
7	2,578125	2,59375	-0,1764	0,074554	2,585938	-0,0514	2,585938	2,59375
8	2,585938	2,59375	-0,0514	0,074554	2,589844	0,01146	2,585938	2,589844
9	2,585938	2,589844	-0,0514	0,01146	2,587891	-0,02	2,587891	2,589844
10	2,587891	2,589844	-0,02	0,01146	2,588867	-0,00428	2,588867	2,589844

$x\approx 2,588867$

Pág. 145

Questão 125

$\ln(x) = \frac{1}{x}$, em $[1, 2]$; $\ln(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{x} = 0$

Seja $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$.

Pretendemos determinar uma solução aproximada da equação $f(x) = 0$, em $[1, 2]$.

• f é contínua em $[1, 2]$ porque resulta de operações entre funções contínuas nesse intervalo.

• $f(1) = \ln 1 - \frac{1}{1} = -1 < 0$

• $f(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0{,}19 > 0$

• Como f é contínua em $[1,2]$ e $f(1) < 0 < f(2)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $f(x) = 0$ tem, pelo menos, uma solução em $]1, 2[$.

Vamos determinar uma aproximação da solução da equação utilizando o método da bisseção considerando com critério de paragem que a amplitude do intervalo seja inferior a $10^{-1} = 0{,}1$.

Iteração	Intervalo	m	Amplitude do intervalo	$f(m)$
1	$I_0 = [1, 2]$	$\frac{1+2}{2} = 1{,}5$	$2 - 1 = 1 > 0{,}1$	$f(1{,}5) \approx -0{,}26 < 0$
2	$I_1 = [1{,}5; 2]$	$\frac{1{,}5+2}{2} = 1{,}75$	$2 - 1{,}5 = 0{,}5 > 0{,}1$	$f(1{,}75) \approx -0{,}01 < 0$
3	$I_2 = [1{,}75; 2]$	$\frac{1{,}75+2}{2} = 1{,}875$	$2 - 1{,}75 = 0{,}25 > 0{,}1$	$f(1{,}875) \approx 0{,}095 > 0$
4	$I_3 = [1{,}75; 1{,}875]$	$\frac{1{,}75+1{,}875}{2} = 1{,}8125$	$1{,}875 - 1{,}75 = 0{,}125 > 0{,}1$	$f(1{,}8125) \approx 0{,}043 > 0$
5	$I_4 = [1{,}75; 1{,}8123]$	$\frac{1{,}75+1{,}8125}{2} = 1{,}78125$	$1{,}8125 - 1{,}75 = 0{,}0625 > 0{,}1$	

O método termina ao final da 4.ª iteração porque a amplitude do intervalo obtido é inferior ao definido como critério de paragem.

Solução aproximada: $x \approx 1{,}78125$

Pág. 146

Questão 126

$f(x) = 0$ intervalo inicial: $[-2, 8]$

Amplitude do intervalo inicial: $b - a = 8 - (-2) = 10$

Amplitude do intervalo obtido ao final de 5 iterações do método:

$\frac{b-a}{2^5} = \frac{10}{2^5} = \frac{10}{32} = 0{,}3125$

Pág. 147

Questão 127

$f(x) = 0$ intervalo inicial: $[0, 5]$

• Amplitude do intervalo inicial: $5 - 0 = 5$

• Quer-se determinar n tal que $\frac{5-0}{2^n} < 10^{-3}$.

$\frac{5}{2^n} < 0{,}001 \Leftrightarrow 2^n > \frac{5}{0{,}001} \Leftrightarrow 2^n > 5000$

$2^1 = 2, \ldots, 2^{10} = 1024, \ldots, 2^{12} = 4096, 2^{13} = 8190$

Logo, são necessárias pelo menos 13 iterações.

Questão 128

$3^x = 5\sqrt{2x}$, em $[2;2{,}5]$

$3^x = 5\sqrt{2x} \Leftrightarrow \underbrace{3^x - 5\sqrt{2x}}_{f(x)} = 0$

Pretendemos determinar uma solução aproximada da equação $f(x) = 0$ em $[2; 2{,}5]$.

f é contínua em $[2; 2{,}5]$ porque resulta de operações entre funções contínuas nesse intervalo.

$f(2) = 3^2 - 5\sqrt{2 \times 2} = -1 < 0$

$f(2{,}5) = 3^{2{,}5} - 5\sqrt{2 \times 2{,}5} \approx 4{,}41 > 0$

Como f é contínua em $[2;2{,}5]$ e $f(2) < 0 < f(2{,}5)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $f(x) = 0$, tem, pelo menos, uma solução em $]2; 2{,}5[$.

Vamos determinar uma aproximação da solução da equação utilizando o método da bisseção com um erro máximo absoluto de $5 \times 10^{-2} = 0{,}05$.

$\frac{2{,}5-2}{2^n} < 5 \times 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{0{,}5}{2^n} < 5 \times 10^{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^n > \frac{0{,}5}{5 \times 10^{-2}} \Leftrightarrow 2^n > \frac{\cancel{5}}{\cancel{5} \times 10^{-2}} \Leftrightarrow 2^n > \frac{1}{10^{-1}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^n > 10$

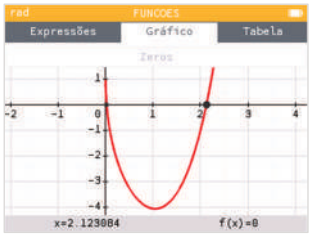
$2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8$ e $2^4 = 16$

Logo, são necessárias pelo menos quatro iterações.

It.	Intervalo	m	Erro inferior a…	$f(m)$
1	$I_0 = [2; 2{,}5]$	$\frac{2+2{,}5}{2} = 2{,}25$	$\frac{2{,}5-2}{2} = 0{,}25 > 0{,}05$	$f(2{,}25) \approx 1{,}24 > 0$
2	$I_1 = [2; 2{,}25]$	$\frac{2+2{,}25}{2} = 2{,}125$	$\frac{2{,}25-2}{2} = 0{,}125 > 0{,}05$	$f(2{,}125) \approx 0{,}02 > 0$
3	$I_2 = [2; 2{,}125]$	$\frac{2+2{,}125}{2} = 2{,}0625$	$\frac{2{,}125-2}{2} = 0{,}0625 > 0{,}05$	$f(2{,}0625) \approx -0{,}52 < 0$
4	$I_3 = [2{,}0625 ; 2{,}125]$	$\frac{2{,}0625+2{,}125}{2} = 2{,}09375$	$\frac{2{,}125-2{,}0625}{2} = 0{,}03125 < 0{,}05$	

Solução aproximada com erro máximo absoluto de 5×10^{-2}:

$$x \approx \frac{2{,}0625 + 2{,}125}{2} = 2{,}093\,75$$



Aproximação recorrendo à calculadora:

$x \approx 2{,}123\,084$

$|2{,}093\,75 - 2{,}123\,084| \approx 0{,}029 < 0{,}05$

Pág. 148

Tarefa 16

1. Como a função *f* é polinomial, é diferenciável.

2. É traçada uma reta tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abcissa x_0 e encontrado x_1 que é a abcissa do ponto de interseção dessa reta tangente com o eixo Ox.

3. O processo anterior repete-se para uma reta tangente e a nova abcissa do ponto de interseção, x_2.

4. Parece convergir para a raiz. A distância diminui rapidamente.

5. Sim.

6. A reta tangente é horizontal pelo que não interceta o eixo Ox, terminando o processo, ou seja, para este valor de x_0, a sucessão de aproximações não converge para nenhuma raiz da função *f*.

7. Por exemplo: o método pode convergir, mas depende do valor inicial;
se em algum momento a reta for horizontal, o método termina.

Pág. 150

Questão 129

129.1. a)

$$f'(x) = \left[\ln(x) + x - 2\right]' = \frac{1}{x} + 1$$

$x_0 = 1$

Iteração 1:

$f(1) = \ln(1) + 1 - 2 = 0 + 1 - 2 = -1$

$f'(1) = \frac{1}{1} + 1 = 2$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{-1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Iteração 2:

$f(1{,}5) = \ln(1{,}5) + 1{,}5 - 2 \approx -0{,}094\,535$

$f'(1{,}5) = \frac{1}{1{,}5} + 1 \approx 1{,}666\,667$

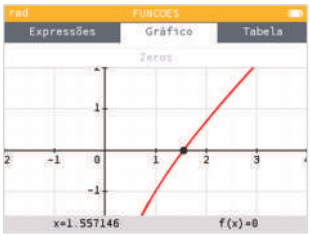
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}5 - \frac{f(1{,}5)}{f'(1{,}5)} = 1{,}5 - \frac{-0{,}094\,535}{1{,}666\,667} =$$

$\approx 1{,}556\,721$; $x_2 \approx 1{,}556\,721$

b)

f(x)=	ln(x)+x-2	f'(x)=	1/x+1	x_0=	1
Iteração	x_n	f(x_n)	f'(x_n)	x_n+1	
1	1	-1	2	1,5	
2	1,5	-0,09453489	1,666667	1,5567209	
3	1,556720935	-0,00069742	1,642376	1,5571456	
4	1,557145576	-3,7198E-08	1,642201	1,5571456	
5	1,557145599	0	1,642201	1,5571456	
6	1,557145599	0	1,642201	1,5571456	
7	1,557145599	0	1,642201	1,5571456	
8	1,557145599	0	1,642201	1,5571456	

129.2.



$x \approx 1{,}557\,146$

Com 6 casas decimais, o valor obtido coincide com o obtido com 8 iterações.

Pág. 151

Questão 130

$x_3 = 2{,}3146$; $x_4 = 2{,}3142$; $x_5 = 2{,}3141$

$|x_4 - x_3| = |2{,}3142 - 2{,}3146| = 0{,}0004 = 4\times10^{-4} < 10^{-3}$

$|x_5 - x_4| = |2{,}3141 - 2{,}3142| = 0{,}0001 = 10^{-4} < 10^{-3}$

Sim, poderia ser interrompido na iteração 5, com a obtenção de $x_5 = 2{,}3141$, mas como $|x_4 - x_3| < 10^{-3}$ e apenas se pretende um erro absoluto inferior a 10^{-3}, o processo também poderia ser interrompido na iteração 4, com a obtenção de $x_4 = 2{,}3142$.

Pág. 152

Tarefas de consolidação 8

1.1. $f(x) = -e^{-(-1)} = -e \approx -2{,}72 < 0$

$$f(2) = \frac{\sin(2-1)}{2\times2-2} = \frac{\sin(1)}{2} \approx 0{,}42 > 0$$

Logo, $f(-1)\times f(2) < 0$

1.2. Comecemos por estudar a continuidade de função *f* no intervalo $[-1,2]$. No intervalo $[-1,1[$ a função *f* é contínua porque está definida pela função exponencial.

No intervalo $]1,2]$ a função *f* é contínua porque resulta de operações entre funções contínuas.
Estudemos a continuidade no ponto $x=1$.
Para a função *f* ser contínua, em $x=1$,

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(x)$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \left(-e^{-x}\right) = -e^{-1} = -\dfrac{1}{e}$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{\sin(x-1)}{2x-2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{RL'H}}{=}} \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{[\sin(x-1)]'}{(2x-2)'} =$

$= \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{(x-1)'\cos(x-1)}{2} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{\cos(x-1)}{2} = \dfrac{\cos 0}{2} = \dfrac{1}{2}$

Como $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to1^+} f(x)$, a função *f* não é contínua em $x=1$, logo a função não é contínua no intervalo $[-1,2]$ e, por isso, não é possível aplicar o teorema de Bolzano-Cauchy nesse intervalo.

2. $T_1(x) = 5+4\ln(x+1)$

$T_2(x) = 2x$

- $T_1(x) = T_2(x) \Leftrightarrow 5+4\ln(x+1) = 2x$ em $]6,7[$

$\Leftrightarrow 5+4\ln(x+1)-2x = 0$

- *f* é contínua em $[6,7]$ porque resulta de operações entre funções contínuas nesse intervalo.

$f(6) = 5+4\ln(6+1)-2\times6 \approx 0{,}78 > 0$

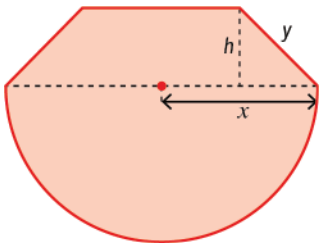
$f(7) = 5+4\ln(7+1)-2\times7 \approx -0{,}68 < 0$

Como a função *f* é contínua em $[6,7]$ e $f(7) < 0 < f(6)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $f(x) = 0$, ou seja, $T_1(x) = T_2(x)$ tem, pelo menos, uma solução em $]6,7[$.

Existe um número de veículos entre 600 e 700 para o qual os tempos da manhã e da tarde são iguais.

3.1. $y^2 = h^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \underset{(y>0)}{\Leftrightarrow} y = \sqrt{h^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$

$P(x) = \dfrac{2\pi x}{2} + x + 2y \Leftrightarrow P(x) = \pi x + x + 2\sqrt{h^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$



3.2. Área total = área do semicírculo + área do trapézio

$A_{\text{Total}} = 30 \Leftrightarrow \dfrac{\pi r^2}{2} + \dfrac{B+b}{2}\times h = 30 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi x^2}{2} + \dfrac{2x+x}{2}\times h = 30 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi x^2}{2} + \dfrac{3x}{2}\times h = 30 \Leftrightarrow \pi x^2 + 3xh = 60 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3xh = 60 - \pi x^2 \Leftrightarrow h = \dfrac{60-\pi x^2}{3x}$

$P(x) = \pi x + x + 2\sqrt{\left(\dfrac{60-\pi x^2}{3x}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$

$P(x) = 22$ em $]2,4[$

- *P* é contínua em $[2,4]$ porque resulta de operações entre funções contínuas nesse intervalo.
- $P(2) = \pi\times2+2+2\sqrt{\left(\dfrac{60-\pi\times2^2}{3\times2}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{2}\right)^2} \approx$

$\approx 24{,}22 > 22$

- $P(4) = \pi\times4+2+2\sqrt{\left(\dfrac{60-\pi\times4^2}{3\times4}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{2}\right)^2} \approx$

$\approx 20{,}88 < 22$

- Como *P* é contínua em $[2,4]$ e $P(4) < 22 < P(2)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $P(x) = 22$ tem pelo menos uma solução em $]2,4[$ isto é, existe, pelo menos, um valor de $c \in]2,4[$ tal que $P(c) = 22$.

Interpretação:
Existe um valor de raio x entre 2 e 4 cm tal que o perímetro da figura é exatamente 22 cm.

4. Após *k* iterações: intervalo $[a,8]$.

Seja l_k a amplitude do intervalo após *k* iterações.

$l_k = 8-a$

Seja l_{k+2} a amplitude do intervalo após $k+2$ iterações.
Como a cada iteração, o intervalo que contém a raiz é sucessivamente reduzido para metade,

$l_{k+2} = \dfrac{\frac{l_k}{2}}{2} \Leftrightarrow l_{k+2} = \dfrac{l_k}{4}$

Por outro lado, sabemos que $l_{k+2} = 8-5 = 3$.

Logo, $\dfrac{l_k}{4} = 3 \Leftrightarrow l_k = 12$.

Seja l_{k-1} a amplitude do intervalo após $k-1$ iterações.

$l_{k-1} = 2l_k \Leftrightarrow l_{k-1} = 2\times12 = 24$

O erro máximo absoluto cometido ao fim de $k-1$ iterações é metade da amplitude do intervalo, isto é, $\dfrac{24}{2} = 12$.

Erro máximo absoluto da aproximação de raiz ao final de $k-1$ iterações é 12.

Pág. 153

5.1. $x^2=2 \Leftrightarrow x=-\sqrt{2} \vee x=\sqrt{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \approx -1{,}414\,214 \vee x \approx 1{,}414\,214$

5.2. a) $x^2=2$ em $[0,2]$ 4 iterações

$x^2=2 \Leftrightarrow \underbrace{x^2-2}_{f(x)}=0$

• f é contínua em $[0,2]$ porque está definida por um polinómio.

• $f(0)=0^2-2=-2<0$

$f(2)=2^2-2=2>0$

• Como f é contínua em $[0,2]$ e $f(0)<0<f(2)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $f(x)=0$, tem, pelo menos, uma solução em $]0,2[$.

1.ª iteração:

$m=\frac{0+2}{2}=1$

$f(1)=1^2-2=-1<0$

Novo intervalo: $[1,2]$

2.ª iteração:

$m=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}=1{,}5$

$f(1{,}5)=1{,}5^2-2=-0{,}25<0$

Novo intervalo: $[1;1{,}5]$

3.ª iteração:

$m=\frac{1+1{,}5}{2}=1{,}25$

$f(1{,}25)=1{,}25^2-2\approx -0{,}44<0$

Novo intervalo: $[1{,}25;1{,}5]$

4.ª iteração:

$m=\frac{1{,}25+1{,}5}{2}=1{,}375$

$x\approx 1{,}375$

b) $x_0=1$ duas interações

$x^2=2 \Leftrightarrow \underbrace{x^2-2}_{f(x)}=0$

1.ª iteração:

$f(x)=x^2-2$

$f(x_0)=f(1)=1^2-2=-1$

$f'(x)=\left(x^2-2\right)'=2x$

$f'(x_0)=f'(1)=2\times 1=2$

$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=1-\frac{f(1)}{f'(1)}=1-\frac{-1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=1{,}5$

2.ª iteração:

$f(x_1)=f(1{,}5)=1{,}5^2-2=0{,}25$

$f'(x_1)=f'(1{,}5)=2\times 1{,}5=3$

$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=1{,}5-\frac{0{,}25}{3}\approx 1{,}416\,667$

A solução aproximada da equação é $1{,}416\,667$.

5.3. Apesar de se terem realizado menos iterações, a aproximação obtida pelo método de Newton-Raphson tem menor erro absoluto.

5.4. $f(x)=x^2-2$

$f'(x)=2x$

$f'(0)=2\times 0=0$

Como $f'(0)=0$, o método de Newton-Raphson não é aplicável.

6. Método da bisseção num intervalo inicial $[a,b]$.

6.1. Sabemos que $\frac{b-a}{2^5}<0{,}5$.

Pretendemos mostrar que $b-a<16$.

$\frac{b-a}{2^5}<0{,}5 \Leftrightarrow \frac{b-a}{32}<0{,}5 \Leftrightarrow b-a<0{,}5\times 32 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b-a<16$

6.2. Sabemos que $\frac{b-a}{2^n}<10^{-2}$

Pretendemos determinar o menor valor de n tal que $\frac{b-a}{2^n}<10^{-2}$.

$\frac{b-a}{2^n}<10^{-2} \Leftrightarrow \frac{16}{2^n}<0{,}01 \Leftrightarrow 16<0{,}01\times 2^n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^n>\frac{16}{0{,}01} \Leftrightarrow 2^n>1600$

$2^1=2,\ldots,2^{10}=1024,\ 2^{11}=2048$

Logo, $n=11$.

6.3. O método da bisseção permite garantir uma precisão mínima, mas não fornece o valor exato do erro real da aproximação.

7. $f'(x_2)=2$; $f(x_2)=2x_2+4$

$f(x_3)=-\frac{f'(x_3)}{2}=-1$; $f(x_3)=-1$

$-\frac{f'(x_3)}{2}=-1 \Leftrightarrow \frac{f'(x_3)}{2}=1 \Leftrightarrow f'(x_3)=2$

$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=x_2-\frac{2x_2+4}{2}=x^2-x^2-2=-2$

$x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}=-2-\frac{-1}{2}=-2+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}=-1{,}5$

8. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, contínua em $\mathbb{R}$. $D'_f=]0,1[$

Pretendemos mostrar que existe, pelo menos, um $c\in]0,1[: f(c)=c$

Consideremos $f(x)=x \Leftrightarrow \underbrace{f(x)-x}_{g(x)}=0$

Seja $g(x)=f(x)-x$

• f é contínua em $\mathbb{R}$, logo é contínua em $[0,1] \subset \mathbb{R}$

A função g é contínua em $[0,1]$ por ser a diferença de duas funções contínuas nesse intervalo.

• $g(0)=f(0)-0=f(0) \in]0,1[$

Logo, $g(0)>0$.

$g(1)=f(1)-1$; $g(1)<0$

C.A. $f(1) \in]0,1[$; $0<f(1)<1$

$0-1<f(1)-1<1-1$

$-1<f(1)-1<0$

$-1<g(1)<0$

• Como g é contínua em $[0,1]$ e $g(1)<0<g(0)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe pelo menos um $c \in]0,1[$ tal que $g(c)=0$, isto é, $f(c)-c=0$, ou seja, $f(c)=c$.

Pág. 155

Avaliação formativa 8

1. I-b); II-a); III-c)

2. $f(x)=2\sin(x-1)$; $f(x)=\frac{3}{2}=1,5$

$f(0)=2\sin(0-1) \approx -1,68$; $f(1)=2\sin(1-1)=0$

$f\left(\frac{3}{2}\right)=2\sin\left(\frac{3}{2}-1\right) \approx 0,96$

$f(2)=2\sin(2-1) \approx 1,68$; $f(3)=2\sin(3-1) \approx 1,82$

$f(5)=2\sin(5-1) \approx -1,51$

Opção (A): $f(0)<f(5)<\frac{3}{2}$ ×

Opção (B): $f(1)<\frac{3}{2}<f(3)$ √

Opção (C): $f(0)<f(5)<\frac{3}{2}$ ×

Opção (D): $f(0)<f(5)<\frac{3}{2}$ ×

Opção (B)

3. iteração p: $[-3,13]$

$\frac{-3+13}{2}=5$; $[5,13]$; $\frac{5+13}{2}=9$; $[5,9]$; $\frac{5+9}{2}=7$

Iteração 9: $[5,7]$

$9-p=3$

Opção (B)

4. $f(x)=x^3-x-1$; $f'(x)=3x^2-1$

$x_0=1$

$|f(x_n)<10^{-1}|$

$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=1-\frac{f(1)}{f'(1)}=1-\frac{-1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=1,5$

$|x_1-x_0|=\left|\frac{3}{2}-1\right|=\frac{1}{2}=0,5>10^{-1}$

$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=\frac{3}{2}-\frac{0,875}{5,75} \approx 1,347\,826$

$|x_2-x_1|=|1,347\,826-1,5|=0,152\,174>10^{-1}$

$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=1,347\,826-\frac{0,100\,682}{4,449\,905} \approx 1,325\,200$

$|x_3-x_2|=|1,325\,200-1,347\,826|=0,022\,626<10^{-1}$

C.A. $f(x)=x^3-x-1$; $f'(x)=3x^2-1$

$f(1)=1^3-1-1=-1$; $f'(1)=3\times 1^2-1=2$

$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^3-\frac{3}{2}-1=\frac{7}{8}=0,875$

$f'\left(\frac{3}{2}\right)=3\times\left(\frac{3}{2}\right)^2-1=\frac{23}{4}=5,75$

$f(1,347\,826) \approx 0,100\,682$

$f'(1,347\,826) \approx 4,449\,905$

5. f contínua em $[-2,2]$, $a \geq 0$

$f(-2)=\frac{a}{2}$; $f(2)=2a$

Justificar que o gráfico de f interseta a reta da equação $y=a$ é o mesmo que justificar que a equação $f(x)=a$ tem solução.

• $a=0$

$f(-2)=\frac{0}{2}=0$ e $f(2)=2\times 0=0$ e a equação $f(x)=0$ tem, pelo menos, duas soluções, -2 e 2.

• $a>0$

Como f é contínua em $[-2,2]$ e $f(-2)<a<f(2) \Leftrightarrow \frac{a}{2}<a<2a$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $f(x)=a$ tem, pelo menos, uma solução em $]-2,2[$, isto é, o gráfico de f interseta a reta $y=a$.

Tarefas complementares

Pág. 156

1.1. **a)** $x = 2$

b) $y = -1$

1.2. **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$

c) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = -\infty$

1.3. A reta de equação $x = 2$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*. Então, 2 é um zero do denominador de *f*.

$x = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0$

Logo, $b = -2$.

$f(1) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{a \times 1}{1-2} = 1 \Leftrightarrow a = -1$

Opção (D)

2.1. **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = (+\infty)^3 = +\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$

2.2. $h(x) = mx + b$ e $b = 2$

Então, $h(x) = mx + 2$ e $h(1) = 0$

$h(1) = 0 \Leftrightarrow m \times 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$

Logo, $h(x)) = -2x + 2$.

2.3. **a)** $\lim\limits_{x\to1}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to1} f(x) + \lim\limits_{x\to1} g(x)$

$= \dfrac{1}{1} + 1^3 = 1 + 1 = 2$

b) $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{g}{h}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to1^+} g(x)}{\lim\limits_{x\to1^+} h(x)} = \dfrac{1^3}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{g}{h}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to1^-} g(x)}{\lim\limits_{x\to1^-} h(x)} = \dfrac{1^3}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{g}{h}\right)(x) \neq \lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{g}{h}\right)(x)$.

Logo, não existe $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{g}{h}\right)(x)$.

c) $\lim\limits_{x\to2}(f \times h)(x) = \lim\limits_{x\to2} f(x) \times \lim\limits_{x\to2} h(x)$

$= \lim\limits_{x\to2} \dfrac{1}{x} \times \lim\limits_{x\to2}(-2x + 2)$

$= \dfrac{1}{2} \times (-2 \times 2 + 2) = \dfrac{1}{2} \times (-2) = -1$

d) $\lim\limits_{x\to0}(f+h)(x) = \lim\limits_{x\to0} f(x) + \lim\limits_{x\to0} h(x) =$

$= \lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x} + \lim\limits_{x\to0}(-2x + 2)$

$\lim\limits_{x\to0^+}(f+h)(x) = \dfrac{1}{0^+} \times (-2 \times 0 + 2) = +\infty \times 2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-}(f+h)(x) = \dfrac{1}{0^-} \times (-2 \times 0 + 2) = -\infty \times 2 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+}(f+h)(x) \neq \lim\limits_{x\to0^-}(f+h)(x)$

Logo, não existe $\lim\limits_{x\to0}(f+h)(x)$.

e) $\lim\limits_{x\to-1}(g-h)(x) = \lim\limits_{x\to-1} g(x) - \lim\limits_{x\to-1} h(x) =$

$= \lim\limits_{x\to-1} x^3 - \lim\limits_{x\to-1}(-2x + 2) =$

$= (-1)^3 - (-2(-1) + 2) = -1 - 4 = -5$

f) $\lim\limits_{x\to0}(g+h)(x) = \lim\limits_{x\to0} g(x) + \lim\limits_{x\to0} h(x) =$

$= \lim\limits_{x\to0} x^3 + \lim\limits_{x\to0}(-2x + 2) = 0^3 + (-2 \times 0 + 2) = 2$

Pág. 157

3.1. $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{se } x < 1 \\ 3 - x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$, em $x = 1$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}(1 + x) = 1 + 1 = 2$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}(3 - x) = 3 - 1 = 2$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 2$. Logo, o $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 2$.

$f(1) = 3 - 1 = 2$

Como $\lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1)$, a função *f* é contínua em $x = 1$.

3.2. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{x+1} & \text{se } x > 0 \\ x + 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$, em $x = 0$

$\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{x+1} = \dfrac{\sqrt{0}}{0+1} = \dfrac{0}{1} = 0$

$\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to0^-}(x + 1) = 0 + 1 = 1$

$\lim\limits_{x\to0^+} g(x) \neq \lim\limits_{x\to0^-} g(x)$. Logo, o $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 2$

Então, não existe $\lim\limits_{x\to0} g(x)$.

Logo, a função *g* é descontínua para $x = 0$.

3.3. $h(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$, em $x = 0$

$\lim\limits_{x\to0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to0^-}(x^2 + x) = 0^2 + 0 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x}}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x}{x^{\frac{1}{2}}}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x} = \sqrt{0^+} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 0$ Então, $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$.

$h(0) = 0^2 + 0 = 0$

Como o $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = h(0)$, a função *h* é contínua em $x = 0$.

4. $k \in \mathbb{R}^-$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} + 1 & \text{se} \quad x < k \\ x + 2 & \text{se} \quad x \geq k \end{cases}$$

f é contínua em $\mathbb{R}$. Então, *f* é contínua para $x = k$.

$\lim\limits_{x\to k^-} f(x) = \lim\limits_{x\to k^-}\left(\dfrac{2}{x} + 1\right) = \dfrac{2}{k} + 1$

$\lim\limits_{x\to k^+} f(x) = \lim\limits_{x\to k^+}(x + 2) = k + 2$

$f(k) = k + 2$

f é contínua para $x = k \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to k^-} f(x) = \lim\limits_{x\to k^+} f(x) = f(k)$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{k} + 1 = k + 2 \Leftrightarrow \dfrac{2}{k} - k - 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2 - k^2 - k}{k} = 0$

$\Leftrightarrow -k^2 - k + 2 = 0 \wedge k \neq 0$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-1)\times 2}}{2(-1)} \Leftrightarrow k = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{-2}$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{1-3}{-2} \vee k = \dfrac{1+3}{-2} \Leftrightarrow k = 1 \vee k = -2$

Como $k \in \mathbb{R}^-$, $k = -2$.

5.1. $f(x) = x + x\sin x$; $D_f = \mathbb{R}$

A função *f* é definida pelo produto e soma de funções contínuas em $\mathbb{R}$.
Logo, *f* é contínua em $\mathbb{R}$.

5.2. $g(x) = \dfrac{1 - \sin x}{2 + \cos x}$; $D_g = \mathbb{R}$

A função *g* é definida pelo quociente entre duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ (ambas definidas pela soma de funções contínuas em $\mathbb{R}$). Logo, f é contínua em $\mathbb{R}$.

5.3. $h(x) = \begin{cases} 1 + \cos x & \text{se} \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2 + 2}{x + 1} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$, $D_h = \mathbb{R}$

Em $]-\infty, 0[$, a função *h* é contínua por ser definida pela soma de funções contínuas nesse intervalo.
Em $]0, +\infty[$, a função *h* é contínua por ser definida por uma função racional, cujo denominador não se anula nesse intervalo.
No ponto $x = 0$:

$\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(1 + \cos x) = 1 + \cos 0 = 1 + 1 = 2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2 + 2}{x + 1} = \dfrac{0^2 + 2}{0 + 1} = \dfrac{2}{1} = 2$

$h(0) = \dfrac{0^2 + 2}{0 + 1} = \dfrac{2}{1} = 2$

$\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = h(0)$

Então, *h* é contínua para $x = 0$
Logo, a função *h* é contínua em $\mathbb{R}$.

5.4. $i(x) = \begin{cases} x\sin x & \text{se} \quad x \geq \pi \\ \sin x - \cos x & \text{se} \quad x < \pi \end{cases}$; $D_i = \mathbb{R}$

Em $]\pi, +\infty[$, a função *i* é contínua por ser definida pelo produto de funções contínuas nesse intervalo.
Em $]-\infty, \pi[$, a função *i* é contínua por ser definida pela diferença de funções contínuas nesse intervalo.
No ponto $x = \pi$:

$\lim\limits_{x\to \pi^-} i(x) = \lim\limits_{x\to \pi^-}(\sin x - \cos x) = \sin\pi - \cos\pi = 0 - (-1) = 1$

$\lim\limits_{x\to \pi^+} i(x) = \lim\limits_{x\to \pi^+}(x\sin x) = \pi\sin\pi = \pi\times 0 = 0$

$\lim\limits_{x\to \pi^-} i(x) \neq \lim\limits_{x\to \pi^+} i(x)$. Então, não existe $\lim\limits_{x\to \pi} i(x)$, pelo que, *i* é descontínua para $x = \pi$.
Logo, a função *i* é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{\pi\}$.

6.1. $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) + \lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$

$= 3 + 0 = 3$

$\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) + \lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$

$= 3 + 0 = 3$

$h(2) = (f+g)(2) = f(2) + g(2) = 2 + 1 = 3$

$\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = h(2)$

Logo, a função $h = f + g$ é contínua para $x = 2$.

6.2. Por exemplo,

$$i(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \neq 2 \\ -1 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

Confirmação:

$\lim\limits_{x\to 2^-} j(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(f - i)(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) - \lim\limits_{x\to 2^-} i(x)$

$= 3 - 0 = 3$

$\lim\limits_{x\to 2^+} j(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(f - i)(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) - \lim\limits_{x\to 2^+} i(x)$

$= 3 - 0 = 3$

$j(2) = (f - i)(2) = f(2) - i(2) = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$

$\lim\limits_{x\to 2^-} j(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} j(x) = j(2)$

Logo, a função $j = f - i$ é contínua para $x = 2$.

Pág. 158

7. $x = f(p) = 2000 - 100p$

$R(x) = 30x - \dfrac{1}{100}x^2$; $C(x) = 10x + 20000$

$$L(x)=(R-C)(x)=R(x)-C(x)$$
$$=30x-\frac{1}{100}x^2-(10x+20\,000)$$
$$=30x-\frac{1}{100}x^2-10x-20\,000$$
$$=20x-\frac{1}{100}x^2-20\,000$$
$$L(p)=(L\circ f)(p)=L(f(p))=L(2000-100p)$$
$$=20(2000-100p)-\frac{1}{100}(2000-100p)^2-20\,000$$
$$=40000-2000p-$$
$$-\frac{1}{100}\left(4\,000\,000-400\,000p+10\,000p^2\right)-20\,000$$
$$=20\,000-2000p-40\,000+4000p-100p^2$$
$$=-100p^2+2000p-20\,000$$
$$L(p)=-100p^2+2000p-20\,000$$

Pág. 159

8.1. a) $D_{f\circ g}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in D_g\wedge g(x)\in D_f\right\}$
$=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R}\wedge x^2-1\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}$
$(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=f(x^2-1)=2(x^2-1)-1$
$=2x^2-2-1=2x^2-3$
$f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\mapsto 2x^2-3$

b) $D_{g\circ f}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f\wedge f(x)\in D_g\right\}$
$=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R}\wedge 2x-1\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}$
$\left(g\circ f\right)(x)=g\left(f\left(x\right)\right)=g\left(2x-1\right)=\left(2x-1\right)^2-1$
$=4x^2-4x+1-1=4x^2-4x$
$g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\mapsto 4x^2-4x$

c) $D_{g\circ g}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in D_g\wedge g(x)\in D_g\right\}$
$=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R}\wedge x^2-1\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}$
$\left(g\circ g\right)(x)=g\left(g\left(x\right)\right)=g\left(x^2-1\right)=\left(x^2-1\right)^2-1$
$=x^4-2x^2+1-1=x^4-2x^2$
$g\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\mapsto x^4-2x^2$

d) $D_{f\circ f}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f\wedge f(x)\in D_f\right\}$
$=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R}\wedge 2x-1\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}$
$(f\circ f)(x)=f\left(f(x)\right)=f(2x-1)=2(2x-1)-1$
$=4x-2-1=4x-3$
$f\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$x\mapsto 4x-3$

8.2. $(f\circ g)(-2)=2(-2)^2-3=2\times 4-3=5$
$(f\circ f)(2)=4\times 2-3=5$
$\left[(f\circ g)(-2)\right]^2-2(f\circ f)(2)=5^2-2\times 5=25-10=15$

9.1. $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+1} & \text{se } x\le 0\\ k+\cos(\pi x) & \text{se } x>0\end{cases}$

Em $]-\infty,0[$, a função *h* é contínua por ser, nesse intervalo, definida por uma função racional e $x^2+1\neq 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Em $]0,+\infty[$, a função *h* é contínua por ser, nesse intervalo, definida pela soma de duas funções contínuas, uma função constante (k) e a função $\cos(\pi x)$ que é a composta de duas funções contínuas (cos e πx)

No ponto $x=0$, h é contínua se $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=h(0)$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{0}{0^2+1}=0$
$\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(k+\cos(\pi x)\right)=k+\cos(\pi\times 0)=$
$=k+\cos 0=k+1$
$h(0)=k+\cos 0=k+1$
$\lim\limits_{x\to 0}h(x)=h(0)\Leftrightarrow k+1=0\Leftrightarrow k=-1$

Logo, a função *h* é contínua em $\mathbb{R}$, se $k=-1$.

9.2. $g(x)=\begin{cases}k\sin\left(\dfrac{\pi x}{4}\right) & \text{se } x\le 2\\ \dfrac{1}{x+2} & \text{se } x>2\end{cases}$

Em $]-\infty,2[$, a função *g* é contínua por ser, nesse intervalo, definida pelo produto de funções contínuas uma constante (k) e uma composta de funções contínuas ($\sin x$ e $\frac{\pi x}{4}$).

Em $]2,+\infty[$, a função *g* é contínua por ser, nesse intervalo, definida por uma função racional e $x+2\neq 0$, para todo $x>2$.

No ponto $x=2$, g é contínua se $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=g(2)$

$\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(k\sin\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)\right)=k\sin\dfrac{2\pi}{4}=$
$=k\sin\dfrac{\pi}{2}=k\times 1=k$

$\lim\limits_{x\to 2^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{2+2}=\dfrac{1}{4}$

$g(2)=k\sin\dfrac{2\pi}{4}=k$

$\lim\limits_{x\to 2}g(x)=g(2)\Leftrightarrow k=\dfrac{1}{4}$

Logo, a função g é contínua em $\mathbb{R}$, se $k=\dfrac{1}{4}$.

10.1. a) $(f+g)(0)=f(0)+g(0)=0+4=4$

b) $(f-g)(1)=f(1)-g(1)=1-4=-3$

C.A. Para $x\ge 0$:
$f(x)=mx$ e $f(4)=4$
$f(4)=4\Leftrightarrow m\times 4=4\Leftrightarrow m=1$
$f(x)=x$ e $f(1)=1$

c) $(f \circ g)(-1) = f\left(g(-1)\right) = f(3) = 3$

C.A. Para $x \leq 0$:
$g(x) = mx + b$ e $b = 4$
$g(x) = mx + 4$ e $g(-2) = 2$
$g(-2) = 2 \Leftrightarrow m(-2) + 4 = 2 \Leftrightarrow -2m = -2$
$\Leftrightarrow m = 1$
$g(x) = x + 4$
$g(-1) = -1 + 4 = 3$

d) $(g \circ f)(1) = g\left(f(1)\right) = g(1) = 4$

10.2. a) $(f \circ g)(x) = 0 \Leftrightarrow f\left(g(x)\right) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$
$\Leftrightarrow x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$; $S = \{-4\}$

b) $(g \circ f)(x) = 2 \Leftrightarrow g\left(f(x)\right) = 2 \Leftrightarrow f(x) = 2$
Equação impossível. $S = \{\ \}$

Pág. 159

11. A função *f* não é contínua nos pontos $x = 0$ e $x = 6$.
Logo, *f* não é diferenciável nestes pontos.
No ponto $x = 1$: $f'(1^+) \neq f'(1^-)$
Neste caso, $f'(1^+) < 0$ e $f'(1^+) > 0$. Logo, não existe $f'(1^+)$.
Resposta: 0, 1 e 6.

12.1. $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 2 & \text{se } x < 2 \\ x - 3 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

Em $]-\infty, 2[$ e em $]2, +\infty[$, a função f é contínua por ser, nesses intervalos, definida por funções polinomiais.
No ponto $x = 2$, f é contínua se $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left((x-1)^2 - 2\right) = (2-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x - 3) = 2 - 3 = -1$
$f(2) = 2 - 3 = -1$
$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = -1$
Então, a função *f* é contínua em $x = 2$.
Logo, a função *f* é contínua.

12.2. *f* é diferenciável em $x = 2$ se $f'\left(2^+\right) = f'\left(2^-\right)$.

$f'(2^+) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x - 3 - (-1)}{x - 2}$
$= \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x - 2}{x - 2} = 1$

$f'(2^-) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{(x-1)^2 - 2 - (-1)}{x - 2}$
$= \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{(x-1)^2 - 1}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{(x - 1 - 1)(x - 1 + 1)}{x - 2}$
$= \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\cancel{(x-2)}x}{\cancel{x-2}} = \lim\limits_{x \to 2^-} x = 2$

$f'(2^-) \neq f'(2^+)$
Logo, a função *f* não é derivável no ponto $x = 2$.

Pág. 160

13.1. $f(x) = \begin{cases} ax + 5 & \text{se } x < 2 \\ 2x - 3 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$, no ponto $x = 2$

Se *f* é contínua em $x = a$, então
$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$
$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (ax + 5) = 2a + 5$
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x - 3) = 2 \times 2 - 3 = 1 = f(2)$
$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 2a + 5 = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2a = -4 \Leftrightarrow a = -2$

13.2. $g(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x < 0 \\ ax + b & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 3x & \text{se } x > 1 \end{cases}$,
nos pontos $x = 0$ e $x = 1$.
Se *g* é contínua em $x = 0$, então
$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$
$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-2) = -2$
$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (ax + b) = a \times 0 + b = b = g(0)$
$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = g(0) \Leftrightarrow b = -2$
Se *g* é contínua em $x = 1$, então
$\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = g(1)$
$\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (ax + b) = a \times 1 - 2 = a - 2 = g(1)$
$\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (3x) = 3 \times 1 = 3$
$\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = g(1) \Leftrightarrow a - 2 = 3 \Leftrightarrow a = 5$
$a = 5$ e $b = -2$

13.3. $h(x) = \begin{cases} x + a & \text{se } x < -1 \\ ax + b & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ bx + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$,
nos pontos $x = -1$ e $x = 1$.
Se *h* é contínua em $x = -1$, então
$\lim\limits_{x \to -1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} h(x) = h(-1)$
$\lim\limits_{x \to -1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x + a) = -1 + a$
$\lim\limits_{x \to -1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (ax + b) = a \times (-1) + b = -a + b = h(-1)$
$\lim\limits_{x \to -1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} h(x) = h(-1) \Leftrightarrow -a + b = -1 + a$
$\Leftrightarrow b = 2a - 1$
Se *h* é contínua em $x = 1$, então
$\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = h(1)$
$\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (ax + b) = a \times 1 + b = a + b = h(1)$
$\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (bx + 2) = b \times 1 + 2 = b + 2$
$\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = h(1) \Leftrightarrow a + b = b + 2 \Leftrightarrow a = 2$
$b = 2a - 1 \Leftrightarrow b = 2 \times 2 - 1 \Leftrightarrow b = 3$
$a = 2$ e $b = 3$

Pág. 161

14. $f(x)=\begin{cases}-x & \text{se } x<0\\ a(x) & \text{se } 0\le x\le 3\\ -2x+9 & \text{se } x>3\end{cases}$

Se f é contínua em $x=0$, então

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=a(0)$

Então, $f(0)=0\Leftrightarrow a(0)=0$

Se f é continua em $x=3$, então

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3)=a(3)$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(-2x+9)=-2\times 3+9=3$

Então, $f(3)=3\Leftrightarrow a(3)=3$.

No intervalo $[0,3]$, o gráfico apresentado sugere que se trata de uma parábola de vértice $(1,-1)$.

Então, $a(x)=b(x-1)^2-1$.

$\begin{cases}a(0)=0\\ a(3)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b(0-1)^2-1=0\\ b(3-1)^2-1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\ b=1\end{cases}$

Logo, $a(x)=(x-1)^2-1=x^2-2x+1-1=x^2-2x$

$a(x)=x^2-2x$

15.1. $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(0)=-2$

15.2. $(g\circ h)(2)=g(h(2))=g(0)=1$

15.3. a) f é uma função afim. Então,

$f(x)=mx+b$, $b=-2$ e $f(1)=0$

$f(x)=mx-2$

$f(1)=0\Leftrightarrow m\times 1-2=0\Leftrightarrow m=2$

$f(x)=2x-2$

g é uma função afim. Então,

$g(x)=mx+b$, $b=1$e $g(1)=0$

$g(x)=mx+1$

$g(1)=0\Leftrightarrow m\times 1+1=0\Leftrightarrow m=-1$

$g(x)=-x+1$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-2)=-(2x-2)+1=$

$=-2x+2+1=3-2x$

$(g\circ f)(x)=3-2x$

b) $h(x)=a(x-b)^2+k$; $(b,k)=(1,-2)$ e $h(2)=0$

$h(x)=a(x-1)^2-2$

$h(2)=0\Leftrightarrow a(2-1)^2-2=0\Leftrightarrow a-2=0\Leftrightarrow a=2$

$h(x)=a(x-1)^2-2=$

$=2(x^2-2x+1)-2=2x^2-4x+2-2=2x^2-4x$

$(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(-x+1)=$

$=2(-x+1)^2-4(-x+1)=2(x^2-2x+1)+4x-4$

$=2x^2-4x+2+4x-4=2x^2-2$

$(h\circ g)(x)=2x^2-2$

16. $f(x)=\frac{2}{x}$; $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$g(x)=a(x-h)^2+k$, $(h,k)=(0,1)$ e $g(1)=0$

$g(x)=ax^2+1$

$g(1)=0\Leftrightarrow a\times 1^2+1=0\Leftrightarrow a=-1$

$g(x)=-x^2+1$

16.1. a) $(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(1)=\frac{2}{1}=2$

$(f\circ g)(0)=2$

b) $(f\circ f)(-3)=f(f(-3))=f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{-\frac{2}{3}}=-\frac{6}{2}=-3$

C.A. $\quad f(-3)=\frac{2}{-3}=-\frac{2}{3}$

16.2. a) $D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_g\wedge g(x)\in D_f\}$

$=\{x\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R}\wedge -x^2+1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$

$=\{x\in\mathbb{R}: -x^2+1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

C.A. $\quad -x^2+1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-x^2+1)=\frac{2}{-x^2+1}=\frac{-2}{x^2-1}$

$(f\circ g)(x)\colon \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto\frac{-2}{x^2-1}$

b) $D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f\wedge f(x)\in D_g\}$

$=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\wedge\frac{2}{x}\in\mathbb{R}\right\}$

$=\{x\in\mathbb{R}: x\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{2}{x}\right)=-\left(\frac{2}{x}\right)^2+1$

$=1-\frac{4}{x^2}$

$(g\circ f)(x)\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto 1-\frac{4}{x^2}$

c) $D_{f\circ f}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f\wedge f(x)\in D_f\}$

$=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\wedge\frac{2}{x}\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}$

$=\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq 0\wedge\frac{2}{x}\neq 0\right\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{2}{x}\right)=\frac{2}{\frac{2}{x}}=\frac{2x}{2}=x$

$(f\circ f)(x)$: $\mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$

d) $D_{g\circ g}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_g \wedge g(x)\in D_g\}$

$=\{x\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R}\wedge -x^2+1\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

$(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(-x^2+1)=-(-x+1)^2+1$

$=-(x^4-2x^2+1)+1=2x^2-x^4$

$(g\circ g)(x)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x^2-x^4$

17. $f(x)=3x$ e $g(x)=2x+b$

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)\Leftrightarrow f(g(x))=g(f(x))\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(2x+b)=g(3x) \Leftrightarrow 3(2x+b)=2(3x)+b\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x+3b=6x+b \Leftrightarrow 3b=b\Leftrightarrow 2b=0\Leftrightarrow b=0$

$b=0$

Pág. 162

18.1. a) h é uma função quadrática e 1 e 2 são zeros de h.

Então, $h(x)=a(x-1)(x-2)$ e $h(0)=2$

$h(0)=2\Leftrightarrow a(0-1)(0-2)=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(-1)\times(-2)=2\Leftrightarrow 2a=2\Leftrightarrow a=1$

Então, $h(x)=(x-1)(x-2)=x^2-2x-x+2=$

$=x^2-3x+2$

b) $g(1)=f(h(1))\underset{(h(1)=0)}{=}f(0)$

$g(2)=f(h(2))\underset{(h(2)=0)}{=}f(0)$

Logo, $g(1)=g(2)$.

18.2. $g(x)=1\Leftrightarrow f(h(x))=1\Leftrightarrow h(x)=2$

$\Leftrightarrow x^2-3x+2=2\Leftrightarrow x^2-3x=0$

$\Leftrightarrow x(x-3)=0\Leftrightarrow x=0\vee x-3=0\Leftrightarrow x=0\vee x=3$

$S=\{0,3\}$

19.1. Em $]-\infty,0[$ e em $]0,+\infty[$, a função f é contínua por ser, nesses intervalos, definidas por funções polinomiais, contínuas em $\mathbb{R}$.

No ponto $x=0$:

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(kx)=k\times0=0$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2)=0^2=0=f(0)$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$

Então, a função f é contínua para $x=0$. Logo, f é contínua em $\mathbb{R}$, qualquer que seja o valor de k.

19.2. f é derivável no ponto $x=0\Leftrightarrow f'(0^-)=f'(0^+)$

$f'(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{kx-0^2}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{kx}{x}=k$

$f'(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2-0^2}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}x=0$

Logo, $k=0$.

20.1. $f(x)=\begin{cases}kx+2 & \text{se } x\le1\\ 2x-1 & \text{se } x>1\end{cases}$, no ponto $x=1$.

Se f é contínua em $x=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(kx+2)=k+2=f(1)$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(2x-1)=2\times1-1=1$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)\Leftrightarrow k+2=1\Leftrightarrow k=-1$

f só é derivável no ponto $x=1$ se for contínua nesse ponto, isto é, se $k=-1$ e f é derivável no ponto $x=1\Leftrightarrow f'(1^-)=f'(1^+)$

$f'(1^-)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-x+2-1}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=-1$

$f'(1^+)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-1-1}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=2$

$f'(1^-)\neq f'(1^+)$

Então, f não é derivável para $x=1$.

Se $k=-1$, f é contínua e não existe valor de k para o qual f é derivável para $x=1$.

20.2. $g(x)=\begin{cases}4x-2 & \text{se } x<1\\ 2x^2+k & \text{se } x\ge1\end{cases}$, no ponto $x=1$

g é contínua para $x=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=g(1)$

$\lim\limits_{x\to1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(4x-2)=4\times1-2=2$

$\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(2x^2+k)=2\times1^2+k=2+k=g(1)$

$\lim\limits_{x\to1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=g(1)\Leftrightarrow 2+k=2\Leftrightarrow k=0$

g só é derivável no ponto $x=1$ se for contínua nesse ponto, isto é, se $k=0$ e g é derivável no ponto $x=1\Leftrightarrow g'(1^-)=g'(1^+)$

$g'(1^-)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{4x-2-2}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{4x-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{4\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=4$

$g'(1^+)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x^2-2}{x-1}=$

$= \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{2(x^2-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{2(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$

$= \lim\limits_{x\to1^+} 2(x+1) = 2(1+1) = 2\times2 = 4$

$g'(1^-) = g'(1^+)$

Então, g é derivável para $x=1$.

Se $k=0$, g é contínua e derivável para $x=1$.

20.3. $h(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{se } x<0 \\ kx^2+x+k & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$, no ponto $x=0$

h é contínua para $x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to0^+} h(x) = h(0)$

$\lim\limits_{x\to0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \left(x^2+2\right) = 0^2+2 = 2$

$\lim\limits_{x\to1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \left(kx^2+x+k\right) = k\times0^2+0+k = k = h(0)$

$\lim\limits_{x\to0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to0^+} h(x) = h(0) \Leftrightarrow k = 2$

h só é derivável no ponto $x=0$ se for contínua nesse ponto, isto é, se $k=2$, e h é derivável no ponto $x=0 \Leftrightarrow h'(0^-) = h'(0^+)$.

$h'(0^-) = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x^2+2-2}{x}$

$= \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to0^-} x = 0$

$h'(0^+) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2x^2+x+2-2}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2x^2+x}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\cancel{x}(2x+1)}{\cancel{x}} =$

$= \lim\limits_{x\to0^+} (2x+1) = 2\times0+1 = 1$

$h'(0^-) \neq h'(0^+)$

Então, h não é derivável para $x=0$.

Se $k=2$, h é contínua e não existe valor de k para o qual h é derivável para $x=0$.

21. $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x\neq2 \\ k & \text{se } x=-2 \end{cases}$

$g(x) = f(x^2)$

21.1. f é contínua em $x=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to2} f(x) = f(2)$

$\lim\limits_{x\to2} f(x) = \lim\limits_{x\to2} (x+2) = 2+2 = 4$

$f(2) = k$

$\lim\limits_{x\to2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow k = 4$

$k = 4$

21.2. Se $x\neq\sqrt{2}$, $x^2\neq2$

$g(x) = f(x^2) = x^2+2$

Se $x=\sqrt{2}$, $x^2=2$.

$g(x) = f(x^2) = k = 2$

Então,

$g(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{se } x\neq\sqrt{2} \\ 2 & \text{se } x=\sqrt{2} \end{cases}$

g é contínua em $x=\sqrt{2} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\sqrt{2}} g(x) = g\left(\sqrt{2}\right)$.

$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} g(x) = \lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \left(x^2+2\right) = \sqrt{2}^2+2 = 4$

$g\left(\sqrt{2}\right) = 2$

$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} g(x) \neq g\left(\sqrt{2}\right)$, pelo que g não é contínua para $x=\sqrt{2}$.

Como g não é contínua para $x=\sqrt{2}$, também não é derivável nesse ponto.

Pág. 163

22.1. $f(x) = x^3-2x^{-2}+3x^{-3}$

$f'(x) = \left(x^3-2x^{-2}+3x^{-3}\right)'$

$= 3x^{3-1}+4x^{-2-1}-9x^{-3-1}$

$= 3x^2+4x^{-3}-9x^{-4}$

22.2. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^{-1}}$

$f'(x) = \dfrac{x'\left(1+x^{-1}\right)-x\left(1+x^{-1}\right)'}{\left(1+x^{-1}\right)^2} =$

$= \dfrac{1+x^{-1}-x\left(0-x^{-1-1}\right)}{(1+x^{-1})^2} = \dfrac{1+x^{-1}+xx^{-2}}{(1+x^{-1})^2}$

$= \dfrac{1+x^{-1}+x^{-1}}{(1+x^{-1})^2} = \dfrac{1+2x^{-1}}{(1+x^{-1})^2}$

22.3. $f(x) = 2x^{-1}\left(x^{-2}+x^{-3}\right) = 2x^{-3}+2x^{-4}$

$f'(x) = \left(2x^{-3}+2x^{-4}\right)' = -6x^{-3-1}-8x^{-4-1} =$

$= -6x^{-4}-8x^{-5}$

22.4. $f(x) = x+\sqrt{x} = x+x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)' = 1+\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = 1+\dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = 1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

22.5. $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = \dfrac{x+x^{\frac{1}{2}}}{x-x^{\frac{1}{2}}}$

$f'(x) = \left(\dfrac{x+x^{\frac{1}{2}}}{x-x^{\frac{1}{2}}}\right)'$

$= \dfrac{\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)'\left(x-x^{\frac{1}{2}}\right)-\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)\left(x-x^{\frac{1}{2}}\right)'}{\left(x-x^{\frac{1}{2}}\right)^2}$

$= \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\right)\left(x-x^{\frac{1}{2}}\right)-\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)\left(1-\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\right)}{\left(x-x^{\frac{1}{2}}\right)^2}$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x-x^{\frac{1}{2}}\right)-\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)\left(1-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(x-x^{\frac{1}{2}}\right)^2}$$

$$=\frac{x-x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}+1}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}-\left(x-\frac{1}{2}x^{1-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\right)}{\left(x-x^{\frac{1}{2}}\right)^2}$$

$$=\frac{\cancel{x}-x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{-x}+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}}{\left(x-x^{\frac{1}{2}}\right)^2}=$$

$$=\frac{x^{\frac{1}{2}}\left(-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1\right)}{\left(x-x^{\frac{1}{2}}\right)^2}=\frac{-x^{\frac{1}{2}}}{\left(x-x^{\frac{1}{2}}\right)^2}=$$

$$=-\frac{\sqrt{x}}{\left(x-\sqrt{x}\right)^2}=\frac{-x}{\sqrt{x}\left(x-\sqrt{x}\right)^2}$$

22.6. $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x}}=\frac{x}{x^{\frac{1}{3}}}=x^{1-\frac{1}{3}}=x^{\frac{2}{3}}$

$$f'(x)=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}x'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\times 1=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

23.1. $f(x)=\left[(2x-3)^3\right]$

$$f'(x)=\left[(2x-3)^3\right]'=3(2x-3)^2(2x-3)'=$$

$$=3(2x-3)^2\times 2=6(2x-3)^2$$

23.2. $f(x)=(-3x+1)^{\frac{2}{3}}$

$$f'(x)=\left[(-3x+1)^{\frac{2}{3}}\right]'=\frac{2}{3}(-3x+1)^{\frac{2}{3}-1}(-3x+1)'=$$

$$=\frac{2}{\cancel{3}}(-3x+1)^{\frac{2}{3}-1}\times(\cancel{-3})=-2(-3x+1)^{-\frac{1}{3}}=$$

$$=2(3x-1)^{-\frac{1}{3}}$$

23.3. $f(x)=\sqrt{x^2+1}=(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x)=\left[(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]'=\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}-1}(x^2+1)'=$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\times\cancel{2}x=x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

23.4. $f(x)=\sqrt[3]{1-6x}=(1-6x)^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x)=\left[(1-6x)^{\frac{1}{3}}\right]'$$

$$=\frac{1}{3}(1-6x)^{\frac{1}{3}-1}(1-6x)'=\frac{1}{3}(1-6x)^{-\frac{2}{3}}\times(-6)=$$

$$=-2(1-6x)^{-\frac{2}{3}}=\frac{-2}{(1-6x)^{\frac{2}{3}}}=$$

$$=\frac{-2}{\sqrt[3]{(1-6x)^2}}=\frac{-2}{\sqrt[3]{(6x-1)^2}}$$

23.5. $f(x)=\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}$

$$f'(x)=\left[\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}\right]'=\frac{3}{2}\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}-1}\left(x^2-1\right)'=$$

$$=\frac{3}{\cancel{2}}\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(\cancel{2}x\right)=3x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}=3x\sqrt{x^2-1}$$

23.6. $f'(x)=\left[\frac{x}{(x+1)^2}\right]'=\frac{x'(x+1)^2-x\left[(x+1)^2\right]'}{\left[(x+1)^2\right]^2}=$

$$=\frac{1(x+1)^2-x\left[2(x+1)^{2-1}(x+1)'\right]}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{(x+1)^2-x\left[2(x+1)\times 1\right]}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)^2-2x(x+1)}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{(x+1)(x+1-2x)}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)(-x+1)}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{(-x+1)}{(x+1)^3}=\frac{1-x}{(x+1)^3}$$

23.7. $f'(x)=\left[2x(1-2x)^2\right]'$

$$=(2x)'(1-2x)^2+(2x)\left[(1-2x)^2\right]'$$

$$=2(1-2x)^2+(2x)\left[2(1-2x)^{2-1}(1-2x)'\right]$$

$$=2(1-2x)^2+(2x)\left[2(1-2x)\times(-2)\right]$$

$$=2(1-2x)^2+2x\left[-4(1-2x)\right]$$

$$=2(1-2x)^2+8x(1-2x)$$

$$=2(1-2x)(1-2x-4x)$$

$$=2(1-2x)(1-6x)$$

$$=2(2x-1)(6x-1)$$

23.8. $f'(x)=\left[\left(\frac{2x}{1-2x}\right)^2\right]'=2\left(\frac{2x}{1-2x}\right)^{2-1}\times\left(\frac{2x}{1-2x}\right)'=$

$$=2\left(\frac{2x}{1-2x}\right)\times\frac{(2x)'(1-2x)-2x(1-2x)'}{(1-2x)^2}$$

$$=\frac{4x}{1-2x}\times\frac{2(1-2x)-2x\times(-2)}{(1-2x)^2}$$

$$=\frac{4x}{1-2x}\times\frac{2\cancel{-4x}\cancel{+4x}}{(1-2x)^2}$$

$$=\frac{8x}{(1-2x)^3}=\frac{-8x}{(2x-1)^3}$$

24.1. $f'(x)=(\sin x+2\cos x)'=\cos x-2\sin x$

24.2. $f'(x)=(\sin x\cos x)'$

$=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'$

$=\cos x\cos x-\sin x\sin x$

$=\cos^2 x-\sin^2 x$

24.3. $f'(x)=\left[\sin\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]'=\left(\frac{x-1}{x}\right)'\cos\left(\frac{x-1}{x}\right)=$

$=\frac{(x-1)'x-(x-1)x'}{x^2}\cos\left(\frac{x-1}{x}\right)=$

$=\frac{x-x+1}{x^2}\cos\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{x-1}{x}\right)$

24.4. $f'(x)=\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]'=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}=$

$=\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

24.5. $f'(x)=\left[\cos^2(3x)\right]'=2\cos(3x)\times\left[\cos(3x)\right]'=$

$=2\cos(3x)\times\left[-(3x)'\sin(3x)\right]=$

$=2\cos(3x)\times(-3)\sin(3x)=-6\cos(3x)\sin(3x)$

$=-6\sin(3x)\cos(3x)$

24.6. $f'(x)=\left[\tan^3(x)\right]'=3\tan^3(x)\times\left[\tan(x)\right]'=$

$=3\tan^3(x)\times\frac{1}{\cos^2 x}=3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\times\frac{1}{\cos^2 x}=$

$=3\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$

25.1. $f'(x)=\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]'=-\left(\frac{x}{2}\right)'\sin\left(\frac{x}{2}\right)=-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

O declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa π é $f'(\pi)$.

$f'(\pi)=-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}\times 1=-\frac{1}{2}$

O declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{\pi}{3}$ é $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}}{2}\right)=-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

25.2. $f'(x)=\left[x+\sin(2x)\right]'=1+(2x)'\cos(2x)=$

$=1+2\cos(2x)$

O declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 0 é $f'(0)$.

$f'(0)=1+2\cos(2\times 0)=1+2\cos(0)=1+2\times 1=3$

O declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa $\frac{\pi}{6}$ é $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=1+2\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)=1+2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$=1+2\times\frac{1}{2}=2$

25.3. $f'(x)=\left[2\tan(2x)\right]'=2\left[\tan(2x)\right]'=$

$=2\times\frac{(2x)'}{\cos^2(2x)}==2\times\frac{2}{\cos^2(2x)}=\frac{4}{\cos^2(2x)}$

O declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 0 é $f'(0)$.

$f'(0)=\frac{4}{\cos^2(2\times 0)}=\frac{4}{1^2}=4$

O declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa $\frac{\pi}{8}$ é $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

$f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{4}{\cos^2\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{4}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}=$

$=\frac{4}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{4}{\frac{2}{4}}=\frac{16}{2}=8\ =1+2\times\frac{1}{2}=2$

25.4. $f'(x)=\left[\frac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)}\right]'=$

$=\frac{\left[\sin(2x)\right]'\left[1+\cos(2x)\right]-\sin(2x)\left[1+\cos(2x)\right]'}{\left[1+\cos(2x)\right]^2}$

$=\frac{2\cos(2x)\left[1+\cos(2x)\right]-\sin(2x)\left[-2\sin(2x)\right]}{\left[1+\cos(2x)\right]^2}$

$=\frac{2\cos(2x)+2\cos^2(2x)+2\sin^2(2x)}{\left[1+\cos(2x)\right]^2}$

$=\frac{2\cos(2x)+2\left[\cos^2(2x)+\sin^2(2x)\right]}{\left[1+\cos(2x)\right]^2}=$

$=\frac{2\cos(2x)+2}{\left[1+\cos(2x)\right]^2}=\frac{2\cancel{\left[\cos(2x)+1\right]}}{\left[1+\cos(2x)\right]\cancel{^2}}=\frac{2}{1+\cos(2x)}$

O declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 0 é $f'(0)$.

$f'(0)=\frac{2}{1+\cos(2\times 0)}=\frac{2}{1+\cos(0)}=\frac{2}{1+1}=1$

O declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa $\frac{\pi}{3}$ é $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{1+\cos\left(2\times\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{2}{1+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}=$$

$$=\frac{2}{1+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{2}{1+\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$$

Pág. 164

26. $f(x)=x+\sin(4x)$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+\sin\left(\cancel{4}\times\frac{\pi}{\cancel{4}}\right)=\frac{\pi}{4}+\sin(\pi)=\frac{\pi}{4}+0=\frac{\pi}{4}$$

$$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f'(x)=\left[x+\sin(4x)\right]'=1+4\cos(4x)$$

$$m=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+\cos\left(4\times\frac{\pi}{4}\right)=1+\cos(\pi)$$

$$=1+4\times(-1)=-3$$

$$y-\frac{\pi}{4}=-3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow y-\frac{\pi}{4}=-3x+\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=-3x+\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow y=-3x+\pi$$

27.1. $f'(x)=\left(2x^3-3x^2+5x+1\right)'=6x^2-6x+5$

$$f'(x)=\left(6x^2-6x+5\right)'=12x-6$$

27.2. $f'(x)=\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\right]'=2\left(x+\frac{1}{x}\right)\times\left(x+\frac{1}{x}\right)'=$

$$=\left(2x+\frac{2}{x}\right)\times\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=2x-\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x^2}}+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^3}$$

$$=2x-\frac{\cancel{2}}{\cancel{x}}+\frac{\cancel{2}}{\cancel{x}}-\frac{2}{x^3}=2x-\frac{2}{x^3}$$

$$f''(x)=\left(2x-\frac{2}{x^3}\right)'=2-\frac{2'x^3-2\times\left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2}=$$

$$=2-\frac{-2\times3x^2}{x^6}=2+\frac{6}{x^4}$$

27.3. $f'(x)=\left(\frac{2x}{1-x}\right)'=\frac{(2x)'(1-x)-2x(1-x)'}{(1-x)^2}=$

$$=\frac{2(1-x)-2x\times(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2-\cancel{2x}+\cancel{2x}}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2}$$

$$f''(x)=\left(\frac{2}{(1-x)^2}\right)'=\frac{2'(1-x)^2-2\times\left[(1-x)^2\right]'}{\left[(1-x)^2\right]^2}$$

$$=\frac{-2\times2\times(1-x)(1-x)'}{(1-x)^4}=\frac{-4\times(1-x)(-1)}{(1-x)^4}=$$

$$=\frac{4}{(1-x)^3}=\frac{-4}{(x-1)^3}$$

27.4. $f'(x)=\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)'$

$$=\frac{(1+2x)'(1-2x)-(1+2x)(1-2x)'}{(1-2x)^2}$$

$$=\frac{2(1-2x)-(1+2x)(-2)}{(1-2x)^2}=$$

$$=\frac{2-\cancel{4x}+2+\cancel{4x}}{(1-2x)^2}=\frac{4}{(1-2x)^2}$$

$$f''(x)=\left(\frac{4}{(1-2x)^2}\right)'=\frac{4'(1-2x)^2-4\times\left[(1-2x)^2\right]'}{\left[(1-2x)^2\right]^2}=$$

$$=\frac{-4\times2\times(1-2x)(1-2x)'}{(1-2x)^4}=\frac{-8\times(1-2x)(-2)}{(1-2x)^4}=$$

$$=\frac{16}{(1-2x)^3}$$

27.5. $f'(x)=\left[\cos(2x)+\sin x\right]'=-2\sin(2x)+\cos x$

$$f''(x)=\left[-2\sin(2x)+\cos x\right]'=-4\cos(2x)-\sin x$$

27.6. $f'(x)=\left[\sin^2 x\right]'=2\sin(x)\left[\sin(x)\right]'$

$$=2\sin(x)\cos x$$

$$f''(x)=\left(2\sin(x)\cos x\right)'=$$

$$=\left(2\sin(x)\right)'\cos x+2\sin(x)\left(\cos x\right)'=$$

$$=2\cos x\cos x-2\sin(x)\sin x=$$

$$=2\cos^2 x-2\sin^2 x=2\left(1-\sin^2 x\right)-2\sin^2 x=$$

$$=2-2\sin^2 x-2\sin^2 x=2-4\sin^2 x$$

27.7. $f(x)=x^2+\sin(2x)$

$$f'(x)=\left[x^2+\sin(2x)\right]'=2x+2\cos(2x)$$

$$f''(x)=\left(2x+2\cos(2x)\right)'=2+2\times\left[-2\sin(2x)\right]=$$

$$=2-4\sin(2x)$$

27.8. $f(x)=x-\sin x\cos x$

$$f'(x)=\left[x-\sin x\cos x\right]'$$

$$=x'-\left[\left(\sin x\right)'\cos x+\sin x(\cos x)'\right]$$

$$=1-\left[\cos x\cos x+\sin x(-\sin x)\right]$$

$$=1-\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=1-\cos^2 x+\sin^2 x=$$

$$=\sin^2 x+\sin^2 x=2\sin^2 x$$

$$f''(x)=\left(2\sin^2 x\right)'=2\left[2\sin x\left(\sin x\right)'\right]=$$

$$=2\left(2\sin x\cos x\right)=4\sin x\cos x$$

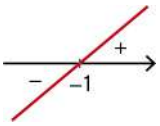
Pág. 165

28.1. $f'(x)=\left(x^3+3x^2+6x+6\right)'=3x^2+6x+6$

$f''(x)=\left(3x^2+6x+6\right)'=6x+6$

$D_f=D_{f'}=D_{f''}=\mathbb{R}$

$f''(x)=0\Leftrightarrow 6x+6=0\Leftrightarrow x=-1$



x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''	−	0	+
f		2	

C.A. $f(-1)=(-1)^3-3\times(-1)^2+6\times(-1)+6$
$=-1+3-6+6=2$

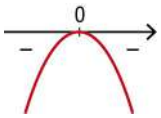
O gráfico de *f* tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-1[$ e voltada para cima em $]-1,+\infty[$.

Ponto de inflexão: $(-1,2)$

28.2. $f(x)=12x-x^4$

$f'(x)=\left(12x-x^4\right)'=12-4x^3$

$f''(x)=\left(12-4x^3\right)'=-12x^2$



$D_f=D_{f'}=D_{f''}=\mathbb{R}$

$f''(x)=0\Leftrightarrow -12x^2=0\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	−	0	−
f		0	

C.A. $f(0)=12\times 0-0^4=0$

O gráfico de *f* tem a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}$.

Ponto de inflexão: Não tem.

28.3. $f(x)=x^4+4x^3-18x^2$

$f'(x)=\left(x^4+4x^3-18x^2\right)'=4x^3+12x^2-36x$

$f''(x)=\left(4x^3+12x^2-36x\right)'=12x^2+24x-36$

$D_f=D_{f'}=D_{f''}=\mathbb{R}$

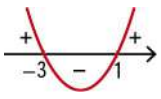
$f''(x)=0\Leftrightarrow 12x^2+24x-36=0$

$\Leftrightarrow x^2+2x-3=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times 1\times(-3)}}{2\times 1}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-2\pm 4}{2}$

$\Leftrightarrow x=-3\vee x=1$



x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
f''	+	0	−	0	+
f		−189		−13	

C.A. $f(-3)=(-3)^4+4(-3)^3-18(-3)^2=-189$
$f(1)=1^4+4\times 1^3-18\times 1^2=-13$

O gráfico de *f* tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty,-3[$ e em $]1,+\infty[$ e voltada para baixo em $]-3,1[$.

Ponto de inflexão: $(-3,-189)$ e $(1,-13)$

28.4. $f(x)=x+4+\dfrac{3}{x}$

$f'(x)=\left(x+4+\dfrac{3}{x}\right)'=1+0+\dfrac{3'x-3x'}{x^2}=1-\dfrac{3}{x^2}$

$f''(x)=\left(1-\dfrac{3}{x^2}\right)'=1'-\dfrac{3'x^2-3(x^2)'}{(x^2)^2}=-\dfrac{-6x}{x^4}=\dfrac{6}{x^3}$

f'' não tem zeros.

$D_f=D_{f'}=D_{f''}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	−		+
f			

O gráfico de *f* tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,0[$ e voltada para cima em $]0,+\infty[$.

Ponto de inflexão: não tem.

28.5. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+3}$

$f'(x)=\dfrac{(x^2)'(x^2+3)-x^2(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}=$

$=\dfrac{2x(x^2+3)-x^2\times 2x}{(x^2+3)^2}=\dfrac{2x^3+6x-2x^3}{(x^2+3)^2}=$

$=\dfrac{6x}{(x^2+3)^2}$

$f''(x)=\left(\dfrac{6x}{(x^2+3)^2}\right)'$

$=\dfrac{(6x)'(x^2+3)^2-6x\left[(x^2+3)^2\right]'}{\left[(x^2+3)^2\right]^2}$

$=\dfrac{6(x^2+3)^2-6x\left[2(x^2+3)\times 2x\right]}{(x^2+3)^4}$

$=\dfrac{(x^2+3)\left[6(x^2+3)-6x\times 2\times 2x\right]}{(x^2+3)^4}$

$=\dfrac{6x^2+18-24x^2}{(x^2+3)^3}$

$=\dfrac{-18x^2+18}{(x^2+3)^3}$

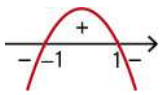
$D_f=D_{f'}=D_{f''}=\mathbb{R}$

$f''(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{-18x^2+18}{(x^2+3)^3}=0$

$\Leftrightarrow -18x^2+18=0\wedge(x^2+3)^3\neq 0$

$\Leftrightarrow x^2=1\wedge x^2+3\neq 0$, onde $x^2+3\neq 0$ é condição universal

$\Leftrightarrow x=\pm 1$



x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f''	−	0	+	0	−
f		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$	
		P.I.		P.I.	

C.A. $f(-1)=\dfrac{(-1)^2}{(-1)^2+3}=\dfrac{1}{4}$; $f(1)=\dfrac{1^2}{1^2+3}=\dfrac{1}{4}$

O gráfico de *f* tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-1[$ e em $]1,+\infty[$ e voltada para cima em $]-1,1[$.

Ponto de inflexão: $\left(-1,\frac{1}{4}\right)$ e $\left(1,\frac{1}{4}\right)$

28.6. $f(x)=\dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$

$$f'(x)=\frac{(3x+2)'(x+1)^2-(3x+2)\left[(x+1)^2\right]'}{\left[(x+1)^2\right]^2}=$$

$$=\frac{3(x+1)^2-(3x+2)\times 2(x+1)(x+1)'}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{3(x+1)^2-(3x+2)\times 2(x+1)\times 1}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{(x+1)[3(x+1)-2(3x+2)]}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{3x+3-6x-4}{(x+1)^3}=\frac{-3x-1}{(x+1)^3}$$

$$f''(x)=\left[\frac{-3x-1}{(x+1)^3}\right]'$$

$$=\frac{(-3x-1)'(x+1)^3-(-3x-1)\left[(x+1)^3\right]'}{\left[(x+1)^3\right]^2}$$

$$=\frac{-3(x+1)^3-(-3x-1)\left[3(x+1)^2(x+1)'\right]}{(x+1)^6}$$

$$=\frac{-3(x+1)^3-(-3x-1)\times 3(x+1)^2}{(x+1)^6}$$

$$=\frac{(x+1)^2\left[-3(x+1)^3-(-3x-1)\times 3\right]}{(x+1)^6}$$

$$=\frac{-3x-3+9x+3}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{6x}{(x+1)^4}$$

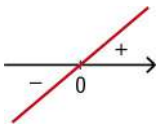
$D_f=D_{f'}=D_{f''}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$f''(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{6x}{(x+1)^4}=0$

$\Leftrightarrow 6x=0\wedge(x+1)^4\neq 0$

$\Leftrightarrow x=0\wedge x+1\neq 0$

$\Leftrightarrow x=0\wedge x\neq -1$



x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
f''	–		–	0	+
f				2	

C.A. $f(0)=\dfrac{3\times 0+2}{(0+1)^2}=2$

O gráfico de *f* tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-1[$ e em $]-1,0[$ e voltada para cima em $]0,+\infty[$.

Ponto de inflexão: $(0,2)$

29. $f'(x)=2+3x^2-2x^3$

$f''(x)=\left(2+3x^2-2x^3\right)'=6x-6x^2$

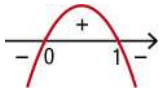
$f''(x)=0\Leftrightarrow 6x-6x^2=0$

$\Leftrightarrow 6x(1-x)=0$

$\Leftrightarrow 6x=0\vee 1-x=0$

$\Leftrightarrow x=0\vee x=1$

$f''(x)>0\Leftrightarrow x\in\,]0,1[$



Opção (D)

30.1. $f'(x)=\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)'$

$$f'(x)=\frac{(x^2)'(x-1)-x^2(x-1)'}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2},\ D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0$

$\Leftrightarrow x^2-2x=0\wedge(x-1)^2\neq 0\ \Leftrightarrow x(x-2)=0\wedge x-1\neq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x=0\vee x-2=0)\wedge x\neq 1\ \Leftrightarrow(x=0\vee x=2)\wedge x\neq 1$

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
f'	+	0	–		–	0	+
f	↗	0	↘		↘	4	↗
		Máx.				Mín.	

C.A. $f(0)=\dfrac{0^2}{0-1}=0$; $f(2)=\dfrac{2^2}{2-1}=4$

f é estritamente crescente em $]-\infty,0]$ e em $[2,+\infty[$ e é estritamente decrescente em $[0,1[$ e em $]1,2]$.

f tem um máximo relativo 0 para $x=0$ e um mínimo relativo 4 para $x=2$.

30.2. $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

$$f''(x)=\left[\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right]'$$

$$=\frac{(x^2-2x)'(x-1)^2-\left(x^2-2x\right)\left[(x-1)^2\right]'}{\left[(x-1)^2\right]^2}$$

$$=\frac{(2x-2)(x-1)^2-\left(x^2-2x\right)2(x-1)(x-1)'}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(2x-2)(x-1)^2-\left(x^2-2x\right)2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(x-1)\left[(2x-2)(x-1)-2\left(x^2-2x\right)\right]}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(2x-2)(x-1)-2\left(x^2-2x\right)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{\cancel{2x^2}\ \cancel{-2x}\ \cancel{-2x}+2-\cancel{2x^2}\ \cancel{+4x}}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$f''(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Logo, o gráfico de f não tem pontos de inflexão.

31. Como f tem concavidade voltada para baixo, f' é estritamente decrescente. Assim, $f'(0) > f'(1)$, ou seja, $f'(0) > 0$. A opção (A) é falsa.

Pela mesma razão, $f'(2) < f'(1)$, ou seja, $f'(2) < 0$. A opção (B) é verdadeira.

Como $f'(1) = 0$, f tem um máximo absoluto para $x = 1$ e é estritamente crescente em $]-\infty, 1]$ e estritamente decrescente em $[1, +\infty[$. A opção (C) é falsa e a opção (D) é falsa.

Opção (B)

32.1. Como f tem um extremo relativo para $x = 3$, $f'(3) = 0$.

$$f'(x) = \left(x^2 + \frac{k}{x}\right)'$$

$$= 2x + \frac{k' \, x - kx'}{x^2}$$

$$= 2x - \frac{k}{x^2}$$

$$f'(3) = 0 \Leftrightarrow 2 \times 3 - \frac{k}{3^2} = 0 \Leftrightarrow 6 - \frac{k}{9} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 54 - k = 0 \Leftrightarrow k = 54$$

32.2. Como o ponto de abcissa 2 é ponto de inflexão, $f''(2) = 0$.

$$f''(x) = \left(2x - \frac{k}{x^2}\right)' = 2 - \frac{k' \, x^2 - k(x^2)'}{\left(x^2\right)^2}$$

$$= 2 - \frac{-2kx}{x^4} = 2 + \frac{2k}{x^3}$$

$$f''(2) = 0 \Leftrightarrow 2 + \frac{2k}{2^3} = 0 \Leftrightarrow 2 + \frac{k}{4} = 0 \Leftrightarrow 8 + k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -8$$

Pág. 166

33. Como $f'(0) = 0$ e f' é estritamente crescente, f tem concavidade voltada para cima e tem um mínimo absoluto para $x = 0$.

Opção (D).

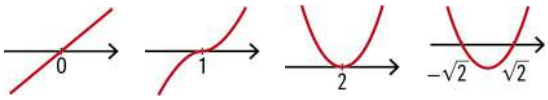
34. $f''(x) = x(x-1)^3(x-2)^2(x^2-2)$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)^3(x-2)^2(x^2-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee (x-1)^3 = 0 \vee (x-2)^2 = 0 \vee (x^2-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x - 1 = 0 \vee x - 2 = 0 \vee x^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = \pm\sqrt{2}$$



Zeros de f'' : $0, 1, 2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$

Como $(x-2)^2 > 0$, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, f'' não muda de sinal no ponto $x = 2$. Logo, o ponto $x = 2$ não é ponto de inflexão.

Opção (C)

Pág. 167

35. f tem concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0[$ e em $]5, +\infty[$.

$f''(-3) > 0$ e $f''(7) > 0$

f tem concavidade voltada para baixo em $]0, 5[$

$f''(2) < 0$.

A reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 tem declive positivo logo, $f'(1) > 0$.

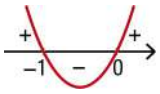
Opção (C)

36. $f''(x) = x(x+1)$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$$



x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
f''	+	0	−	0	+
f					

Opção (D)

37. Como o gráfico de f tem um ponto de inflexão em $x = 0$, o gráfico da segunda derivada de f muda de sinal no ponto de abcissa 0.

Opção (A)

Pág. 169

38. $f(x) = 3x^2 + bx + 2$; $y = 4x - 1$

$$f'(x) = \left(3x^2 + bx + 2\right)' = 6x + b$$

$$m = f'(x) \Leftrightarrow 6x + b = 4$$

Ponto de tangência: $(x, y) \Leftrightarrow (x, 4x-1)$

$$\begin{cases} 3x^2 + bx + 2 = 4x - 1 \\ 6x + b = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+(4-6x)x+2=4x-1 \\ b=4-6x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+\cancel{4x}-6x^2+2=\cancel{4x}-1 \\ b=4-6x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2=-3 \\ b=4-6x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ b=4-6x \end{cases}$$

$$\overset{x>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=1 \\ b=-2 \end{cases}$$

A abcissa do ponto é 1.

39.1. Como f é contínua no seu domínio, é contínua no ponto de abcissa 1. Assim,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{x^2-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{5+kx}{x+1}=\frac{5+k}{2}$$

$$\frac{5+k}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 5+k=1\Leftrightarrow k=-4$$

39.2. a) Comecemos por determinar o declive da reta t, ou seja, $f'(0)$.

Por definição,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x-1}{x^2-1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x-1-x^2-1}{x^2-1}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+x}{x\left(x^2-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}(x-1)(x+1)}=-1$$

Utilizando as regras de derivação:

$$f'(x)=\frac{(x-1)'(x^2-1)-(x-1)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=$$

$$=\frac{x^2-1-(x-1)(2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-1-2x^2+2x}{(x^2-1)^2}=$$

$$=\frac{-x^2+2x-1}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(0)=\frac{-0^2+2\times 0-1}{(0^2-1)^2}=\frac{-1}{(-1)^2}=\frac{-1}{1}=-1$$

$$m_t=f'(0)=-1\ ;\ f(0)=1;\ (0,1)$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-1=-1(x-0)\Leftrightarrow y=-x+1$$

b) Para $x>1$:

$$f'(x)=\left(\frac{5-4x}{x+1}\right)'$$

$$=\frac{(5-4x)'(x+1)-(5-4x)(x+1)'}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{-4(x+1)-(5-4x)\times 1}{(x+1)^2}=\frac{\cancel{-4x}-4-5\cancel{+4x}}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{-9}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=m_t\Leftrightarrow\frac{-9}{(x+1)^2}=-1\Leftrightarrow 9=(x+1)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2=9\Leftrightarrow x+1=-\sqrt{9}\vee x+1=\sqrt{9}$$

$$\Leftrightarrow x=-4\vee x=2$$

Vamos provar que o ponto $(2,f(2))$ pertence à reta t.

$$f(2)=\frac{5-4\times 2}{2+1}=\frac{5-8}{3}=-1$$

$$(2,-1)$$

$$y=-x+1$$

$-1=-2+1\Leftrightarrow -1=-1$; Verdadeiro

Logo, a reta t é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2.

40.1. $f'(x)=\left(\frac{x^3}{4}\right)'=\frac{3x^2}{4}$

$$f'(a)=\frac{3a^2}{4}$$

$$g'(x)=\left(-x^2+7x-11\right)'=-2x+7$$

$$g'(a)=-2a+7$$

$$f'(a)=g'(a)\Leftrightarrow\frac{3a^2}{4}=-2a+7$$

$$\Leftrightarrow 3a^2=-8a+28\Leftrightarrow 3a^2+8a-28=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\times 3\times(-28)}}{2\times 3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{-8\pm\sqrt{64+336}}{6}\Leftrightarrow a=\frac{-8\pm 20}{6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=-\frac{14}{3}\vee a=2$$

Como $a>0$, $a=2$.

40.2. $h(x)=g(x)+k$; $D_h=\mathbb{R}^+$

Pretendemos que os gráficos de f e h tenham um único ponto em comum e a mesma reta tangente nesse ponto.

Isso significa que:

$f(x)=h(x)$ e $f'(x)=h'(x)$

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{4}\right)'=\frac{3x^2}{4}$$

$$h'(x)=\left(g(x)+k\right)'=g'(x)+0=(-x^2+7x-11)'=$$

$$=-2x+7$$

$$f'(x)=h'(x)\Leftrightarrow\frac{3x^2}{4}=-2x+7$$

$$\Leftrightarrow 3x^2=-8x+28$$

$\Leftrightarrow 3x^2+8x-28=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-8\pm\sqrt{8^2-4\times3\times(-28)}}{2\times3}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-8\pm\sqrt{64+336}}{6}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-8\pm20}{6}$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{14}{3}\vee x=2$

Como $D_f=D_h=\mathbb{R}^+$, $x=2$

$f(2)=h(2)\Leftrightarrow\dfrac{2^3}{4}=g(2)+k$

$\Leftrightarrow 2=-2^2+7\times2-11+k$

$\Leftrightarrow 2=-4+14-11+k$

$\Leftrightarrow 2=-1+k$

$\Leftrightarrow k=3$

Outro processo:

Sabemos que $a=2$.

Para os gráficos de *f* e *h* se intersetarem num único ponto em que têm uma reta tangente comum,

$f(2)=h(2)$

$f(2)=\dfrac{2^3}{4}=\dfrac{8}{4}=2$

$h(2)=g(2)+k=-2^2+7\times2-11+k$

$=-4+14-11+k=-1+k$

$f(2)=h(2)\Leftrightarrow 2=-1+k\Leftrightarrow k=3$

41. $f(x)=x^2-5\quad D_f=\mathbb{R}\quad D_g=\mathbb{R}_0^+$

$g'(x)=\sqrt{x}$

$(g\circ f)'(3)=f'(3)\times g'(f(3))$

$=6\times g'(4)$

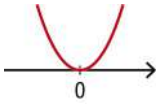
$=6\times\sqrt{4}=12$

C.A. $\left|\begin{array}{l} f(3)=3^2-5=4 \\ f'(x)=2x \\ f'(3)=2\times3=6 \end{array}\right.$

Pág. 170

42.1. $f'(x)=\left(x^4\right)'=4x^3$

$f''(x)=\left(4x^3\right)''=12x^2$



$f''(x)=0\Leftrightarrow 12x^2=0\Leftrightarrow x=0$

$f''(x)>0$, para todo $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, ou seja, no ponto de abcissa 0 não há mudança de sinal da segunda derivada de *f*. Logo, o gráfico de *f* não tem ponto de inflexão na origem.

42.2. $g'(x)=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}x'=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$g''(x)=\left(\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)'=\dfrac{1}{3}\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1}\times x'=-\dfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}=$

$=-\dfrac{2}{9x^{\frac{5}{3}}}=-\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}=-\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$

$D_{g''}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
-2	$-$	$-$	$-$
$9x\sqrt[3]{x^2}$	$-$	0	$+$
f''	$+$		$-$
f		0	

A origem do referencial é um ponto de inflexão do gráfico de *f*.

43. g'' é constante não nula.

Como g'' é constante não nula, o gráfico de g tem concavidade voltada para cima, se a constante for positiva ou voltada para baixo, se a constante for negativa.

Portanto, rejeitamos a opção (A) e a opção (D).

$g'(1)<0$.

Na opção (B), $g'(1)<0$. Na opção (C), $g'(1)>0$.

Opção (B).

43. Sejam $f(x)=m_1x+b_1$ e $g(x)=m_2x+b_2$

$f'(x)=m_1$ e $g'(x)=m_2$

$f''(x)=0$ e $g''(x)=0$

Como os gráficos das funções *f* e *g* são perpendiculares, $m_2=-\dfrac{1}{m_1}$.

$h(x)=f(x)\times g(x)$

$h'(x)=[f(x)\times g(x)]'$

$=f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)$

$=m_1\times(m_2x+b_2)+(m_1x+b_1)\times m_2$

$=m_1\times\left(-\dfrac{1}{m_1}x+b_2\right)+(m_1x+b_1)\times\left(-\dfrac{1}{m_1}\right)$

$=-x+m_1b_2-x-\dfrac{b_1}{m_1}=-2x+m_1b_2-\dfrac{b_1}{m_1}$

$h''(x)=\left(-2x+m_1b_2-\dfrac{b_1}{m_1}\right)'=-2+0-0=-2$

45. A segunda derivada da função *g* tem dois zeros, o zero e o 5.

Como apenas no zero muda de sinal, o ponto de abcissa zero é o único ponto de inflexão do gráfico da função *g*.

Opção (A)

Pág. 171

46.1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3+3x^2+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3\right)=-2\left(-\infty\right)^3=$

$=-2\left(-\infty\right)=+\infty$

46.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^5-2x^3+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^5\right)=3\left(+\infty\right)^5=$

$=3\left(+\infty\right)=+\infty$

46.3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^2\left(1-2x^3\right)\right]=\left(-\infty\right)^2\left[1-\left(-\infty\right)^3\right]=$

$=+\infty\times\left(+\infty\right)=+\infty$

46.4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}\left(x^2-x^3\right)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\left(x-x^2\right)}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-x^2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^2\right)=-\left(-\infty\right)^2=-\infty$

46.5. $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x+2}{x^2-x}=\frac{2}{0^+}=+\infty$

46.6. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x+2}{x^2-x}=\frac{2}{0^-}=-\infty$

46.7. $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x+2}{x^2-x}=\frac{1+2}{0^-}=\frac{3}{0^-}=-\infty$

46.8. $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x+2}{x^2-x}=\frac{1+2}{0^+}=\frac{3}{0^+}=+\infty$

47.1. $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(1)}{0^-}\underset{f(1)>0}{=}-\infty$

47.2. $\lim\limits_{x\to5^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(5)}{0^+}\underset{f(5)<0}{=}-\infty$

47.3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{+\infty}{-2}=-\infty$

47.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{-2}{+\infty}=0$

47.5. $\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{g(3)}\underset{g(3)>0}{=}0$

47.6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+g(x)\right]=+\infty+(-2)=+\infty-2=+\infty$

47.7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)\times g(x)\right]=+\infty\times(-2)=+\infty\times2=-\infty$

47.8. $\lim\limits_{x\to3}\left[f(x)\times g(x)\right]=0\times g(3)=0$

48. Atendendo aos elementos sugeridos na figura,

$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=k$, com $k\in\mathbb{R}^+$

$f(2)=0$

Então, $\lim\limits_{x\to2}f(x)>f(2)$

Opção (B)

Pág. 172

49.1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x}{\pi x}\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(3\sin x\right)'}{\left(\pi x\right)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3\cos x}{\pi}$

$=\frac{3\cos0}{\pi}=\frac{3}{\pi}$

49.2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2x}{x^2}\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\tan^2x\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\tan x\times\left(\tan x\right)'}{2x}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\tan x\times\frac{1}{\cos^2x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x\cos^2x}\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2x}}{(x)'\cos^2x+x\left(\cos^2x\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2x}}{\cos^2x+x\times2\cos x\left(\cos x\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2x}}{\cos^2x-2x\cos x\sin x}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^20}}{\cos^20-2\times0\times\cos0\times\sin0}=\frac{\frac{1}{1}}{1-0}=1$

49.3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2x-1}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\left(1-\cos^2x\right)}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin^2x}{x\sin x}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x}{x}\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(-\sin x\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\cos x}{1}=$

$=\frac{-\cos0}{1}=-1$

49.4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x+\tan x}{\sin x}\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(2x+\tan x\right)'}{\left(\sin x\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2+\frac{1}{\cos^2x}}{\cos x}==\frac{2+\frac{1}{\cos^20}}{\cos0}=\frac{2+1}{1}=3$

49.5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x-1}{1+\cos x}=\frac{2\times0-1}{1+\cos0}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$

49.6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{5x\sin x}{\cos x-1}\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(5x\sin x\right)'}{\left(\cos x-1\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(5x)'\sin x+5x\left(\sin x\right)'}{-\sin x-0}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{5\sin x+5x\cos x}{-\sin x}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{5\cancel{\sin x}}{-\cancel{\sin x}}+\lim\limits_{x\to0}\frac{5x\cos x}{-\sin x}=-5+\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(5x\cos x\right)'}{\left(-\sin x\right)'}=$

$=-5+\lim\limits_{x\to0}\frac{(5x)'\cos x+5x\left(\cos x\right)'}{-\cos x}=$

$=-5+\lim\limits_{x\to0}\frac{5\cos x-5x\sin x}{-\cos x}=$

$=-5+\frac{5\cos0-5\times0\times\sin0}{-\cos0}=-5+\frac{5-0}{-1}=-10$

49.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)'}{(\sin^2 x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{\sin x}}{2\cancel{\sin x}\,(\sin x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2\cos x}=\dfrac{1}{2\times\cos 0}=\dfrac{1}{2\times 1}=\dfrac{1}{2}$

49.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{\tan(2x)}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\sin(3x)\right]'}{\left[\tan(2x)\right]'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3x)'\cos(3x)}{\frac{(2x)'}{\cos^2(2x)}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos(3x)}{\frac{2}{\cos^2(2x)}}=$

$=\dfrac{3\times\cos(3\times 0)}{\frac{2}{\cos^2(2\times 0)}}=\dfrac{3\times 1}{\frac{2}{1}}=\dfrac{3}{2}$

49.9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{4x-\pi}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{(\tan x-1)'}{(4x-\pi)'}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\frac{(x)'}{\cos^2 x}}{4}=$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}}{4}=\dfrac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{4\times\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

49.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2-x)'}{(\sin x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-1}{\cos x}=\dfrac{2\times 0-1}{\cos 0}=\dfrac{-1}{1}=-1$

49.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x}{\sin^2 x}=\dfrac{1+\cos 0}{\sin^2 0}=\dfrac{1+1}{0^+}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty$

49.12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sin(ax-a)}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left[x\sin(ax-a)\right]'}{(x^2-1)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x)'\sin(ax-a)+x\left[\sin(ax-a)\right]'}{2x}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(ax-a)+x\times(ax-a)'\cos(ax-a)}{2x}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(ax-a)+x\times a\cos(ax-a)}{2x}=$

$=\dfrac{0+a\cos 0}{2\times 1}=\dfrac{a}{2}$

50. $f(x)=\begin{cases}(k+1)\times\cos x & \text{se}\quad x\le 0\\ \dfrac{x+\tan x}{x} & \text{se}\quad 0<x<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

• f é contínua em $]-\infty,0[$ por ser, nesse intervalo, definida pelo produto de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$.

• f é contínua em $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, por ser, nesse intervalo, definida pela soma e o quociente de funções contínuas em $\mathbb{R}$ e $x\neq 0$

• f é contínua para $x=0$ se

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[(k+1)\times\cos x\right]=$

$=(k+1)\times\cos 0=k+1=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+\tan x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x+\tan x)'}{(x)'}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1+\frac{1}{\cos^2 x}}{1}=1+\dfrac{1}{\cos^2 0}=1+1=2$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow k+1=2\Leftrightarrow k=1$

Opção (C)

51. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\sin x}{x} & \text{se}\quad x<0\\ k & \text{se}\quad x=0\\ \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{se}\quad x>0\end{cases}$

• f é contínua para $x=0$ se

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x+\sin x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(x+\sin x)'}{(x)'}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1+\cos x}{1}=\dfrac{1+\cos 0}{1}=1+1=2$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\sin x)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x}{2}=\dfrac{\cos 0}{2}=\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$

Logo, a função f é descontínua em $x=0$, qualquer que seja o valor de k.

52. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+6x-16}{x^2+x-6} & \text{se}\quad 0<x<2\\ 1+\cos(x-2) & \text{se}\quad x\ge 2\end{cases}$

f é contínua em $]0,2[$ por ser, nesse intervalo, definida por uma função racional e $x^2-x-6\neq 0$

f é contínua em $]2,+\infty[$, por ser, nesse intervalo, definida pela soma e a composta de funções contínuas em $\mathbb{R}$ (a função constante (1) e a composta das funções $\cos x$ e $x-1$).

f é contínua em $x=2$ se $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=f(2)$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+6x-16}{x^2+x-6} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}} \lim_{x\to 2^-} \frac{\left(x^2+6x-16\right)'}{\left(x^2+x-6\right)'}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{2x+6}{2x+1} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left[1+\cos(x-2)\right] =$$

$$= 1+\cos 0 = 1+1 = 2 = f(2)$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$$

Então, *f* é contínua em $x = 2$.

Logo, *f* é uma função contínua.

Pág. 173

53.1. $f(x) = \frac{x}{x+3}$; $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

f é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical em –3.

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} \frac{x}{x+3} = \frac{-3}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

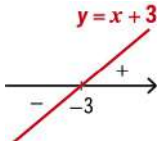
A reta de equação $x = -3$ é a única assíntota vertical ao gráfico de *f*.

53.2. $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$

C.A. $x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x+1=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=-1$



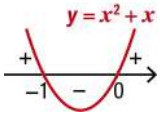
$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2+x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

f é contínua. Logo, só poderão existir assíntotas verticais em –1 e 0.

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$



$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

As retas de equações $x = -1$ e $x = 0$ são as únicas assíntotas verticais ao gráfico de *f*.

53.3. $f(x) = \frac{x}{x^2+2x}$

C.A. $x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x+2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-2$

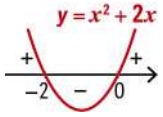
$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2+2x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$

f é contínua. Logo, só poderão existir assíntotas verticais em –2 e 0.

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x}{x^2+2x} = \frac{-2}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$



$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x+2} =$$

$$= \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2}$$

A reta de equação $x = -2$ é a única assíntota vertical ao gráfico de *f*.

53.4. $f(x) = \frac{x}{x^3+x}$

C.A. $x^3+x=0 \Leftrightarrow x(x^2+1)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x^2+1=0$ (Equação impossível)

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^3+x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

f é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical em 0.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^3+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(x^2+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{0^2+1} = 1 \text{ (limite finito)}$$

A reta de equação $x = 0$ não é assíntota ao gráfico de *f*.

Logo, o gráfico da função *f* não tem assíntotas verticais.

53.5. $f(x) = \frac{x^2-4}{2x^2-3x-2}$

C.A. $2x^2-3x-2=0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2-4\times 2\times(-2)}}{2\times 2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2-4\times 2\times(-2)}}{2\times 2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 2$$

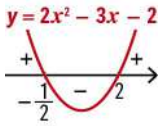
$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2-3x-2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$

f é contínua. Logo, só poderão existir assíntotas verticais em $-\frac{1}{2}$ e 2.

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{x^2-4}{2x^2-3x-2} = \frac{-\frac{15}{4}}{0} = \infty$$

$\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^-} f(x) = \dfrac{-\frac{15}{4}}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x) = \dfrac{-\frac{15}{4}}{0^-} = +\infty$



$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{2x^2-3x-2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}} \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-4)'}{(2x^2-3x-2)'}$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x}{4x-3} = \dfrac{2\times 2}{4\times 2-3} = \dfrac{4}{5}$ (limite finito)

A reta de equação $x = -\dfrac{1}{2}$ é a única assíntota vertical ao gráfico de *f*.

53.6. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2+1 \neq 0\} = \mathbb{R}$ onde $x^2+1\neq 0$ é uma condição universal.

f é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, o gráfico de *f* não tem assíntotas verticais.

53.7. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{se } x < -1 \\ x+1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R}$ e *f* é contínua para $x \neq -1$.

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x+1) = 0 = f(-1)$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$

A reta de equação $x = -1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de *f*.

53.8. $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{x-1}{x^2-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R}$ e *f* é contínua para $x \neq 1$.

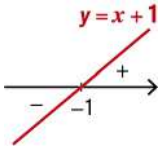
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (2-x^2) = 2-1 = 1 = f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\cancel{x-1}}{x\cancel{(x-1)}} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{1} = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$. Então, a função *f* é contínua para $x = 1$

Logo, a função *f* é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que, não existem assíntotas verticais ao seu gráfico.

54. Se *f* é contínua de domínio $\mathbb{R}^+$, contradomínio $\mathbb{R}^-$ e se $x = 0$ é assíntota ao seu gráfico, então, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.



Logo, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{-x} = \dfrac{-\infty}{0^-} = +\infty$

Opção (D)

55.1. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2+2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{2x+1}{x+2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}} \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{(2x+1)'}{(x+2)'} \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{2}{1} = 2$

Logo, a reta de equação $y = 2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função *f*, em $+\infty$ e em $-\infty$.

55.2. $f(x) = \dfrac{1-2x-3x^2}{x^2+1}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2+1 \neq 0\} = \mathbb{R}$, em que $x^2+1\neq 0$ é uma condição universal.

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{1-2x-3x^2}{x^2+1}$

$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}} \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{(1-2x-3x^2)'}{(x^2+1)'} = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{-2-6x}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}$

$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}} \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{(-2-6x)'}{(2x)'} = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{-6}{2} = -3$

Logo, a reta de equação $y = -3$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função *f*, em $+\infty$ e em $-\infty$.

55.3. $f(x) = \dfrac{|x|\,x}{x^2+1} = \begin{cases} \dfrac{x\times x}{x^2+1} & \text{se } x \geq 0 \\ -\dfrac{x\times x}{x^2+1} & \text{se } x < 0 \end{cases} =$

$= \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+1} & \text{se } x \geq 0 \\ -\dfrac{x^2}{x^2+1} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(x^2)'}{(x^2+1)'} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}} = 1$

A reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f* em $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-x^2}{x^2+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{(-x^2)'}{(x^2+1)'} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-\cancel{2x}}{\cancel{2x}} = -1$

A reta de equação $y = -1$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f* em $-\infty$.

As retas de equações $y = 1$ e $y = -1$ são assíntotas horizontais ao gráfico de *f* quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$, respetivamente.

55.4. $f(x)=\dfrac{2+|x|}{x+1}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}: x+1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2+x}{x+1} & \text{se} \quad x\geq 0\\ \dfrac{2-x}{x+1} & \text{se} \quad x<0\wedge x\neq -1\end{cases}$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+x}{x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2+x)'}{(x+1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1}=1$

A reta de equação $y=1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-x}{x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2-x)'}{(x+1)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{1}=-1$

A reta de equação $y=-1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $-\infty$.

As retas de equações $y=1$ e $y=-1$ são assíntotas horizontais ao gráfico de f quando $x\to+\infty$ e quando $x\to-\infty$, respetivamente.

56.1. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}: x\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

• Se $x\to+\infty$:

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2-3x+1)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{2x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x-3)'}{(2x)'}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{2}=1$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{x}-x\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}-3x+1\cancel{-x^2}}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(-3x+1)'}{(x)'}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3}{1}=-3$

A reta de equação $y=x-3$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

• Se $x\to-\infty$:

De forma idêntica se verifica que:

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=-3$

E que a reta de equação $y=x-3$ é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

A reta de equação $y=x-3$ é assíntota ao gráfico de f em $x\to+\infty$ e quando $x\to-\infty$.

56.2. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+5}{x-1}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}: x-1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

• Se $x\to+\infty$:

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+5}{x(x-1)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2-3x+5)'}{(x^2-x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{2x-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x-3)'}{(2x-1)'}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{2}=1$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+5}{x-1}-x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}-3x+5\cancel{-x^2}+x}{x-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(-2x+5)'}{(x-1)'}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{1}=-2$

A reta de equação $y=x-2$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

• Se $x\to-\infty$:

De forma idêntica se verifica que:

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$; $b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=-2$

E que a reta de equação $y=x-2$ é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

A reta de equação $y=x-2$ é assíntota ao gráfico de f em $x\to+\infty$ e quando $x\to-\infty$.

56.3. $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2}{3-x}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}: 3-x\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

• Se $x\to+\infty$:

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-4x^2}{x(3-x)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^3-4x^2)'}{(3x-x^2)'}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-8x}{3-2x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3x^2-8x)'}{(3-2x)'}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x-8}{-2}=\dfrac{+\infty}{-2}=-\infty$

Logo, o gráfico de f não tem assíntota não vertical em $+\infty$.

• Se $x\to-\infty$:

De forma idêntica se verifica que

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{-\infty}{-2}=+\infty$

E que o gráfico de f não tem assíntota não vertical em $-\infty$.

O gráfico de f não tem assíntotas não verticais.

56.4. $f(x)=\dfrac{1-2x-3x^2}{x+x^2}$

C.A.

$x+x^2=0 \Leftrightarrow x(1+x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee 1+x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}: x+x^2\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$

• Se $x\to+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2x-3x^2}{x(x+x^2)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-2x-3x^2)'}{(x^2+x^3)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2-6x}{2x+3x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(-2-6x)'}{(2x+3x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-6}{2+6x}=\frac{-6}{+\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2x-3x^2}{x+x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2-6x}{1+2x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(-2-6x)'}{(1+2x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-6}{2}=-3$$

Logo, a reta de equação $y=-3$ é assíntota não vertical ao gráfico de f em $+\infty$.

• Se $x\to-\infty$:

De forma idêntica se verifica que:

$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$; $b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=-3$

Logo, a reta de equação $y=-3$ é assíntota não vertical ao gráfico de f em $-\infty$.

A reta de equação $y=-3$ é assíntota (horizontal) ao gráfico de f em $x\to+\infty$ e quando $x\to-\infty$.

56.5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x+1} & \text{se } x<0\wedge x\neq -1\\ x^2+x & \text{se } x\geq 0\end{cases}$

$D_f=\mathbb{R}$

• Se $x\to+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$$

Logo, o gráfico de f não tem assíntota não vertical em $+\infty$.

• Se $x\to-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x(x+1)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2)'}{(x^2+x)'}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{2x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x)'}{(2x+1)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{2}=1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=-1$$

Logo, a reta de equação $y=x-1$ é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

A reta de equação $y=x-1$ é a única assíntota não vertical ao gráfico de f.

56.6. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{se } x<0\\ \dfrac{x^2}{2x+1} & \text{se } x\geq 0\end{cases}$

$D_f=\mathbb{R}$

• Se $x\to+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x(2x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2)'}{(2x^2+x)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{4x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{(4x+1)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2x+1}-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-2x^2-x}{4x+2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{4x+2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L'H}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(-x)'}{(4x+2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4}$$

A reta de equação $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

• Se $x\to-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{+\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0$$

A reta de equação $y=0$ é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

As retas de equações $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ e $y=0$ são assíntotas não verticais ao gráfico de f em $+\infty$ e em $-\infty$, respetivamente.

Pág. 174

57.1. $f'(x)=\left(\dfrac{12}{x+1}+\dfrac{x}{3}\right)'=$

$$=\frac{(12)'(x+1)-12(x+1)'}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}=\ =\frac{-12}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-12}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}=0\Leftrightarrow\frac{-36+(x+1)^2}{3(x+1)^2}=0$$

$\Leftrightarrow -36+(x+1)^2=0\wedge 3(x+1)^2\neq 0$,

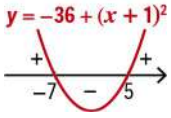
em que $3(x+1)^2 \neq 0$ designa uma condição universal em $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 36$

$\Leftrightarrow x+1 = \pm\sqrt{36}$

$\Leftrightarrow x = -1-6 \vee x = -1+6$

$\Leftrightarrow x = -7 \vee x = 5$



x	$-\infty$	-7		-1		$\mathbf{5}$	$+\infty$
f'	+	0	−	N.D.	−	0	+
f	↗	$-\frac{13}{3}$	↘	N.D.	↘	$\frac{11}{3}$	↗
		Máx.				Mín.	

$3(x+1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$f(-7) = \frac{12}{-7+1} + \frac{(-7)}{3} = -2 - \frac{7}{3} = -\frac{13}{3}$

$f(5) = \frac{12}{5+1} + \frac{5}{3} = 2 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$

f é estritamente crescente em $]-\infty,-7]$ e em $[5,+\infty[$ e estritamente decrescente em $[-7,-1[$ e em $]-1,5]$.

f tem um máximo relativo igual a $-\frac{13}{3}$ para $x=-7$ e um mínimo relativo igual a $\frac{11}{3}$ para $x=5$.

57.2. a) $m_r = f'(2) = \frac{-12}{(2+1)^2} + \frac{8}{3} = -\frac{12}{9} + \frac{1}{3}$

$= -\frac{4}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{3}{3} = -1$

$f(2) = \frac{12}{2+1} + \frac{2}{3} = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$

$r: y - \frac{14}{3} = -1(x-2) \Leftrightarrow y = -x + 2 + \frac{14}{3}$

$\Leftrightarrow y = -x + \frac{20}{3}$

b) Seja a a abscissa do ponto de f em que a reta tangente é paralela à reta r.

$f'(a) = -1 \Leftrightarrow \frac{-12}{(a+1)^2} + \frac{1}{3} = -1$

$\Leftrightarrow \frac{-12}{(a+1)^2} + \frac{1}{3} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{-12}{(a+1)^2} + \frac{4}{3} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{-36 + 4(a+1)^2}{3(a+1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow -36 + 4(a+1)^2 = 0 \wedge 3(a+1)^2 \neq 0$,

em que $3(a+1)^2 \neq 0$ é uma condição universal em $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$\Leftrightarrow 4(a+1)^2 = 36$

$\Leftrightarrow (a+1)^2 = 9 \Leftrightarrow a+1 = \pm 3$

$\Leftrightarrow a = -1-3 \vee a = -1+3$

$\Leftrightarrow a = -4 \vee a = 2$,

no entanto $a=2$ é a abscissa do ponto onde a reta tangente divide a reta r.

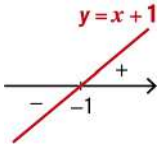
A abscissa do ponto onde a reta tangente a f é paralela à reta r é -4.

57.3. $f''(x) = \left(\frac{-12}{(x+1)^2} + \frac{1}{3}\right)' =$

$= \frac{(-12)'(x+1)^2 - (-12)\left[(x+1)^2\right]'}{\left[(x+1)^2\right]^2} + 0 =$

$= \frac{-12 \times 2(x+1)(x+1)'}{(x+1)^4} = \frac{24 \times 1}{(x+1)^3} = \frac{24}{(x+1)^3}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''	−	N.D.	+
f		N.D.	



O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-1[$ e voltada para cima em $]-1,+\infty[$. Não tem pontos de inflexão.

57.4. Assíntotas verticais:

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ e f é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical em -1.

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{12}{x+1} + \frac{x}{3}\right) = \frac{12}{0} - \frac{1}{3} = \infty$

- $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \frac{12}{0^+} - \frac{1}{3} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \frac{12}{0^-} - \frac{1}{3} = -\infty$

A reta de equação $x=-1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f.

Assíntotas não verticais:

• Se $x \to +\infty$:

$m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{12}{x+1} + \frac{x}{3}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{12}{x^2+x} + \frac{1}{3}\right) = \frac{12}{+\infty} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - mx\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{12}{x+1} + \frac{x}{3} - \frac{1}{3}x\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{12}{x+1} = \frac{12}{+\infty} = 0$

A reta de equação $y = \frac{1}{3}x$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$

• Se $x \to -\infty$:

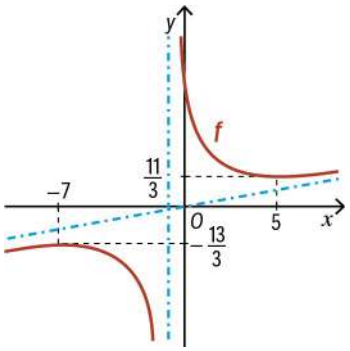
De forma idêntica se verifica que:

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{3}$; $b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=0$

e que a reta de equação $y=\dfrac{1}{3}x$ é assíntota do gráfico de *f* em $-\infty$.

As retas de equações $x=-1$ e $y=\dfrac{1}{3}x$ são assíntotas ao gráfico de *f*.

57.5.



$D'_f=\left]-\infty,-\dfrac{13}{3}\right]\cup\left[\dfrac{11}{3},+\infty\right[$

58.1. • *f* é contínua em $x=0$, se

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(x^2+2x\right)=0^2+2\times0=0=f(0)$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(-x^3\right)=-0^3=0$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$

Logo, a função *f* é contínua em $x=0$.

• *f* é derivável em $x=0$, se $f'\left(0^+\right)=f'\left(0^-\right)$

$f'\left(0^-\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2+2x-0}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x(x+2)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}(x+2)=0+2=2$

$f'\left(0^+\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-x^3-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-x^3}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\left(-x^2\right)=-0^2=0$

$f'\left(0^+\right)\neq f'\left(0^-\right)$

Logo, a função *f* não é derivável no ponto $x=0$.

58.2. Para $x>0$:

$f'(x)=\left(-x^3\right)'=-3x^2$

$m_r=f'(1)=-3\times1^2=-3$

$f(1)=-1^3=-1$

$r:y-(-1)=-3(x-1)\Leftrightarrow y+1=-3x+3$

$\Leftrightarrow y=-3x+2$

Para $x<0$, $f'(x)=\left(x^2+2x\right)'=2x+2$.

Seja $a<0$ a abcissa do ponto do gráfico de *f* em que a reta tangente é paralela à reta *r*,

$f'(a)=m_r\Leftrightarrow2a+2=-3\Leftrightarrow2a=-5\Leftrightarrow a=-\dfrac{5}{2}$

$r:y=-3x+2$ e, no ponto de abcissa $-\dfrac{5}{2}$, a reta tangente ao gráfico de *f* é paralela à reta *r*.

58.3. Para $x<0$:

$f'(x)=2x+2$

$f'(x)=0\Leftrightarrow2x+2=0\Leftrightarrow2x=-2\Leftrightarrow x=-1$

Para $x>0$:

$f'(x)=-3x^2$

$f'(x)=0\Leftrightarrow-3x^2=0\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	N.D.	$-$
f	↘	-1	↗	0	↘
		Mín.		Máx.	

$f(-1)=(-1)^2+2(-1)=1-2=-1$

f é estritamente decrescente em $]-\infty,-1]$ e em $[0,+\infty[$ e estritamente crescente em $[-1,0]$.

f tem um mínimo relativo igual a -1 para $x=-1$ e um máximo relativo igual a 0 para $x=0$.

58.4. Para $x<0$:

$f''(x)=(2x+2)'=2$

f'' não tem zeros para $x<0$.

Para $x>0$:

$f''(x)=\left(-3x^2\right)'=-6x$

$f''(x)=0\Leftrightarrow-6x=0\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$+$	N.D.	$-$
f		0	

O gráfico de *f* tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty,0[$ e voltada para baixo em $]0,+\infty[$.

A origem do referencial é um ponto de inflexão do gráfico de *f*.

59.1. $f(x)=\dfrac{4x^2}{4x^2+3}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:4x^2+3\neq0\right\}=\mathbb{R}$, uma vez que $4x^2+3\neq0$ designa uma condição universal.

f é continua em $\mathbb{R}$ por ser uma função racional.

$f'(x)=\left(\dfrac{4x^2}{4x^2+3}\right)'=$

$=\dfrac{\left(4x^2\right)'\left(4x^2+3\right)'-4x^2\left(4x^2+3\right)'}{\left(4x^2+3\right)^2}=$

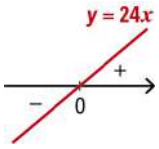
$=\dfrac{8x\left(4x^2+3\right)-4x^2(8x)}{\left(4x^2+3\right)^2}=$

$$= \frac{\cancel{32x^3} + 24x - \cancel{32x^3}}{\left(4x^2+3\right)^2} = \frac{24x}{\left(4x^2+3\right)^2} =$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{24x}{\left(4x^2+3\right)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 24x = 0 \wedge \left(4x^2+3\right)^2 \neq 0,$$

em que $\left(4x^2+3\right)^2 \neq 0$ é uma condição universal.



$$\Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	−	0	+
f	↘	0	↗
		Mín.	

$$\left(4x^2+3\right)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(0) = \frac{4\times 0^2}{4\times 0^2+3} = \frac{0}{3} = 0$$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$, estritamente crescente em $[0, +\infty[$ e tem um mínimo absoluto 0 para $x = 0$

$$f''(x) = \left(\frac{24x}{\left(4x^2+3\right)^2}\right)' =$$

$$= \frac{(24x)'\left(4x^2+3\right)^2 - 24x\left(\left(4x^2+3\right)^2\right)'}{\left(\left(4x^2+3\right)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{24\left(4x^2+3\right)^2 - 24x\times 2\left(4x^2+3\right)\left(4x^2+3\right)'}{\left(4x^2+3\right)^4} =$$

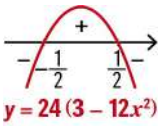
$$= \frac{24\left(4x^2+3\right)\left(4x^2+3-2x\times 8x\right)}{\left(4x^2+3\right)^4} =$$

$$= \frac{24\left(4x^2+3-16x^2\right)}{\left(4x^2+3\right)^3} = \frac{24\left(3-12x^2\right)}{\left(4x^2+3\right)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{24\left(3-12x^2\right)}{\left(4x^2+3\right)^3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24\left(3-12x^2\right) = 0 \wedge \left(4x^2+3\right)^3 \neq 0,$$

em que $\left(4x^2+3\right)^3 \neq 0$ é uma condição universal.



$$\Leftrightarrow 3-12x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f'	−	0	+	0	−
f		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$	
		P.I.		P.I.	

$$\left(4x^2+3\right)^3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+3} = \frac{4\times\frac{1}{4}}{4\times\frac{1}{4}+3} = \frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+3} = \frac{4\times\frac{1}{4}}{4\times\frac{1}{4}+3} = \frac{1}{4}$$

f tem concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ e em $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$; voltada para cima em $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ e tem dois pontos de inflexão de coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

• Assíntotas:

Assintotas verticais:

$D_f = \mathbb{R}$ e f é contínua. Logo, não tem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

Se $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{x\left(4x^2+3\right)} \underset{\text{R L'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}$$

$$\underset{\text{R L'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(4x^2\right)'}{\left(4x^3+3x\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{12x^2+3} \underset{\text{R L'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}$$

$$\underset{\text{R L'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(8x)'}{\left(12x^2+3\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{8}{24x} = \frac{8}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{4x^2+3} \underset{\text{R L'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}$$

$$\underset{\text{R L'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(4x^2\right)'}{\left(4x^2+3\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{8x} = 1$$

A reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $+\infty$

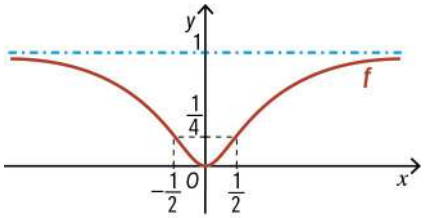
Se $x \to -\infty$:

De forma idêntica se verifica que:

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 0;\ b = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - x\right] = 1$$

e que a reta de equação $y = 1$ é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

$D'_f = [0,1[$



59.2. $f(x) = \dfrac{x^2+2x+16}{x+2}$

- $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

f é continua em $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ por ser uma função racional.

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+2x+16}{x+2}\right)' =$$

$$= \frac{\left(x^2+2x+16\right)'(x+2) - \left(x^2+2x+16\right)(x+2)'}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{(2x+2)(x+2) - \left(x^2+2x+16\right)\times 1}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{2x^2+4x+2x+4-x^2-2x-16}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-12}{(x+2)^2}$$

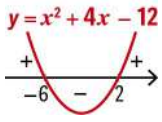
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+4x-12}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2+4x-12 = 0 \wedge (x+2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2-4\times 1\times(-12)}}{2\times 1} \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 8}{2} \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = -\frac{12}{2} \vee x = \frac{4}{2}\right) \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow x = -6 \vee x = 2$$

x	$-\infty$	-6		-2		2	$+\infty$
f'	+	0	−	N.D.	−	0	+
f	↗	−10	↘	N.D.	↘	6	↗
		Máx.				Mín.	

$(x+2)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$f(-6) = \frac{(-6)^2+2(-6)+16}{-6+2} = \frac{36-12+16}{-4} = -10$$

$$f(2) = \frac{2^2+2\times 2+16}{2+2} = \frac{4+4+16}{4} = 6$$

f é estritamente crescente em $]-\infty,-6]$ e em $[2,\infty[$, é estritamente decrescente em $[-6,-2[$ e em $]-2,2]$. f tem um máximo relativo igual a -10 para $x=-6$ e um mínimo relativo igual a 6 para $x=2$.

- $f''(x) = \left(\dfrac{x^2+4x-12}{(x+2)^2}\right)'$

$$= \frac{\left(x^2+4x-12\right)'(x+2)^2 - \left(x^2+4x-12\right)\left((x+2)^2\right)'}{\left((x+2)^2\right)^2}$$

$$= \frac{(2x+4)(x+2)^2 - \left(x^2+4x-12\right)\times 2(x+2)\times(x+2)'}{(x+2)^4}$$

$$= \frac{(x+2)\left[(2x+4)(x+2) - 2\times 1\left(x^2+4x-12\right)\right]}{(x+2)^4}$$

$$= \frac{2x^2+4x+4x+8-2x^2-8x+24}{(x+2)^3}$$

$$= \frac{32}{(x+2)^3}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{32}{(x+2)^3} = 0$ (Equação impossível)

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f'	−	N.D.	+
f		N.D.	

f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-2[$ e voltada para cima em $]2,+\infty[$ e não tem pontos de inflexão.

• Assíntotas:

Assintotas verticais:

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e f é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical em -2.

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x^2+12x+16}{x+2} = \frac{4-24+16}{0} = \frac{-4}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

Assíntotas não verticais:

Se $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+16}{x(x+2)} =$$

$$\underset{\text{R L'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2+2x+16\right)'}{\left(x^2+2x\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+2}{2x+2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+2x+16}{x+2} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+16-x^2-2x}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{16}{x+2} = \frac{16}{+\infty} = 0$$

A reta de equação $y=x$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $+\infty$

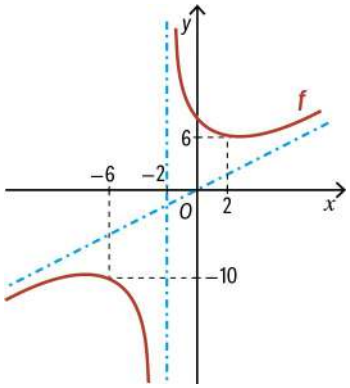
Se $x \to -\infty$:

De forma idêntica se verifica que:

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$; $b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=0$

E que a reta de equação $y=x$ é assíntota ao gráfico de *f* em $-\infty$.

$D'_f=]-\infty,-10]\cup[6,+\infty[$



Pág. 175

60.1. Se a reta de equação $y=2x+1$ é uma assíntota ao gráfico de f, de domínio $\mathbb{R}^+$, então

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=1$.

Dado que $D_h=\mathbb{R}^+$, a assíntota horizontal ao gráfico de h apenas poderá existir quando $x\to+\infty$.

Seja $y=b$ uma equação dessa assíntota.

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}$

$=2\times\dfrac{1}{+\infty}=2\times0=0$

Logo, a reta de equação $y=0$ (eixo Ox) é uma assíntota ao gráfico de h quando $x\to+\infty$.

60.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{\frac{f(x)}{x}}$

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}}=\dfrac{1+\frac{1}{+\infty}}{2}=\dfrac{1+0}{2}=\dfrac{1}{2}$

Opção (B)

61. $f'(0)=-2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-2$

$\underset{(f(0)=3)}{\Leftrightarrow}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-3}{x}=-2$

Se a reta de equação $y=2x-1$ é assíntota ao gráfico de f, de domínio $\mathbb{R}^+$, então,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$

$\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3-f(x)}{4x}\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{-3+f(x)}{x}\right)\right]^2$

$=\left(-\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-3}{x}\right)^2=\left(-\dfrac{1}{4}\times2\right)^2=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

$\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3-f(x)}{4x}\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}}=\dfrac{1}{4}$

Pág. 175

62.1. *f* é contínua em $]-\infty,1[$ e em $]1,+\infty[$, por ser, nestes intervalos, definida pela composta de funções contínuas em $\mathbb{R}$. Logo, só poderá existir assíntota vertical em $x=1$.

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1+\cos(\pi x)}{x-1}\underset{\text{R L'H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\left(1+\cos(\pi x)\right)'}{(x-1)'}=$

$=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-(\pi x)'\sin(\pi x)}{1}=\lim\limits_{x\to1^-}\left(-\pi\sin(\pi x)\right)=$

$=-\pi\times0=0$ (limite finito)

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{\sin(x-1)}{kx-k}-k\right)=$

$\underset{\text{R L'H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\left(\sin(x-1)\right)'}{(kx-k)'}-k=$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)'\cos(x-1)}{k}-k=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\cos(x-1)}{k}-k=$

$=\dfrac{1}{k}-k$ (limite finito)

Logo, o gráfico de *f* não tem assíntotas verticais, qualquer que seja o valor de k.

62.2. *f* é contínua para $x=1$ se

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\dfrac{1}{k}-k$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)\Leftrightarrow\dfrac{1}{k}-k=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{1-k^2}{k}=0\Leftrightarrow1-k^2=0\wedge k\neq0\Leftrightarrow k^2=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=1\vee k=-1$

63.1. *f* é contínua em $]-\pi,0[$, por ser, nesse intervalo, definida pelo quociente e a composta de funções contínuas em $\mathbb{R}$ e $x\neq0$.

f é contínua em $]0,+\infty[$, por ser, nesse intervalo definida por uma função racional e $x+1\neq0$.

f é contínua em $x=0$ se

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2+1}{x+1}+2\right)=\frac{0+1}{0+1}+2=1+2=3=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin(3x)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{(\sin(3x))'}{(x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{(3x)'\cos(3x)}{1}=\lim\limits_{x\to 0^-}(3\cos(3x))=$

$=3\cos 0=3$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$

Então, *f* é contínua em $x=0$.

Logo, a função *f* é contínua.

63.2. • Assíntotas verticais:

f é contínua em $]-\pi,+\infty[$. Logo, só poderá existir assíntota vertical em $x=-\pi$

$\lim\limits_{x\to -\pi^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -\pi^+}\frac{\sin(3x)}{x}=\frac{0}{-\pi}=0$

O gráfico de *f* não tem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x+1}+2}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2+x}+\frac{2}{x}\right)\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^2+1)'}{(x^2+x)'}+0=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{(2x+1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{2}=1$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}+2-x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2-x}{x+1}+2=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x}{x+1}+2\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1-x)'}{(x+1)'}+2=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{1}+2=-1+2=1$

A reta de equação $y=x+1$ é assíntota ao gráfico de *f* em $+\infty$.

A reta de equação $y=x+1$ é a única assíntota ao gráfico da função *f*.

64. $g(x)=\begin{cases}\frac{2x-3}{4-x} & \text{se } x\le 2\\ \frac{x-2}{\sin(x-2)} & \text{se } 2<x\le 5\end{cases}$ $\qquad D_g=]-\infty,5]$

• Assíntotas verticais:

g é contínua em $]-\infty,2[$, por ser, nesse intervalo, definida por uma função racional e $4-x\neq 0$.

g é contínua em $]2,5[$, por ser, nesse intervalo, definida pelo quociente e a composta de funções contínuas em $\mathbb{R}$ e $\sin(x-2)\neq 0$.

Então, o gráfico de *g* só poderá ter assíntota vertical para $x=2$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{2x-3}{4-x}=\frac{2\times 2-3}{4-2}=\frac{1}{2}$ (limite finito)

$\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x-2}{\sin(x-2)}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{(x-2)'}{(\sin(x-2))'}$

$=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{\cos(x-2)}=\frac{1}{\cos(0)}=\frac{1}{1}=1$ (limite finito)

Então, g não tem assíntotas verticais.

• Assíntotas não verticais:

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{x(4-x)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(2x-3)'}{(4x-x^2)'}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{4-2x}=\frac{2}{+\infty}=0$

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)-mx]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{4-x}\right)\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(2x-3)'}{(4-x)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{-1}=-2$

A reta de equação $y=-2$ é assíntota ao gráfico de *g* em $-\infty$.

Logo, o gráfico de *g* tem uma única assíntota.

65. Seja $r: y=mx+b$ a assíntota aos gráficos de *f* e de *g*, ambas de domínio $\mathbb{R}^+$.

Então, sabemos que:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=m$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{g(x)}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}}=\frac{m}{m}=1$

66. $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x)]=0$

Então, a reta de equação $y=-x$ é assíntota ao gráfico de *f*.

Logo, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$.

Supondo que o gráfico de *g* tem uma assíntota oblíqua ($y=mx+b$).

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+\sqrt{x}}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}=$

$= -1 + \lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\frac{1}{2}} = -1 + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} =$

$= -1 + \frac{1}{+\infty} = -1 + 0 = -1$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[g(x) - mx \right] = \lim\limits_{x\to 0} \left[f(x) + \sqrt{x} + x \right] =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) + x \right) + \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = 0 + \infty = +\infty$

Logo, o gráfico de *g* não tem assíntotas oblíquas.

Pág. 177

67. Assíntotas verticais:

Se *f* é contínua em $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, só poderia ter assíntotas verticais em 0 e em 1.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ (limite finito)

Então, o gráfico de *f* não tem assíntota vertical em $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$

Logo, a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

Assíntotas não verticais:

$D_f = \mathbb{R}^+$; $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - mx \right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - x \right] = +\infty$

Logo, o gráfico de *f* não tem assíntotas não verticais.

A reta de equação $x = 1$ é a única assíntota ao gráfico de *f*.

68.1. Se *f* é contínua, então é contínua em $x = 0$, ou seja, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x+1} = \frac{0}{0+1} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{(1-\cos x)'}{(\sin x)'} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$

$f(0) = k$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow k = 0$

68.2. Assíntotas verticais:

$D_f =]-\pi, +\infty[$ e *f* é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical para $x = -\pi$

$\lim\limits_{x\to -\pi^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -\pi^+} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1-(-1)}{0^-} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

A reta de equação $x = -\pi$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

Assíntotas horizontais:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x)'}{(x+1)'} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1} = 1$

A reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

O gráfico da função *f* tem duas assíntotas paralelas aos eixos coordenados: a reta de equação $x = -\pi$ (paralela a *Oy*) e a reta de equação $y = 1$ (paralela a *Ox*).

68.3. Seja $t : y = mx + b$ a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa $-\frac{\pi}{2}$.

Para $-\pi < x < 0$:

$f'(x) = \left(\frac{1-\cos x}{\sin x} \right)' =$

$= \frac{(1-\cos x)' \sin x - (1-\cos x) \times (\sin x)'}{(\sin x)^2} =$

$= \frac{\sin x \times \sin x - (1-\cos x) \times \cos x}{\sin^2 x} =$

$= \frac{\sin^2 x - \cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

$m = f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1-0}{(-1)^2} = 1$

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1-0}{-1} = -1$

$t : y - (-1) = 1\left(x - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \Leftrightarrow y + 1 = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = x + \frac{\pi}{2} - 1$

69.1. Se a reta de equação $y = 3x - 1$ é assíntota ao gráfico de g quando $x \to +\infty$, então, tem-se que:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 3$. Logo, a opção (A) é falsa.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left[g(x) - 3x \right] = -1$. Logo, as opções (B) e (C) são falsas.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left[g(x) - (3x-1) \right] = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \left[g(x) - 3x + 1 \right] = 0$

Logo, a opção (D) é a correta.

Opção (D)

69.2. Assíntotas verticais:

$D_g = \mathbb{R}$ e g é contínua. Logo, o seu gráfico não tem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais (quando $x \to -\infty$):

$m = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{x-1}{x^2+1} + 4}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x-1}{x^3+x} + \frac{4}{x} \right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{R L' H}}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(x-1)'}{(x^3+x)'} + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{3x^2+1} + \frac{4}{-\infty} = \frac{1}{+\infty} + 0 = 0$

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[g(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x^2+1}+4\right)=$

$\underset{\text{R L'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x-1)'}{(x^2+1)'}+4=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2x}+4=\frac{1}{-\infty}+4=4$

A reta de equação $y=4$ é assíntota ao gráfico de g quando $x\to-\infty$.

69.3. $f(x)=\dfrac{3x^2+ax+b}{x+1}$

g é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, é contínua em $x=0$, ou seja, $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=g(0)$.

$\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{x-1}{x^2+1}+4\right)=\frac{0-1}{0+1}+4=-1+4=3$

$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{3x^2+ax+b}{x+1}=$

$=\frac{0+0+b}{0+1}=b=g(0)$

$\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=g(0)\Leftrightarrow b=3$

$f(x)=\dfrac{3x^2+ax+3}{x+1}$

A reta de equação $y=3x-1$ é assíntota ao gráfico de g quando $x\to+\infty$, então também é assíntota ao gráfico de f quando $x\to+\infty$.

Assim, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(3x-1)\right]=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+ax+3}{x+1}-3x+1\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+ax+3-3x^2-3x+x+1}{x+1}\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax-2x+4}{x+1}=0\Leftrightarrow$

$\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\Leftrightarrow}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(ax-2x+4)'}{(x+1)'}=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a-2}{1}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a-2=0\Leftrightarrow a=2$

$a=2$ e $b=3$

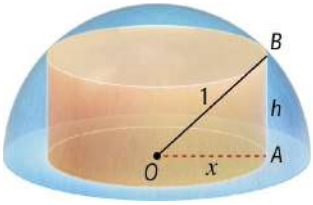
Pág. 179

70.1. $\overline{OB}^2=\overline{OA}^2+\overline{AB}^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow1^2=x^2+h^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h^2=1-x^2\Leftrightarrow$

$\underset{(h>0)}{\Leftrightarrow}h=\sqrt{1-x^2}$



$A_{base}=\pi x^2$

$V_{cilindro}=A_{base}\times h=\pi x^2\times\sqrt{1-x^2},0<x<1$

70.2. $V(x)=\pi x^2\sqrt{1-x^2}$

$V'(x)=\left(\pi x^2\right)'\sqrt{1-x^2}+\pi x^2\left(\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'$

$=2\pi x\sqrt{1-x^2}+\pi x^2\times\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\times\left(1-x^2\right)'$

$=2\pi x\sqrt{1-x^2}+\frac{\pi x^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\times(-2x)$

$=2\pi x\sqrt{1-x^2}-\frac{\pi x^3}{\sqrt{1-x^2}}$

$=\frac{2\pi x(1-x^2)-\pi x^3}{\sqrt{1-x^2}}$

$=\frac{2\pi x-2\pi x^3-\pi x^3}{\sqrt{1-x^2}}$

$=\frac{\pi x\left(2-3x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}$

$V'(x)=0\Leftrightarrow\pi x\left(2-3x^2\right)=0\wedge0<x<1$

$\Leftrightarrow\left(\pi x=0\vee2-3x^2=0\right)\wedge0<x<1$

$\Leftrightarrow\left(x=0\vee x^2=\frac{2}{3}\right)\wedge0<x<1$

$\Leftrightarrow\left(x=0\vee x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\wedge0<x<1$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{2}{3}}$

x	0		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		**1**
V'		+	0	−	
V		↗	$V\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	↘	

$x=\sqrt{\frac{2}{3}}\approx0,82$ u.c.

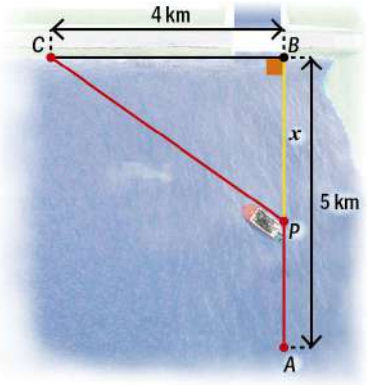
$h=\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{1}{3}}$

O cilindro de volume máximo tem 0,82 u.c. de raio da base e 0,58 u.c. de altura.

71.1. $\overline{AP}=5-x$

$\overline{CP}^2=\overline{PB}^2+\overline{BC}^2\Leftrightarrow\overline{CP}^2=4^2+x^2$

$\underset{\overline{CP}>0}{\Leftrightarrow}\overline{CP}=\sqrt{16+x^2}$



Tempo gasto no trajeto de A a P: $\dfrac{\overline{AP}}{20}=\dfrac{5-x}{20}$

Tempo gasto no trajeto de *P* a *C*:

$\frac{\overline{PC}}{12}=\frac{\sqrt{16+x^2}}{12}$

$T(x)=\frac{\overline{AP}}{20}+\frac{\overline{PC}}{12}=\frac{5-x}{20}+\frac{\sqrt{16+x^2}}{12}$

71.2. $T'(x)=\left(\frac{5-x}{20}+\frac{\sqrt{16+x^2}}{12}\right)'$

$=\frac{1}{20}(5-x)'+\frac{1}{12}\left(\sqrt{16+x^2}\right)'$

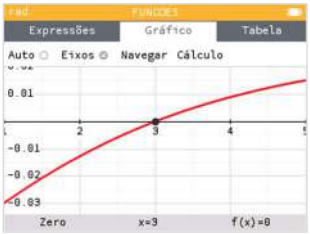
$=\frac{1}{20}\times(-1)+\frac{1}{12}\times\left((16+x^2)^{\frac{1}{2}}\right)'$

$=-\frac{1}{20}+\frac{1}{12}\times\frac{1}{2}(16+x^2)^{-\frac{1}{2}}\times(16+x^2)'$

$=-\frac{1}{20}+\frac{1}{24}\times\frac{1}{\sqrt{16+x^2}}\times 2x$

$=-\frac{1}{20}+\frac{x}{12\sqrt{16+x^2}}$

$T'(x)=0\Leftrightarrow\pi-\frac{1}{20}+\frac{x}{12\sqrt{16+x^2}}=0$



x	0		3		5
T'		−	0	+	
T		↘	$T(3)$	↗	

Mín.

Se $x=3$, $\overline{AP}=5-3=2$ km.

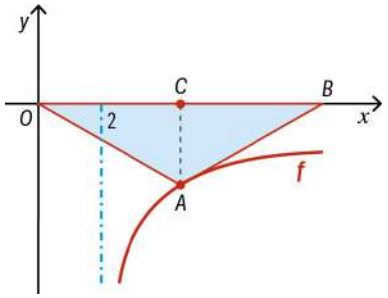
Para que o tempo gasto na viagem seja mínimo, $x=3$, ou seja, o pescador deve mudar de direção para o ponto *C* a 2 km do ponto *A*.

72. $f(x)=\frac{2x+5}{2-x}$, $D_f'=]2,+\infty[$

$A(x,f(x))$

$B(2x,0)$

$A_{[OAB]}=\frac{\overline{OB}\times\overline{AC}}{2}$



$\overline{OB}=2x$

$\overline{AC}=-f(x)=-\frac{2x+5}{2-x}=\frac{2x+5}{x-2}$

$A_{[OAB]}=\frac{2x\times\frac{2x+5}{x-2}}{2}=\frac{2x^2+5x}{x-2}=A(x)$

$A'(x)=\left(\frac{2x^2+5x}{x-2}\right)'$

$=\frac{(2x^2+5x)'(x-2)-(2x^2+5x)(x-2)'}{(x-2)^2}$

$=\frac{(4x+5)(x-2)-(2x^2+5x)\times 1}{(x-2)^2}$

$=\frac{4x^2-8x+5x-10-2x^2-5x}{(x-2)^2}$

$=\frac{2x^2-8x-10}{(x-2)^2}$

$A'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x^2-8x-10}{(x-2)^2}=0\wedge x>2$

$\Leftrightarrow 2x^2-8x-10=0\wedge x>2$

$\Leftrightarrow x^2-4x-5=0\wedge x>2$

$\Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times 1\times(-5)}}{2\times 2}\wedge x>2$

$\Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{36}}{4}\wedge x>2\Leftrightarrow x=\frac{4\pm 6}{4}\wedge x>2$

$\Leftrightarrow(x=-1\vee x=5)\wedge x>2\Leftrightarrow x=5$

x	2		5	$+\infty$
A'		−	0	+
A		↘	25	↗

$A(5)=\frac{2\times 5^2+5\times 5}{5-2}=\frac{50+25}{3}=\frac{75}{3}=25$ u.a.

O valor mínimo da área do triângulo é 25 u.a.

Pág. 180

73.1. $f^{-1}(1)+f(1)+f^{-1}(3)=0+2+2=4$

C.A. $\mid f(2)=3;\ f^{-1}(3)=2;\ f(0)=1;\ f^{-1}(1)=0$

73.2. $(f\circ g)(1)=f[g(1)]=f(-1)=0$

73.3. $(g\circ f)(1)=g[f(1)]=g(2)=-2$

73.4. $(f\circ g^{-1})(-2)=f[g^{-1}(-2)]=f(2)=3$

C.A. $\mid g(2)=-2;\ g^{-1}(-2)=2$

73.5. $(f^{-1}\circ g)(-1)=f^{-1}[g(-1)]=f^{-1}(1)=0$

C.A. $\mid f(0)=1;\ f^{-1}(1)=0$

73.6. $(f^{-1}\circ g^{-1})(0)=f^{-1}[g^{-1}(0)]$

$= f^{-1}(0) = -1$

C.A. $\left| \begin{array}{l} g(0) = 0 \ ; \ g^{-1}(0) = 0 \\ f(-1) = 0 \ ; \ f^{-1}(0) = -1 \end{array} \right.$

74. $f(x) = 2x - 4$

$(g^{-1} \circ f)(5) = 2 \Leftrightarrow g^{-1}[f(5)] = 2$

$\Leftrightarrow g^{-1}(6) = 2$ C.A. $\left| \ g(5) = 2 \times 5 - 4 = 6 \right.$

$\Leftrightarrow g(2) = 6$

Opção (A): $g(2) = 3 \times 2 = 6$ V.

Opção (B): $g(2) = \frac{2}{3}$ F.

Opção (C): $g(2) = 6 \times 2 = 12$ F.

Opção (D): $g(2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ F.

Opção (A)

75.1. $f(x) = 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} = 2$

$\Leftrightarrow x - 1 = 2^3$

$\Leftrightarrow x = 8 + 1$

$\Leftrightarrow x = 9$

$f(9) = 2 \Leftrightarrow f^{-1}(2) = 9$

75.2. $f^{-1}(3) + (f \circ f^{-1})(5) = 28 + 5 = 33$

C.A. $\left| \begin{array}{l} f(x) = 3 \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} = 3 \\ \Leftrightarrow x - 1 = 3^3 \\ \Leftrightarrow x = 27 + 1 \\ \Leftrightarrow x = 28 \\ f(28) = 3 \\ f^{-1}(3) = 28 \end{array} \right.$

76. $f(x) = 3x - 2$

$g(x) = mx + b$

$g(1) = 1 \Leftrightarrow 1 = m + b \Leftrightarrow b = 1 - m$

$(f+g)^{-1}(4) = 3 \Leftrightarrow (f+g)(3) = 4$

$(f+g)(3) = 4 \Leftrightarrow 3 \times 3 - 2 + m \times 3 + b = 4$

$\Leftrightarrow 9 - 2 + 3m + b = 4$

$\Leftrightarrow 3m + b = 4 - 9 + 2$

$\Leftrightarrow 3m + b = -3$

Como $b = 1 - m$, $3m + b = -3 \Leftrightarrow 3m + 1 - m = -3$

$2m = -4 \Leftrightarrow m = -2$

Com $b = 1 - m$, $b = 1 - (-2) \Leftrightarrow b = 3$

$g(x) = -2x + 3$

77. $f(x) = ax + 4$; $g(x) = \frac{1}{2}x + b$

Vamos determinar a expressão algébrica da função inversa de f, f^{-1}.

$f(x) = y \Leftrightarrow ax + 4 = y$

$\Leftrightarrow ax = y - 4$

$\Leftrightarrow x = \frac{y-4}{a}$

$y = \frac{x-4}{a}$

$f^{-1}(x) = \frac{x-4}{a}$

Sabemos que a função g é a inversa da função f.

$f^{-1}(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{x-4}{a} = \frac{1}{2}x + b$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a}x - \frac{4}{a} = \frac{1}{2}x + b$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \wedge -\frac{4}{a} = b$

$\Leftrightarrow a = 2 \wedge -\frac{4}{2} = b$

$\Leftrightarrow a = 2 \wedge -2 = b$

Pág. 181

78. As funções representadas em (A) e (D) não são funções exponenciais por não serem do tipo a^x, com $a>0$ e $a\neq 1$.
As funções representadas em (E) e (F) são funções exponenciais crescentes, dado que $a=2>1$.

Em (B), $f(x)=e^{-x}=\left(\frac{1}{e}\right)^x$ e $0<\frac{1}{e}<1$. Então, é uma função exponencial decrescente.

Em (C), $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $0<\frac{1}{2}<1$. Então, é uma função exponencial decrescente.

(B) e (C).

79.1. $f(x)=a^x$

$f(-2)=10 \Leftrightarrow a^{-2}=10 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}=10 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}-10=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1-10a^2}{a^2}=0 \Leftrightarrow 1-10a^2=0 \wedge a^2\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2=\frac{1}{10} \Leftrightarrow a=\pm\sqrt{\frac{1}{10}} \Leftrightarrow a=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$

Como $a>0$, $a=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

$f(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^x$

79.2. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=10$.
Logo, a afirmação (C) é falsa. Opção (C)

79.3. $h=f\times g$; $(f\times g)(2)=\frac{5}{2}$; $g(x)=a^x$

a) $(f\times g)(2)=\frac{5}{2} \Leftrightarrow f(2)\times g(2)=\frac{5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2\times a^2=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{10}a^2=\frac{5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2=25 \Leftrightarrow a=\pm 5$

Como $a>0, a=5$. $g(x)=5^x$

b) $\frac{f(2)\times\left[g(2)\right]^{\frac{1}{2}}}{g(-2)}=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2\times\left(5^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{5^2}}=$

$=\frac{\frac{1}{10}\times 5}{\frac{1}{5^2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{25}}=\frac{25}{2}$

c) $h(x)=(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$

$=\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^x\times 5^x=\left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right)^x=\left(\frac{5\sqrt{10}}{10}\right)^x=\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^x$

Como $\frac{\sqrt{10}}{2}>1$, h é uma função exponencial estritamente crescente.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^x \underset{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}>1\right)}{=}+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^x \underset{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}>1\right)}{=}0$

80. (A): $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$, uma vez que a função exponencial de base e cresce muito mais rapidamente que a função polinomial quando $x\to+\infty$. Verdadeira.

(B) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x}{x^3}=+\infty$, uma vez que a função exponencial de base 2 cresce muito mais rapidamente que a função polinomial quando $x\to+\infty$. Falsa.

(C) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5}{0,5^x}=\frac{5}{0,5^0}=5$ Falsa.

(D) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2^x}{3}=\frac{2^{-\infty}}{3}\underset{(2>1)}{=}\frac{0}{3}=0$ Falsa.

(E) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[3\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}\underset{\left(0<\frac{1}{2}<1\right)}{=}3\times 0=0$ Falsa.

(F) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=+\infty$ porque $0<\frac{2}{3}<1$ Verdadeira.

(A) e (F)

Pág. 182

81.1. g é uma função do tipo $y=b\times a^{x-c}+d$. Então, a assíntota horizontal ao seu gráfico é $y=d$. Neste caso, $d=-9$.
Outro processo:
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3^{x-2}-9\right)=3^{-\infty}-9=0-9=-9$
(C)

81.2. O gráfico da função g obtém-se do gráfico da função *f* através de um deslocamento horizontal de duas unidades para a direita, seguido de um deslocamento vertical de nove unidades para baixo.

81.3.

	Função *f*	**Função *g***
Contradomínio	$\mathbb{R}^+$	$]-9,+\infty[$
Zeros (caso existam)	Não tem	$x=4$
Monotonia	Estritamente crescente	Estritamente crescente
Limite quando $x\to+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
Limite quando $x\to-\infty$	0	-9

C.A. $\left|\begin{array}{l} g(x)=0 \Leftrightarrow 3^{x-2}-9=0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3^{x-2}=3^2 \Leftrightarrow x-2=2 \Leftrightarrow x=4 \end{array}\right.$

82. $g(x)=b\times a^x$, $b\neq 0$, $a>0$

$\begin{cases} g(1)=6 \\ g(2)=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\times a=6 \\ b\times a^2=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\times a=6 \\ b\times a\times a=18 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b\times a=6 \\ 6a=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\times 3=6 \\ a=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=3 \end{cases}$

$g(x)=2\times 3^x$

83.1. $4^x=\sqrt{2}^{x-2} \Leftrightarrow \left(2^2\right)^x=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{x-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{2x}=2^{\frac{1}{2}x-1} \Leftrightarrow 2x=\frac{1}{2}x-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x=x-2 \Leftrightarrow 3x=-2 \Leftrightarrow 3x=-2 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$

$S=\left\{-\frac{2}{3}\right\}$

83.2. $e^{x^2}=e^4 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x=\pm 2$

$S=\{-2,2\}$

83.3. $2^{-x}=0{,}25 \Leftrightarrow 2^{-x}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{-x}=\frac{1}{2^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{-x}=2^{-2} \Leftrightarrow -x=-2 \Leftrightarrow x=2$

$S=\{2\}$

83.4. $2^{x-1}-8\times 8^x=0 \Leftrightarrow 2^{x-1}=2^3\times\left(2^3\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{x-1}=2^3\times 2^{3x} \Leftrightarrow 2^{x-1}=2^{3+3x} \Leftrightarrow x-1=3+3x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x=4 \Leftrightarrow x=-2$

$S=\{-2\}$

83.5. $3^{x-1}+3^x+3^{x+1}=13 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x\times 3^{-1}+3^x+3^x\times 3=13 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x\left(\frac{1}{3}+1+3\right)=13 \Leftrightarrow 3^x\times\frac{1+3+9}{3}=13 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x\times\frac{13}{3}=13 \Leftrightarrow 3^x=\frac{3\times 13}{13} \Leftrightarrow 3^x=3 \Leftrightarrow x=1$

$S=\{1\}$

83.6. $2^x-8\times 2^{x+2}=0 \Leftrightarrow 2^x=2^3\times 2^{x+2} \Leftrightarrow 2^x=2^{x+5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=x+5 \Leftrightarrow 0x=5$ (Equação impossível)

$S=\{\ \}$

84.1. O capital acumulado C_n que se obtém aplicando-se juros compostos à taxa de *r*, na forma decimal, a um capital C_0, durante *n* anos é dado por:

$C_n=C_0(1+r)^n$

Então, $C_4=1200(1+0{,}021)^4\approx 13040{,}20$ €.

Ao fim de 4 anos, o capital acumulado é, aproximadamente, 13040,20 €.

84.2. $C_4=12837 \Leftrightarrow 1200(1+r)^4=12837 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1+r)^4=\frac{12837}{12000} \Leftrightarrow (1+r)^4=\frac{4279}{4000} \Leftrightarrow$

$\underset{(1+r>0)}{\Leftrightarrow} 1+r=\sqrt[4]{\frac{4279}{4000}} \Leftrightarrow r=\sqrt[4]{\frac{4279}{4000}}-1\approx 0{,}017$

$r=1{,}7$

Pág. 183

85.1. $3^{-x}+3^{1+x}=4 \Leftrightarrow \frac{1}{3^x}+3\times 3^x=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+3\times\left(3^x\right)^2=4\times 3^x$

Fazendo $3^x=y$, resulta:

$1+3y^2=4y \Leftrightarrow 3y^2-4y+1=0 \Leftrightarrow$

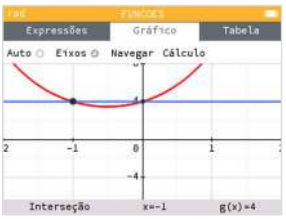
$\Leftrightarrow y=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times 3\times 1}}{2\times 3} \Leftrightarrow y=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\frac{4\pm 2}{6} \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}\vee y=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x=3^{-1}\vee 3^x=3^0 \Leftrightarrow x=-1\vee x=0$

$S=\{-1,0\}$

Verificação com a calculadora gráfica:



85.2. $2^x+\frac{8}{2^{x+1}}=5 \Leftrightarrow 2^x+\frac{8}{2^x\times 2}=5 \Leftrightarrow 2^x+\frac{4}{2^x}=5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2+4=5\times 2^x$

Fazendo $2^x=y$, resulta:

$y^2+5=5y \Leftrightarrow y^2-5y+4=0 \Leftrightarrow$

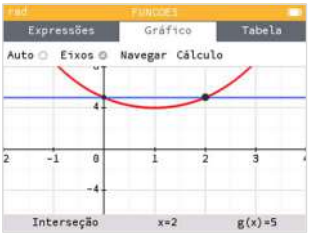
$\Leftrightarrow y=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\times 1\times 4}}{2\times 1} \Leftrightarrow y=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\frac{5\pm 3}{2} \Leftrightarrow y=1\vee y=4 \Leftrightarrow 2^x=1\vee 2^x=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x=2^0\vee 2^x=2^2 \Leftrightarrow x=0\vee x=2$

$S=\{0,2\}$

Verificação com a calculadora gráfica:



85.3. $7\times 9^{2x-1}+3^{4x-1}+2\times 9^x=16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7\times 9^{2x}\times 9^{-1}+3^{4x}\times 3^{-1}+2\times 9^x=16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{7}{9}\times 9^{2x}+\left(3^2\right)^{2x}\times\frac{1}{3}+2\times 9^x=16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{7}{9}\times 9^{2x}+\frac{1}{3}\times 9^{2x}+2\times 9^{x}=16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{10}{9}\times 9^{2x}+2\times 9^{x}=16$

Fazendo $9^{x}=y$, resulta:

$\frac{10}{9}y^{2}+2y=16 \Leftrightarrow 10y^{2}+18y-144=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5y^{2}+9y-72=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\frac{-9\pm\left(\sqrt{9^{2}-4\times 5\times(-72)}\right)}{2\times 5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\frac{-9\pm\sqrt{81+1440}}{10} \Leftrightarrow y=\frac{-9\pm 39}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-\frac{24}{5}\vee y=3$

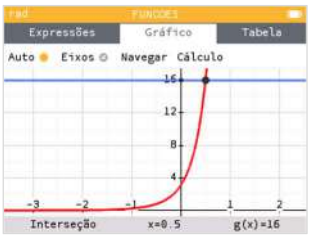
$\Leftrightarrow 9^{x}=-\frac{24}{5}\vee 9^{x}=3$,

em que $9^{x}=-\frac{24}{5}$ é uma equação impossível.

$\Leftrightarrow \left(3^{2}\right)^{x}=3 \Leftrightarrow 3^{2x}=3^{1} \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

$S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Verificação com a calculadora gráfica:



85.4. $2^{x+1}-2^{x-2}+2^{x-1}-2^{x}=40$

$\Leftrightarrow 2^{x}\times 2-2^{x}\times 2^{-2}+2^{x}\times 2^{-1}-2^{x}=40$

$\Leftrightarrow 2^{x}\left(2-\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{2}-1\right)=40$

$\Leftrightarrow 2^{x}\times\frac{8-1+2-4}{4}=40$

$\Leftrightarrow 2^{x}\times\frac{5}{4}=40$

$\Leftrightarrow 2^{x}=\frac{4\times 40}{5}$

$\Leftrightarrow 2^{x}=32$

$\Leftrightarrow 2^{x}=2^{5}$

$\Leftrightarrow x=5$

$S=\{5\}$

Verificação com a calculadora gráfica:



Pág. 184

86.1. $C\left(3a,f\left(3a\right)\right)=\left(3a,\mathrm{e}^{3a}\right)$

$D\left(a,f\left(a\right)\right)=\left(a,\mathrm{e}^{a}\right)$

$\overline{BC}=\mathrm{e}^{3a}$; $\overline{AD}=\mathrm{e}^{a}$; $\overline{AB}=3a-a=2a$

$A_{[ABCD]}=\frac{\overline{BC}+\overline{AD}}{2}\times\overline{AB}=\frac{\mathrm{e}^{3a}+\mathrm{e}^{a}}{2}\times 2a=$

$=a\left(\mathrm{e}^{a}+\mathrm{e}^{3a}\right)$

86.2. $A_{[ABCD]}<1000 \Leftrightarrow a\left(\mathrm{e}^{a}+\mathrm{e}^{3a}\right)<1000$

$f\left(x\right)=x\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{3x}\right)$

$g\left(x\right)=1000$

$a\left(\mathrm{e}^{a}+\mathrm{e}^{3a}\right)=1000 \Leftrightarrow a\approx 2{,}06$



Então, $3a\approx 3\times 2{,}06=6{,}18$.

O maior número inteiro para a abcissa de *B* para o qual a área do trapézio é inferior a 1000 unidades de área é 6.

87.1. $f\left(x\right)=mx+b$ e $b=2$

$f\left(x\right)=mx+2$

$f\left(-2\right)=0 \Leftrightarrow m\times(-2)+2=0 \Leftrightarrow -2m=-2 \Leftrightarrow m=1$

$f\left(x\right)=x+2$

$g\left(x\right)=a^{x}$

$g\left(-1\right)=2 \Leftrightarrow a^{-1}=2 \Leftrightarrow \frac{1}{a}=2 \Leftrightarrow \frac{1}{a}-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1-2a}{a}=0 \Leftrightarrow 1-2a=0\wedge a\neq 0 \Leftrightarrow -2a=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$

$g\left(x\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

$f:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x+2\end{array}$ e $g:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^{+}\\ x & \mapsto & \left(\frac{1}{2}\right)^{x}\end{array}$

87.2. $\left(g\circ f\right)(-2)=g\left(f\left(-2\right)\right)=g\left(0\right)=1$

87.3. $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$

O gráfico de $g\circ f$ obtém-se do gráfico de g por um deslocamento de duas unidades para a esquerda.

a) $D'_{g\circ f}=D'_g=\mathbb{R}^+$

b) $g\circ f$ é estritamente decrescente.

c) $(g\circ f)(x)=0\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}=0$

(Equação impossível)

$g\circ f$ não tem zeros.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(g\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}\underset{\left(0<\frac{1}{2}<1\right)}{=}0$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}(g\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}\underset{\left(0<\frac{1}{2}<1\right)}{=}+\infty$

f) $y=0$

88.1. $v(0)=\frac{500}{1+49\mathrm{e}^{-0,4\times0}}=\frac{500}{1+49\mathrm{e}^{0}}=\frac{500}{50}=10$

Quando foi detetado o vírus havia 10 computadores infetados na empresa.

88.2. $\lim\limits_{t\to+\infty}v(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{500}{1+49\mathrm{e}^{-0,4t}}=\frac{500}{1+49\mathrm{e}^{-\infty}}=$

$=\frac{500}{1+49\times0}=500$

$\lim\limits_{t\to+\infty}v(t)=500$

Significa que, caso o vírus não fosse detetado, este propagar-se-ia pela totalidade dos 500 computadores ligados à rede infetada.

88.3. $v(t)=446$

$f(x)=\frac{500}{1+49\mathrm{e}^{-0,4x}}$; $g(x)=446$

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x\approx15$

O número de computadores infetados atinge 446 unidades ao fim de, aproximadamente, 15 minutos.



Pág. 185

89.1. $\log_2 0,25=\log_2\frac{1}{4}=\log_2 4^{-1}=\log_2\left(2^2\right)^{-1}=$

$=\log_2 2^{-2}=-2$

89.2. $\log_{\frac{1}{2}} 0,25=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2=2$

89.3. $\log_3\sqrt[3]{3}=\log_3 3^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$

89.4. $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[3]{3}=y\Leftrightarrow\sqrt{3}^{y}=\sqrt[3]{3}$

$\Leftrightarrow\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{y}=3^{\frac{1}{3}}\Leftrightarrow3^{\frac{y}{2}}=3^{\frac{1}{3}}\Leftrightarrow\frac{y}{2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow3y=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\frac{2}{3}$

$\log_{\sqrt{3}}\sqrt[3]{3}=\frac{2}{3}$

89.5. $\frac{\left(\log 0,001\right)^2}{2\times\log10^6}=\frac{\left(\log10^{-3}\right)^2}{2\times6}=\frac{(-3)^2}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

89.6. $\frac{\log_2 1+\log0,01}{\log_3\left(\frac{1}{81}\right)\times\log_2\sqrt[4]{8}}=\frac{0+\log10^{-2}}{\log_3\left(\frac{1}{3^4}\right)\times\log_2 8^{\frac{1}{4}}}=$

$=\frac{-2}{\log_3 3^{-4}\times\log_2\left(2^3\right)^{\frac{1}{4}}}=\frac{-2}{-4\times\log_2 2^{\frac{3}{4}}}=\frac{-2}{-4\times\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$

89.7. $\log_3\frac{\sqrt[3]{27}\times\sqrt{3}}{81}=\log_3\frac{3\times\sqrt{3}}{3^4}=\log_3\frac{\sqrt{3}}{3^3}=\log_3\frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^3}=$

$=\log_3 3^{\frac{1}{2}-3}=\log_3 3^{-\frac{5}{2}}=-\frac{5}{2}$

89.8. $\log\frac{0,001\times\sqrt{1000}}{(0,01)^3}=\log\frac{10^{-3}\times\sqrt{10^3}}{\left(10^{-2}\right)^3}=$

$=\log\frac{10^{-3}\times\left(10^3\right)^{\frac{1}{2}}}{10^{-6}}=\log\frac{10^{\frac{3}{2}}}{10^{-3}}=\log10^{\frac{3}{2}-(-3)}=$

$=\log10^{\frac{3}{2}+3}=\log10^{\frac{9}{2}}=\frac{9}{2}$

90.1. $3^{3+\log_3 x}=3^3\times3^{\log_3 x}=27\times x=27x$

90.2. $3^{2\times\log_3 x}=\left(3^{\log_3 x}\right)^2=x^2$

90.3. $3^{2-\log_3 x}=3^2\times3^{-\log_3 x}$

$=3^2\times\frac{1}{3^{\log_3 x}}=9\times\frac{1}{x}=\frac{9}{x}$

90.4. $2^{4\log_2\sqrt{x}+2\log_2 x}=2^{4\log_2\sqrt{x}}\times2^{2\log_2 x}=$

$=\left(2^{\log_2\sqrt{x}}\right)^4\times\left(2^{\log_2 x}\right)^2=\left(\sqrt{x}\right)^4\times x^2=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^4\times x^2=$

$=x^2\times x^2=x^4$

90.5. $\mathrm{e}^{\ln x+\ln\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\ln x}\times\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{x}}=x\times\frac{1}{x}=1$

90.6. $2^{3\log_8 x}=\left(2^3\right)^{\log_8 x}=8^{\log_8 x}=x$

90.7. $\log_2\frac{2^8}{16}-\log_3\frac{1}{3^x}=\log_2\frac{2^8}{2^4}-\log_3 3^{-x}$

$=\log_2 2^4-(-x)=4+x$

90.8. $\log_3 9^{2x+1}+\ln\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}=\log_3\left(3^2\right)^{2x+1}+\ln\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}=$

$=\log_3 3^{4x+2}+\ln\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=4x+2+\left(-\frac{1}{2}\right)=$

$=4x+2-\frac{1}{2}=4x+\frac{3}{2}$

91.1. $\log_{\sqrt{a}} b=2\log_a b$

1.º Processo (utilizando a definição de logaritmo):

$\log_{\sqrt{a}} b = y \Leftrightarrow \sqrt{a}^{y} = b \Leftrightarrow \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{y} = b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^{\frac{y}{2}} = b \Leftrightarrow \frac{y}{2} = \log_a b \Leftrightarrow y = 2\log_a b$

Logo, $\log_{\sqrt{a}} b = 2\log_a b$.

2.º Processo (utilizando a regra de mudança de base):

$\log_{\sqrt{a}} b = \frac{\log_a b}{\log_a \sqrt{a}} = \frac{\log_a b}{\log_a a^{\frac{1}{2}}} = \frac{\log_a b}{\frac{1}{2}} = 2\log_a b$

91.2. $\log_{a^2} b = \frac{1}{2}\log_a b$

1.º Processo (utilizando a definição de logaritmo):

$\log_{a^2} b = y \Leftrightarrow \left(a^2\right)^{y} = b \Leftrightarrow a^{2y} = b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2y = \log_a b \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\log_a b$

Logo, $\log_{a^2} b = \frac{1}{2}\log_a b$.

2.º Processo (utilizando a regra de mudança de base):

$\log_{a^2} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^2} = \frac{\log_a b}{2} = \frac{1}{2}\log_a b$

91.3. $\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$

1.º Processo (utilizando a definição de logaritmo)

$\log_{\frac{1}{a}} b = y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^{y} = b \Leftrightarrow \left(a^{-1}\right)^{y} = b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^{-y} = b \Leftrightarrow -y = \log_a b \Leftrightarrow y = -\log_a b$

Logo, $\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$.

2.º Processo (utilizando a regra de mudança de base):

$\log_{\frac{1}{a}} b = \frac{\log_a b}{\log_a \frac{1}{a}} = \frac{\log_a b}{\log_a a^{-1}} = \frac{\log_a b}{-1} = -\log_a b$

91.4. $\log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_a b$, $k \neq 0$

1.º Processo (utilizando a definição de logaritmo):

$\log_{a^k} b = y \Leftrightarrow \left(a^k\right)^{y} = b \Leftrightarrow a^{ky} = b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ky = \log_a b \Leftrightarrow y = \frac{1}{k}\log_a b$

Logo, $\log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_a b$.

2.º Processo (utilizando a regra de mudança de base)

$\log_{a^k} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^k} = \frac{\log_a b}{k} = \frac{1}{k}\log_a b$

92.1. Pretendemos determinar $f^{-1}\left(2e^{-1}\right)$. Como os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, pretendemos determinar x tal que $f(x) = 2e^{-1}$.

$f(x) = 2e^{-1} \Leftrightarrow e^{x-1} = 2e^{-1} \Leftrightarrow x - 1 = \ln\left(2e^{-1}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 1 = \ln 2 + \ln e^{-1} \Leftrightarrow x = 1 + \ln 2 + (-1) \Leftrightarrow x = \ln 2$

$f^{-1}\left(2e^{-1}\right) = \ln 2$

92.2. Pretendemos determinar o zero de f^{-1}. Como os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, pretendemos determinar a imagem do zero pela função f.

$f(0) = e^{0-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$x = \frac{1}{e}$

Pág. 186

93.1. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x} > 0 \wedge x \geq 0 \wedge 16x^2 > 0\right\}$

$= \left\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x \geq 0 \wedge x^2 > 0\right\}$

$= \left\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0\right\} =]0, +\infty[= \mathbb{R}^+$

93.2. $f(x) = 4\log_2 \sqrt{x} - \log_4\left(16x^2\right)$

$= 4\log_2 x^{\frac{1}{2}} - \left[\log_4(16) + \log_4\left(x^2\right)\right]$

$= 4 \times \frac{1}{2} \times \log_2 x - \log_4 4^2 - \log_4 x^2$

$= 2\log_2 x - 2 - 2\log_4 x$

$= 2\log_2 x - 2 - 2\frac{\log_2 x}{\log_2 4}$

$= 2\log_2 x - 2 - 2\frac{\log_2 x}{\log_2 2^2}$

$= 2\log_2 x - 2 - \cancel{2}\frac{\log_2 x}{\cancel{2}}$

$= 2\log_2 x - 2 - \log_2 x$

$= \log_2 x - 2$

$f(x) = \log_2 x - 2, \forall x \in D_f$

93.3. $2^{f(x)} = x - 1 \Leftrightarrow 2^{\log_2 x - 2 + 1} = x - 1$

$\Leftrightarrow 2^{\log_2 x - 1} = x - 1$

$\Leftrightarrow 2^{\log_2 x} \times 2^{-1} = x - 1$

$\Leftrightarrow x \times \frac{1}{2} = x - 1$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = x - 1$

$\Leftrightarrow x = 2x - 2$

$\Leftrightarrow -x = -2 \Leftrightarrow x = 2$

$S = \{2\}$

94.1. $\log_3 x = 2 \quad D = \left\{x \in \mathbb{R} : x > 0\right\} = \mathbb{R}^+$

$\log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 9 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 9$

$S = \{9\}$

94.2. $\log_x 81 = 4 \quad D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x \neq 1\} = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$\log_x 81 = 4 \Leftrightarrow x^4 = 81 \wedge x > 0 \wedge x \neq 1$

$\Leftrightarrow \left(x = -\sqrt[4]{81} \vee x = -\sqrt[4]{81}\right) \wedge x > 0 \wedge x \neq 1$

$\Leftrightarrow (x = -3 \vee x = 3) \wedge x > 0 \wedge x \neq 1$

$\Leftrightarrow x = 3$

$S = \{3\}$

94.3. $\log_{\frac{1}{3}} |x| = -1 \quad D = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\log_{\frac{1}{3}} |x| = -1 \Leftrightarrow |x| = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \wedge x \neq 0$

$\Leftrightarrow |x| = 3 \wedge x \neq 0$

$\Leftrightarrow (x = -3 \vee x = 3) \wedge x \neq 0$

$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$

$S = \{-3, 3\}$

94.4. $\log_2 (3x - 2) = 2 + \log_2 (x - 2)$

$D = \{x \in \mathbb{R} : 3x - 2 > 0 \wedge x - 2 > 0\}$

$= \left\{x \in \mathbb{R} : x > \frac{2}{3} \wedge x > 2\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$

$=]2, +\infty[$

$\log_2 (3x - 2) = 2 + \log_2 (x - 2)$

$\Leftrightarrow \log_2 (3x - 2) = \log_2 2^2 + \log_2 (x - 2)$

$\Leftrightarrow \log_2 (3x - 2) = \log_2 [4(x - 2)]$

$\Leftrightarrow \log_2 (3x - 2) = \log_2 (4x - 8)$

$\Leftrightarrow 3x - 2 = 4x - 8 \wedge x > 2$

$\Leftrightarrow -x = -6 \wedge x > 2$

$\Leftrightarrow x = 6 \wedge x > 2$

$\Leftrightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

94.5. $2\log(2x + 1) = \log(8x)$

$D = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 1 > 0 \wedge 8x > 0\}$

$= \left\{x \in \mathbb{R} : x > -\frac{1}{2} \wedge x > 0\right\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$

$2\log(2x + 1) = \log(8x)$

$\Leftrightarrow \log(2x + 1)^2 = \log(8x)$

$\Leftrightarrow (2x + 1)^2 = (8x) \wedge x > 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 8x \wedge x > 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \wedge x > 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 4 \times 1}}{2 \times 4} \wedge x > 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 0}{8} \wedge x > 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

94.6. $(\log x)^2 - 2\log x + 1 = 0$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0, +\infty[= \mathbb{R}^+$

$(\log x)^2 - 2\log x + 1 = 0$

Mudança de variável: $\log x = y$

$\Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow y = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow y = \frac{2 \pm 0}{2}$

$\Leftrightarrow y = 1$

$\Leftrightarrow \log x = 1$

$\Leftrightarrow x = 10^1 \wedge x > 0$

$\Leftrightarrow x = 10$

$S = \{10\}$

94.7. $\log_2 x^2 - 3\log_2 x + 1 = 0$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 0 \wedge x > 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x > 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

$=]0, +\infty[= \mathbb{R}^+$

$\log_2 x^2 - 3\log_2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\log_2 x - 3\log_2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\log_2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2^1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 2$

$S = \{2\}$

94.8. $\log_{2^2} x - 4 = 0$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0, +\infty[= \mathbb{R}^+$

$\log_{2^2} x - 4 = 0 \Leftrightarrow \log_{2^2} x = 4$

$\Leftrightarrow (\log_2 x)^2 = 4$

$\Leftrightarrow \log_2 x = \pm\sqrt{4}$

$\Leftrightarrow \log_2 x = -2 \vee \log_2 x = 2$

$\Leftrightarrow \left(x = 2^{-2} \vee x = 2^2\right) \wedge x > 0$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{2^2} \vee x = 4\right) \wedge x > 0$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{4} \vee x = 4\right) \wedge x > 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \vee x = 4$

$S = \left\{\frac{1}{4}, 4\right\}$

95.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 - 2x > 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : -2x > -1\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : 2x < 1\}$

$= \left\{x \in \mathbb{R} : x < \frac{1}{2}\right\}$

$= \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$

95.2. O ponto *A* é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo *Oy*. A abcissa do ponto *A* é zero. A ordenada do ponto *A* é $f(0)$.

$f(0) = \log(1-2\times 0)+1 = \log 1 + 1 = 0 + 1 = 1$

$A(0,1)$

O ponto *B* é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Ox. A ordenada do ponto *B* é zero.

A abcissa é o zero de *f*.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \log(1-2x)+1 = 0$

$\Leftrightarrow \log(1-2x) = -1$

$\Leftrightarrow 1-2x = 10^{-1} \wedge x < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 1-2x = \frac{1}{10} \wedge x < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 10-20x = 1 \wedge x < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -20x = -9 \wedge x < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{9}{20} \wedge x < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{9}{20}$

$B\left(\frac{9}{20}, 0\right)$

$A(0,1)$ e $B\left(\frac{9}{20}, 0\right)$

95.3. A função *f* é invertível porque o gráfico de *f* "passa" no teste da reta horizontal.

95.4. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} \left[\log(1-2x)+1\right] =$

$= \log\left(1-2\times\frac{1}{2}\right)+1 = \log 0 + 1 = -\infty + 1 = -\infty$

Como $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$, a reta de equação $x = \frac{1}{2}$ é uma assíntota vertical ao gráfico de *f*.

95.5. $D_f = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ e $D'_f = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$

$f(x) = y \Leftrightarrow \log(1-2x)+1 = y$

$\Leftrightarrow \log(1-2x) = y-1$

$\Leftrightarrow 1-2x = 10^{y-1}$

$\Leftrightarrow -2x = 10^{y-1} - 1$

$\Leftrightarrow 2x = 1-10^{y-1}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1-10^{y-1}}{2}$

$y = \frac{1-10^{x-1}}{2}$

$f^{-1}(x) = \frac{1-10^{x-1}}{2}$

$f^{-1} : \mathbb{R} \to \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$

$x \mapsto \frac{1-10^{x-1}}{2}$

95.6. $f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-10^{x-1}}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 1-10^{x-1} = 0 \Leftrightarrow -10^{x-1} = -1 \Leftrightarrow 10^{x-1} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-1 = \log 1 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Zero de f^{-1}: 1

$A(0,1)$. Ordenada de *A* é 1.

O zero de f^{-1} é igual à ordenada de *A*.

96. $f(x) = 2 + \log_2 x$; $g(x) = \log_4 x$

$D_f = D_g = \mathbb{R}^+$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2 + \log_2 x = \log_4 x$

$\Leftrightarrow 2 + \log_2 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} \Leftrightarrow 2 + \log_2 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 2^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 + \log_2 x = \frac{\log_2 x}{2} \Leftrightarrow 4 + 2\log_2 x = \log_2 x \Leftrightarrow$

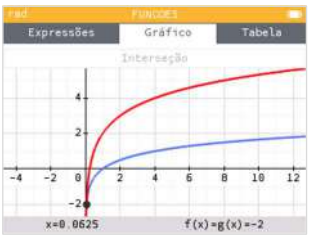
$\Leftrightarrow 2\log_2 x - \log_2 x = -4 \Leftrightarrow \log_2 x = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2^{-4} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2^4} \wedge x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{16} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{16}$

$g\left(\frac{1}{16}\right) = \log_4 \frac{1}{16} = \log_4 \frac{1}{4^2} = \log_4 4^{-2} = -2$

As coordenadas do ponto de interseção dos gráficos de *f* e de *g* são $\left(\frac{1}{16}, -2\right)$.



Pág. 187

97. Sabemos que: $\frac{1}{\log_b a} = \log_a b$

Queremos mostrar que:

$\frac{1}{\log_2 n} + \frac{1}{\log_3 n} + \frac{1}{\log_4 n} + \ldots + \frac{1}{\log_{10} n} = \frac{1}{\log_{10!} n}$

$$\frac{1}{\log_2 n}+\frac{1}{\log_3 n}+\frac{1}{\log_4 n}+\ldots+\frac{1}{\log_{10} n}=$$
$$=\log_n 2+\log_n 3+\log_n 4+\ldots+\log_n 10$$
$$=\log_n\left(2\times 3\times 4\times\ldots\times 10\right)$$
$$=\log_n 10!$$
$$=\frac{1}{\log_{10!} n}\text{, como pretendíamos mostrar.}$$

98.1. $\ln(18x-3)=\ln(6x-1)+\ln(4x^2-6)$

$D=\left\{x\in\mathbb{R}:18x-3>0\wedge 6x-1>0\wedge 4x^2-6>0\right\}$

Cálculos auxiliares:

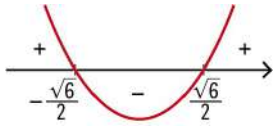
$18x-3>0\Leftrightarrow 18x>3\Leftrightarrow x>\frac{3}{18}\Leftrightarrow x>\frac{1}{6}$

$6x-1>0\Leftrightarrow 6x>1\Leftrightarrow x>\frac{1}{6}$

$4x^2-6>0$

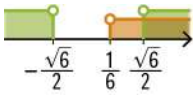
$4x^2-6=0\Leftrightarrow x^2=\frac{6}{4}$

$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$



$4x^2-6>0\Leftrightarrow x<-\frac{\sqrt{6}}{2}\vee x>\frac{\sqrt{6}}{2}$

$D=\left]\frac{\sqrt{6}}{2},+\infty\right[$



$\ln(18x-3)=\ln(6x-1)+\ln(4x^2-6)$

$\Leftrightarrow\ln\left[3(6x-1)\right]=\ln(6x-1)+\ln(4x^2-6)$

$\Leftrightarrow\ln 3+\cancel{\ln(6x-1)}=\cancel{\ln(6x-1)}+\ln(4x^2-6)$

$\Leftrightarrow\ln 3=\ln(4x^2-6)$

$\Leftrightarrow 3=4x^2-6\wedge x>\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\Leftrightarrow 4x^2=9\wedge x>\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\Leftrightarrow x^2=\frac{9}{4}\wedge x>\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{9}{4}}\wedge x>\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\Leftrightarrow\left(x=-\frac{3}{2}\vee x=\frac{3}{2}\right)\wedge x>\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

$S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

98.2. $e^{\ln 4-\ln x}=\frac{8}{x^2}$

$D=\left\{x\in\mathbb{R}:x>0\wedge x^2\neq 0\right\}=]0,+\infty[=\mathbb{R}^+$

$e^{\ln 4-\ln x}=\frac{8}{x^2}\Leftrightarrow e^{\ln 4}\times e^{-\ln x}=\frac{8}{x^2}$

$\Leftrightarrow 4\times e^{\ln x^{-1}}=\frac{8}{x^2}$

$\Leftrightarrow 4\times x^{-1}=\frac{8}{x^2}\wedge x>0$

$\Leftrightarrow 4\times\frac{1}{x}=\frac{8}{x^2}\wedge x>0$

$\Leftrightarrow\frac{4}{x}=\frac{8}{x^2}\wedge x>0$

$\Leftrightarrow\frac{4x}{x^2}=\frac{8}{x^2}\wedge x>0$

$\Leftrightarrow 4x=8\wedge x>0$

$\Leftrightarrow x=2\wedge x>0$

$\Leftrightarrow x=2$

$S=\{2\}$

98.3. $(\log_2 x)^2-(\log_2(2x))^2=0$

$D=\left\{x\in\mathbb{R}:x>0\wedge 2x>0\right\}$

$=\left\{x\in\mathbb{R}:x>0\right\}=]0,+\infty[=\mathbb{R}^+$

$(\log_2 x)^2-(\log_2(2x))^2=0$

$\Leftrightarrow(\log_2 x)^2=(\log_2(2x))^2$

$\Leftrightarrow\log_2 x=\log_2(2x)\vee\log_2 x=-\log_2(2x)$

$\Leftrightarrow\log_2 x=\log_2(2x)\vee\log_2 x=\log_2(2x)^{-1}$

$\Leftrightarrow\left(x=2x\vee x=(2x)^{-1}\right)\wedge x>0$

$\Leftrightarrow\left(x-2x=0\vee x=\frac{1}{2x}\right)\wedge x>0$

$\Leftrightarrow\left(-x=0\vee 2x^2=1\right)\wedge x>0$

$\Leftrightarrow\left(x=0\vee x^2=\frac{1}{2}\right)\wedge x>0$

$\Leftrightarrow\left(x=0\vee x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\wedge x>0$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

98.4. $\ln^2 x+\ln x^3=4$

$D=\left\{x\in\mathbb{R}:x>0\wedge x^3>0\right\}=$

$=\left\{x\in\mathbb{R}:x>0\right\}=]0,+\infty[=\mathbb{R}^+$

$\ln^2 x+\ln x^3=4\Leftrightarrow(\ln x)^2+3\ln x-4=0$

Mudança de variável: $\ln x=y$

$\Leftrightarrow y^2+3y-4=0\Leftrightarrow y=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times 1\times(-4)}}{2\times 1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2}\Leftrightarrow y=\frac{-3-5}{2}\vee y=\frac{-3+5}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-4\vee y=1\Leftrightarrow(\ln x=-4\vee\ln x=1)\wedge x>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x = e^{-4} \vee x = e^{1}\right) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{e^4} \vee x = e\right) \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^4} \vee x = e$

$S = \left\{\frac{1}{e^4}, e\right\}$

Pág. 188

99. $f(x) = \log_a x$

O ponto de coordenadas $(16, -2)$ pertence ao gráfico de *f*.

99.1. Sabemos que $f(16) = -2$.

$f(16) = -2 \Leftrightarrow \log_a 16 = -2 \Leftrightarrow a^{-2} = 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^2 = 4^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a} = 4 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$

$f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

$f(64) = \log_{\frac{1}{4}} 64 = \log_{\frac{1}{4}} 4^3 = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = -3$

99.2. $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0, +\infty[= \mathbb{R}^+$

$f(x) = -1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}} x = -1 \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \wedge x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 4 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 4$

99.3. Como os gráficos de *f* e f^{-1} são simétricos relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares ($y = x$), determinar $f^{-1}(2)$ corresponde a determinarmos o valor de x para o qual $f(x) = -2$.

$f(x) = -2 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}} x = -2 \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 4^2 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 16 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 16$

$f^{-1}(-2) = 16$

100. $\log_{12} 9 = x$; $\log_{12} 4 = y$

Opção (A):

$\frac{x+y}{2} = \frac{\log_{12} 9 + \log_{12} 4}{2} = \frac{\log_{12}(9 \times 4)}{2} =$

$= \frac{\log_{12}(36)}{2} = \frac{\log_{12} 6^2}{2} = \frac{2\log_{12} 6}{2}$

$= \log_{12} 6$; verdadeira

Opção (B):

$\frac{x+1}{2} = \frac{\log_{12} 9 + 1}{2} =$

$= \frac{\log_{12} 9 + \log_{12} 12}{2} = \frac{\log_{12}(9 \times 12)}{2} = \frac{\log_{12} 98}{2}$; falsa

Opção (C):

$\frac{\sqrt{x+y}}{2} = \frac{\sqrt{\log_{12} 9 + \log_{12} 4}}{2} =$

$= \frac{\sqrt{\log_{12} 36}}{2} = \frac{\sqrt{\log_{12} 6^2}}{2} = \frac{\sqrt{2\log_{12} 6}}{2}$; falsa

Opção (D):

$\frac{y+1}{2} = \frac{\log_{12} 4 + 1}{2} = \frac{\log_{12} 4 + \log_{12} 12}{2} =$

$= \frac{\log_{12}(4 \times 12)}{2} = \frac{\log_2 48}{2}$; falsa

Opção (A)

Outro processo:

$\log_{12} 6 = \log_{12}(3 \times 2) = \log_{12}\left[(3 \times 2)^2\right]^{\frac{1}{2}} =$

$= \frac{1}{2}\log_{12}(3^2 \times 2^2) = \frac{1}{2}\log_{12}(9 \times 4) =$

$= \frac{1}{2}(\log_{12} 9 + \log_{12} 4) = \frac{1}{2}(x+y) = = \frac{x+y}{2}$

(A)

101.1. $f(a) = \ln a$; $D(a, \ln a)$

$f(3a) = \ln(3a)$; $C(3a, \ln(3a))$

$A_{[ABCD]} = \frac{B+b}{2} \times h = \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \times \overline{AB} =$

$= \frac{y_C + y_D}{2} \times (x_B - x_A) = \frac{\ln(3a) + \ln(a)}{2} \times (3a - a) =$

$= \frac{\ln(3a \times a)}{2} \times 2a = \ln(3a^2) \times a = a\ln(3a^2)$

101.2.



$A(a) = 8 \Leftrightarrow a\ln(3a^2) = 8 \Leftrightarrow a \approx 2{,}63483$

$x_B = 3a = 3 \times 2{,}63483 = 7{,}90449$

$x_B \approx 7{,}90$

Pág. 189

102.1. Seja:

M: o montante final, ou seja, o capital acumulado.

C: Capital inicial

$C = 8000\,€$

r: a taxa de juro anual

$r = 2{,}1\% = 0{,}021$

n: número de períodos

$n = 5$

k: n.º de pagamentos de juro num ano

$k = 12$

$M = c\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn}$

$M = 8000\left(1 + \frac{0{,}021}{12}\right)^{12\times 5} \approx 8884{,}87\,€$

O capital acumulado ao fim de 5 anos é 8884,87 €, aproximadamente.

102.2. $r = 1{,}9\% = 0{,}019$; $M = 10\,000\,€$

Capitalizações anuais

$r = ?$

$M = C \times (1+r)^n$

$10000 = 8000 \times (1+0{,}019)^n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1+0{,}019)^n = \dfrac{10000}{8000} \Leftrightarrow 1{,}019^n = \dfrac{10}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1{,}019^n = \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow n = \log_{1{,}019} \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \log_{1{,}019} 1{,}25 \Leftrightarrow n = \dfrac{\ln 1{,}25}{\ln 1{,}019}$

102.3. $M = 8210\,€$

Capitalizações trimestrais: $k = 4$

$n = 1$; $C = 8000\,€$; $r = ?$; $M = C\left(1+\dfrac{r}{k}\right)^{kn}$

$8210 = 8000\left(1+\dfrac{r}{4}\right)^{4\times 1} \Leftrightarrow \left(1+\dfrac{r}{4}\right)^4 = \dfrac{8210}{8000} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(1+\dfrac{r}{4}\right)^4 = \dfrac{821}{800} \Leftrightarrow \left(1+\dfrac{r}{4}\right)^4 \approx 1{,}02625 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+\dfrac{r}{4} = \sqrt[4]{1{,}02625} \Leftrightarrow 1+\dfrac{r}{4} \approx 1{,}006499 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 + r = 4{,}025996 \Leftrightarrow r = 0{,}025996 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r \approx 0{,}026 = 2{,}6\%$

103.1. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 1 + \log_a x = \log_{\frac{1}{a}} x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \log_a x = \dfrac{\log_a x}{\log_a \dfrac{1}{a}} \Leftrightarrow 1 + \log_a x = \dfrac{\log_a x}{\log_a a^{-1}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \log_a x = \dfrac{\log_a x}{-1} \Leftrightarrow 1 + \log_a x = -\log_a x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_a x + \log_a x = -1 \Leftrightarrow 2\log_a x = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_a x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = a^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$

$x_P = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$

103.2. $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right) = 1 + \log_a \dfrac{1}{\sqrt{a}} = 1 + \log_a \left(\sqrt{a}\right)^{-1} =$

$= 1 + \log_a \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = 1 + \log_a a^{-\frac{1}{2}} = 1 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$

$y_P = \dfrac{1}{2}$, não depende de a.

104.1. $f(x) = \log_2 \left(\dfrac{8}{\sqrt{x+1}}\right) - \log_4 \left[4(x+1)^3\right]$

$= \log_2 8 - \log_2 \sqrt{x+1} - \left[\log_4 4 + \log_4 (x+1)^3\right]$

$= \log_2 2^3 - \log_2 (x+1)^{\frac{1}{2}} - \left[1 + 3\log_4 (x+1)\right]$

$= 3 - \dfrac{1}{2}\log_2 (x+1) - 1 - 3\log_4 (x+1)$

$= 2 - \dfrac{1}{2}\log_2 (x+1) - 3\dfrac{\log_2 (x+1)}{\log_2 4}$

$= 2 - \dfrac{1}{2}\log_2 (x+1) - 3\dfrac{\log_2 (x+1)}{\log_2 2^2}$

$= 2 - \dfrac{1}{2}\log_2 (x+1) - 3\dfrac{\log_2 (x+1)}{2}$

$= 2 - \dfrac{1}{2}\log_2 (x+1) - \dfrac{3}{2}\log_2 (x+1)$

$= 2 - \dfrac{4}{2}\log_2 (x+1)$

$= 2 - 2\log_2 (x+1)$, como pretendíamos mostrar.

104.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2\log_2 (x+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\log_2 (x+1) = -2 \Leftrightarrow \log_2 (x+1) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 1 = 2^1 \wedge x > -1 \Leftrightarrow x + 1 = 2 \wedge x > -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \wedge x > -1 \Leftrightarrow x = 1$

Zero de f: 1

104.3. $f(2x+1) - f(x)$

$= 2 - 2\log_2 (2x+1+1) - 2\left[2 - 2\log_2 (x+1)\right]$

$= \cancel{2} - 2\log_2 (2x+2) \cancel{-2} + 2\log_2 (x+1)$

$= -2\log_2 \left[2(x+1)\right] + 2\log_2 (x+1)$

$= -2\left[\log_2 2 + \log_2 (x+1)\right] + 2\log_2 (x+1)$

$= -2\left[1 + \log_2 (x+1)\right] + 2\log_2 (x+1)$

$= -2 \cancel{-2\log_2 (x+1)} + \cancel{2\log_2 (x+1)} = -2$

$f(2x+1) - f(x) = -2$ que é constante $\forall x \in]-1, +\infty[$

105. Pretendemos mostrar que:

$\log_{1+y} x + \log_{1-y} x = 2 \times \log_{1+y} x \times \log_{1-y} x$

Pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

$1^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 = 1^2 - y^2$

Por outro lado,

$\log_{1+y} x + \log_{1-y} x = \dfrac{\ln x}{\ln(1+y)} + \dfrac{\ln x}{\ln(1-y)} =$

$= \dfrac{\ln x \ln(1-y) + \ln x \ln(1+y)}{\ln(1+y)\ln(1-y)} =$

$= \dfrac{\ln x \left[\ln(1-y) + \ln(1+y)\right]}{\ln(1+y)\ln(1-y)} =$

$= \dfrac{\ln x \left[\ln(1-y)(1+y)\right]}{\ln(1+y)\ln(1-y)} =$

$= \dfrac{\ln x \ln\left(1^2 - y^2\right)}{\ln(1+y)\ln(1-y)} = \dfrac{\ln x \ln x^2}{\ln(1+y)\ln(1-y)} =$

$= \dfrac{\ln x}{\ln(1+y)} \times \dfrac{\ln x^2}{\ln(1-y)} = \log_{1+y} x \times \dfrac{2\ln x}{\ln(1-y)}$

$= \log_{1+y} x \times 2 \times \log_{1-y} x = 2 \times \log_{1+y} x \times \log_{1-y} x$, como pretendíamos mostrar.

Pág. 190

106.1. $f(x)=\left(x^2-2x\right)\mathrm{e}^x$

$$f'(x)=\left[\left(x^2-2x\right)\mathrm{e}^x\right]'=$$
$$=\left(x^2-2x\right)'\mathrm{e}^x+\left(x^2-2x\right)\left(\mathrm{e}^x\right)'=$$
$$=\left(2x-2\right)\mathrm{e}^x+\left(x^2-2x\right)\mathrm{e}^x=$$
$$=\left(\cancel{2x}-2+x^2-\cancel{2x}\right)\mathrm{e}^x=$$
$$=\left(x^2-2\right)\mathrm{e}^x$$

106.2. $f(x)=\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^x$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}\mathrm{e}^x\right)'=\left(\frac{1}{x}\right)'\mathrm{e}^x+\frac{1}{x}\left(\mathrm{e}^x\right)'=$$
$$=\frac{(1)'x-1\times(x)'}{x^2}\mathrm{e}^x+\frac{1}{x}\mathrm{e}^x=-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^x+\frac{1}{x}\mathrm{e}^x=$$
$$=\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2}\right)\mathrm{e}^x=\frac{x-1}{x^2}\mathrm{e}^x$$

106.3. $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{2\mathrm{e}^x+1}$

$$f'(x)=\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{2\mathrm{e}^x+1}\right)'=$$
$$=\frac{\left(\mathrm{e}^x-1\right)'\left(2\mathrm{e}^x+1\right)-\left(\mathrm{e}^x-1\right)\left(2\mathrm{e}^x+1\right)'}{\left(2\mathrm{e}^x+1\right)^2}=$$
$$=\frac{\mathrm{e}^x\left(2\mathrm{e}^x+1\right)-\left(\mathrm{e}^x-1\right)\times 2\mathrm{e}^x}{\left(2\mathrm{e}^x+1\right)^2}=$$
$$=\frac{\mathrm{e}^x\left(\cancel{2\mathrm{e}^x}+1-\cancel{2\mathrm{e}^x}+2\right)}{\left(2\mathrm{e}^x+1\right)^2}=\frac{3\mathrm{e}^x}{\left(2\mathrm{e}^x+1\right)^2}$$

106.4. $f(x)=x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

$$f'(x)=\left(x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)'=(x)'\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)'=$$
$$=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+x\times\left(\frac{1}{x}\right)'\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+x\times\frac{(1)'x-1\times(x)'}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=$$
$$=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+x\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\left(1-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

106.5. $f(x)=(\cos x)\mathrm{e}^{\sin x}$

$$f'(x)=\left[(\cos x)\mathrm{e}^{\sin x}\right]'=$$
$$=(\cos x)'\mathrm{e}^{\sin x}+\cos x\left(\mathrm{e}^{\sin x}\right)'=$$
$$=-\sin x\mathrm{e}^{\sin x}+\cos x\times(\sin x)'\mathrm{e}^{\sin x}=$$
$$=-\sin x\mathrm{e}^{\sin x}+\cos x\times\cos x\mathrm{e}^{\sin x}=$$
$$=\left(\cos^2 x-\sin x\right)\mathrm{e}^{\sin x}$$

106.6. $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1+x}{1+x^2}}$

$$f'(x)=\left(\mathrm{e}^{\frac{1+x}{1+x^2}}\right)'=\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)'\mathrm{e}^{\frac{1+x}{1+x^2}}=$$
$$=\frac{(1+x)'\left(1+x^2\right)-(1+x)\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{e}^{\frac{1+x}{1+x^2}}=$$
$$=\frac{1+x^2-(1+x)\times 2x}{\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{e}^{\frac{1+x}{1+x^2}}=\frac{1+x^2-2x+2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{e}^{\frac{1+x}{1+x^2}}=$$
$$=\frac{-x^2-2x+1}{\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{e}^{\frac{1+x}{1+x^2}}=-\frac{x^2+2x-1}{\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{e}^{\frac{1+x}{1+x^2}}$$

106.7.

$$f'(x)=\left(3^{\frac{1}{x}}\right)'=\left(\frac{1}{x}\right)'\times 3^{\frac{1}{x}}\ln 3=$$
$$=\frac{(1)'x-1\times(x)'}{x^2}\times 3^{\frac{1}{x}}\ln 3=-\frac{1}{x^2}\times 3^{\frac{1}{x}}\ln 3=$$
$$=-\frac{\ln 3}{x^2}\times 3^{\frac{1}{x}}$$

106.8.

$$f'(x)=\left(\frac{5^{2x}}{1-5^{2x}}\right)'=\frac{\left(5^{2x}\right)'\left(1-5^{2x}\right)-5^{2x}\left(1-5^{2x}\right)'}{\left(1-5^{2x}\right)^2}=$$
$$=\frac{(2x)'\times 5^{2x}\times\ln 5\left(1-5^{2x}\right)}{\left(1-5^{2x}\right)^2}-$$
$$-\frac{5^{2x}\left(-(2x)'\times 5^{2x}\times\ln 5\right)}{\left(1-5^{2x}\right)^2}=$$
$$=\frac{2\times 5^{2x}\times\ln 5\left(1-5^{2x}\right)-5^{2x}\left(-2\ln 5\times 5^{2x}\right)}{\left(1-5^{2x}\right)^2}=$$
$$=\frac{5^{2x}\times\ln 5\left(2-\cancel{2\times 5^{2x}}+\cancel{2\times 5^{2x}}\right)}{\left(1-5^{2x}\right)^2}=\frac{2\ln 5\times 5^{2x}}{\left(1-5^{2x}\right)^2}$$

107. $f(x)=2^x-2x-2$

$$f'(x)=\left(2^x-2x-2\right)'=2^x\ln 2-2=2\left(2^{x-1}\ln 2-1\right)$$

108.1. $f(x)=6\Leftrightarrow 3^x\left(3^x-1\right)=6\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(3^x\right)^2-3^x-6=0$$

Fazendo $3^x=y$, obtém-se,

$$y^2-y-6=0\Leftrightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 1\times(-6)}}{2\times 1}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}\Leftrightarrow y=\frac{1\pm 5}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y=-2\vee y=3\Leftrightarrow \underbrace{3^x=-2}_{\text{equação impossível}}\vee 3^x=3^1\Leftrightarrow x=1$$

$S=\{1\}$

108.2. $f'(x)=\left[3^x\left(3^x-1\right)\right]'=$

$=\left(3^x\right)'\left(3^x-1\right)+3^x\left(3^x-1\right)'=$

$=3^x\ln 3\left(3^x-1\right)+3^x\times 3^x\ln 3=$

$=3^x\ln 3\left(3^x-1+3^x\right)=3^x\ln 3\left(2\times 3^x-1\right)$

109. $h(x)=100x^2-100\mathrm{e}^{-0,2x}$

$h'(x)=\left(100x^2-100\mathrm{e}^{-0,2x}\right)'=$

$=200x-100\times(-0,2x)'\,\mathrm{e}^{-0,2x}=$

$=200x-100\times(-0,2)\mathrm{e}^{-0,2x}=200x+20\mathrm{e}^{-0,2x}$

$h''(x)=\left(200x+20\mathrm{e}^{-0,2x}\right)'=$

$=200+20\times(-0,2x)'\,\mathrm{e}^{-0,2x}=$

$=200+20\times(-0,2)\mathrm{e}^{-0,2x}=200-4\mathrm{e}^{-0,2x}$

$h''(x)=0\Leftrightarrow 200-4\mathrm{e}^{-0,2x}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\mathrm{e}^{-0,2x}=200\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0,2x}=50\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0,2x=\ln 50\Leftrightarrow x=\dfrac{\ln 50}{-0,2}\Leftrightarrow x\approx -19,6$

Opção (C)

110. $g'(x)=-\mathrm{e}^x-2$

• $g'(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$. Então, a função g é estritamente decrescente.

Logo, a opção (A) não está correta.

$g'(x)=0\Leftrightarrow -\mathrm{e}^x-2=0\Leftrightarrow \underbrace{\mathrm{e}^x=-2}_{\text{equação impossível}}$

• g' não tem zeros e a função g é estritamente decrescente de domínio $\mathbb{R}$. Então, a função g não tem um mínimo absoluto.

Logo, a opção (B) não está correta.

• $g''(x)=\left(-\mathrm{e}^x-2\right)'=-\mathrm{e}^x$

$g''(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$. Então, a função g tem a concavidade voltada para baixo e não tem pontos de inflexão. Logo, a opção (C) não está correta e a opção (D) é verdadeira.

Opção (D)

Pág. 191

111.1. $P(0)=\dfrac{105}{1+34\mathrm{e}^{-1,1244\times 0}}=\dfrac{105}{35}=3$

No início da observação, foram contados 3 microrganismos.

111.2. $P(10)=\dfrac{105}{1+34\mathrm{e}^{-1,1244\times 10}}=$

$=\dfrac{105}{1+34\mathrm{e}^{-11,244}}\approx 105$

Ao fim de 10 dias existiam cerca de 105 microrganismos.

111.3. $P'(t)=\left(\dfrac{105}{1+34\mathrm{e}^{-1,1244t}}\right)'=$

$=\dfrac{(105)'\left(1+34\mathrm{e}^{-1,1244t}\right)-105\left(1+34\mathrm{e}^{-1,1244t}\right)'}{\left(1+34\mathrm{e}^{-1,1244t}\right)^2}=$

$=\dfrac{-105\left(34\times(-1,1244t)'\,\mathrm{e}^{-1,1244t}\right)}{\left(1+34\mathrm{e}^{-1,1244t}\right)^2}=$

$=\dfrac{-105\times 34\left(-1,1244\right)\mathrm{e}^{-1,1244t}}{\left(1+34\mathrm{e}^{-1,1244t}\right)^2}=$

$=\dfrac{4014,108\mathrm{e}^{-1,1244t}}{\left(1+34\mathrm{e}^{-1,1244t}\right)^2}$

$P'(t)=0,\forall t\geq 0$. Então, a função P é estritamente crescente.

$\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{105}{1+34\mathrm{e}^{-1,1244t}}=$

$=\dfrac{105}{1+34\times 0}=\dfrac{105}{1}=105$

Logo, a população cresce ao longo do tempo, mas não ultrapassa os 105 indivíduos.

111.4. A taxa de crescimento é dada por $P'(t)$.

Então, pretende-se saber o máximo da função P'.

$P''(t)=\left(\dfrac{4014,108\mathrm{e}^{-1,1244t}}{\left(1+34\mathrm{e}^{-1,1244t}\right)^2}\right)'=$

$=\dfrac{\left(4014,108\mathrm{e}^{-1,1244t}\right)'\left(1+34\mathrm{e}^{-1,1244t}\right)^2}{\left[\left(1+34\mathrm{e}^{-1,1244t}\right)^2\right]^2}-$

$-\dfrac{4014,108\mathrm{e}^{-1,1244t}\left[\left(1+34\mathrm{e}^{-1,1244t}\right)^2\right]'}{\left[\left(1+34\mathrm{e}^{-1,1244t}\right)^2\right]^2}=$

$=\dfrac{4014,108\times(-1,1244t)'\,\mathrm{e}^{-1,1244t}\left(1+34\mathrm{e}^{-1,1244t}\right)^2}{\left(1+24\mathrm{e}^{-1,1244t}\right)^4}-$

$-\dfrac{4014,108\mathrm{e}^{-1,1244t}\times 2\left(1+34\mathrm{e}^{-1,1244t}\right)\times\left(1+34\mathrm{e}^{-1,1244t}\right)'}{\left(1+24\mathrm{e}^{-1,1244t}\right)^4}=$

$=\dfrac{4014,108\times\mathrm{e}^{-1,1244t}\left(1+34\mathrm{e}^{-1,1244t}\right)}{\left(1+34\mathrm{e}^{-1,1244t}\right)^4}\times$

$\times\left[-1,1244\left(1+34\mathrm{e}^{-1,1244t}\right)-2\times 34\left(-1,1244t\right)'\,\mathrm{e}^{-1,1244t}\right]=$

$=\dfrac{4014,108\times\mathrm{e}^{-1,1244t}}{\left(1+34\mathrm{e}^{-1,1244t}\right)^3}\times$

$\times\left[-1,1244\left(1+34\mathrm{e}^{-1,1244t}\right)+2\times 34\times 1,1244\mathrm{e}^{-1,1244t}\right]=$

$$= \frac{4014,108e^{-1,1244t} \times 1,1244}{\left(1+34e^{-1,1244t}\right)^3} \times$$

$$\times\left(-1-34e^{-1,1244t}+2\times 34e^{-1,1244t}\right) =$$

$$= \frac{4513,463035e^{-1,1244t}\left(-1+34e^{-1,1244t}\right)}{\left(1+34e^{-1,1244t}\right)^3}$$

$$P''(t)=0 \Leftrightarrow \frac{4513,463035e^{-1,1244t}}{\left(1+34e^{-1,1244t}\right)^3} \times$$

$$\times\left(-1+34e^{-1,1244t}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1+34e^{-1,1244t}=0 \Leftrightarrow 34e^{-1,1244t}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-1,1244t}=\frac{1}{34} \Leftrightarrow -1,1244t=-\ln 34 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{\ln 34}{1,1244} \Leftrightarrow t\approx 3,136 \text{ dias}$$

t	0		$\approx 3,136$	$+\infty$
P''	+	+	0	−
P'		↗		↘
			Máx.	

1 dia $\rightarrow$ 24 horas

0,136 dias $\rightarrow$ x horas

$$x=\frac{0,136\times 24}{1}\approx 3$$

A taxa de crescimento dos microrganismos é máxima ao fim de, aproximadamente, 3 dias e 3 horas.

112.1. $f(x)=-\frac{x}{2}+1+2\ln x$

$$f'(x)=\left(-\frac{x}{2}+1+2\ln x\right)'=-\frac{1}{2}+0+2\times\frac{(x)'}{x}=$$

$$=\frac{2}{x}-\frac{1}{2}$$

112.2. $f(x)=x\ln x-x$

$$f'(x)=(x)'\ln x+x(\ln x)'-(x)'=1\ln x+x\times\frac{(x)'}{x}-1=$$

$$=\ln x+1-1=\ln x$$

112.3. $f(x)=\ln^2 x+\ln\left(x^2-1\right)$

$$f'(x)=\left[\ln^2 x+\ln\left(x^2-1\right)\right]'=$$

$$=2\ln x\times(\ln x)'+\frac{\left(x^2-1\right)'}{x^2-1}=$$

$$=2\ln x\times\frac{(x)'}{x}+\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2\ln x}{x}+\frac{2x}{x^2-1}$$

112.4. $f(x)=\ln\left(e^x+x\right)$

$$f'(x)=\left[\ln\left(e^x+x\right)\right]'=\frac{\left(e^x+x\right)'}{e^x+x}=\frac{e^x+1}{e^x+x}$$

112.5. $f(x)=\frac{1}{2}\ln^2(x+1)$

$$f'(x)=\left[\frac{1}{2}\ln^2(x+1)\right]'=\frac{1}{2}\times 2\ln(x+1)\times\left[\ln(x+1)\right]'=$$

$$=\ln(x+1)\times\frac{(x+1)'}{x+1}=\ln(x+1)\times\frac{1}{x+1}=\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

112.6. $f(x)=(x-1)\log_2\left(x^2-x\right)$

$$f'(x)=\left[(x-1)\log_2\left(x^2-x\right)\right]'=$$

$$=(x-1)'\log_2\left(x^2-x\right)+(x-1)\left[\log_2\left(x^2-x\right)\right]'=$$

$$=1\log_2\left(x^2-x\right)+(x-1)\times\frac{\left(x^2-x\right)'}{\left(x^2-x\right)\ln 2}=$$

$$=\log_2\left(x^2-x\right)+\cancel{(x-1)}\times\frac{2x-1}{x\cancel{(x-1)}\ln 2}=$$

$$=\log_2\left(x^2-x\right)+\frac{2x-1}{x\ln 2}$$

112.7. $f(x)=\ln\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)$

$$f'(x)=\left[\ln\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)\right]'=\frac{\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)'}{\frac{1-e^x}{1+e^x}}=$$

$$=\frac{\left(1-e^x\right)'\left(1+e^x\right)-\left(1-e^x\right)\left(1+e^x\right)'}{\left(1+e^x\right)^2}}{\frac{1-e^x}{1+e^x}}=$$

$$=\frac{-e^x\left(1+e^x\right)-\left(1-e^x\right)\times e^x}{\left(1+e^x\right)\left(1-e^x\right)}=$$

$$=\frac{-e^x-\cancel{e^{2x}}-e^x+\cancel{e^{2x}}}{1-\left(e^x\right)^2}=$$

$$=\frac{-2e^x}{1-e^{2x}}=\frac{2e^x}{e^{2x}-1}$$

112.8. $f(x)=x\log_5\sqrt{x}$

$$f'(x)=(x)'\log_5\sqrt{x}+x\left(\log_5\sqrt{x}\right)'=$$

$$=\log_5\sqrt{x}+x\times\left(\log_5 x^{\frac{1}{2}}\right)'=$$

$$=\log_5\sqrt{x}+x\times\left(\frac{1}{2}\log_5 x\right)'=$$

$$=\log_5\sqrt{x}+\cancel{x}\times\frac{1}{2}\frac{(x)'}{\cancel{x}\ln 5}=\log_5\sqrt{x}+\frac{1}{2\ln 5}$$

Outro processo:

$$f'(x)=(x)'\log_5\sqrt{x}+x\left(\log_5\sqrt{x}\right)'=$$

$$=\log_5\sqrt{x}+x\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\sqrt{x}\ln 5}=\log_5\sqrt{x}+x\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'}{\sqrt{x}\ln 5}=$$

$$= \log_5 \sqrt{x} + x \times \frac{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x} \ln 5} = \log_5 \sqrt{x} + x \times \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x} \ln 5} =$$

$$= \log_5 \sqrt{x} + \cancel{x} \times \frac{1}{2\cancel{x} \ln 5} = \log_5 \sqrt{x} + \frac{1}{2 \ln 5}$$

112.9. $f(x) = (\ln x)^{\sqrt{2}}$

$$f'(x) = \left[(\ln x)^{\sqrt{2}} \right]' = \sqrt{2} (\ln x)^{\sqrt{2}-1} \times (\ln x)' =$$

$$= \sqrt{2} (\ln x)^{\sqrt{2}-1} \times \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{2} (\ln x)^{\sqrt{2}-1}}{x}$$

112.10. $f(x) = \left(\frac{1}{x} \right)^x$

$$f'(x) = \left[\left(\frac{1}{x} \right)^x \right]' = \left(e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^x} \right)' = \left(e^{x \ln x^{-1}} \right)' =$$

$$= (-x \ln x)' e^{x \ln x^{-1}} = \left[(-x)' \ln x + (-x)(\ln x)' \right] e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^x} =$$

$$= \left(-1 \ln x - \cancel{x} \times \frac{1}{\cancel{x}} \right) \times \left(\frac{1}{x} \right)^x = \left(\ln x^{-1} - 1 \right) \times \left(\frac{1}{x} \right)^x =$$

$$= \left(\ln \frac{1}{x} - 1 \right) \left(\frac{1}{x} \right)^x$$

113. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln^2(-x)}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ \ln\left(e^x - 1\right) - 2x & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se $x < 0$:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln^2(-x)}{x} \right)' = \frac{\left[\ln^2(-x) \right]' \times x - \ln^2(-x) \times (x)'}{x^2} =$$

$$= \frac{2 \ln(-x) \left[\ln(-x) \right]' \times x - \ln^2(-x) \times 1}{x^2} =$$

$$= \frac{2 \ln(-x) \times \frac{(-x)'}{-\cancel{x}} \times \cancel{x} - \ln^2(-x)}{x^2} =$$

$$= \frac{2 \ln(-x) - \ln^2(-x)}{x^2} = \frac{\ln(-x) \left[2 - \ln(-x) \right]}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(-x) \left[2 - \ln(-x) \right]}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\ln(-x) = 0 \vee 2 - \ln(-x) = 0 \right) \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(-x = e^0 \vee \ln(-x) = 2 \right) \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = -1 \vee -x = e^2 \right) \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = -e^2$$

Se $x > 0$:

$$f'(x) = \left[\ln\left(e^x - 1\right) - 2x \right]' = \frac{\left(e^x - 1\right)'}{e^x - 1} - 2 =$$

$$= \frac{e^x}{e^x - 1} - 2 = \frac{e^x - 2e^x + 2}{e^x - 1} = \frac{2 - e^x}{e^x - 1}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - e^x}{e^x - 1} = 0 \Leftrightarrow 2 - e^x = 0 \wedge e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = 2 \wedge e^x \neq 1 \Leftrightarrow x = \ln 2 \wedge x \neq 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(-x) \left[2 - \ln(-x) \right]}{x^2} & \text{se} \quad x < 0 \\ \dfrac{2 - e^x}{e^x - 1} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

$D'_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Zeros de f': $-e^2$, -1 e $\ln 2$

x	$-\infty$	$-e^2$		-1		0		$\ln 2$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	N.D.	$+$	0	$-$
f	↘	$-4e^{-2}$	↗	0	↘	N.D.	↗	$-2\ln 2$	↘
		Mín.		Máx.				Máx.	

$$f\left(-e^2\right) = \frac{\ln^2\left(e^2\right)}{-e^2} = \frac{2^2}{-e^2} = -\frac{4}{e^2} = -4e^{-2}$$

$$f(-1) = \frac{\ln^2 1}{-1} = 0$$

$$f(\ln 2) = \ln\left(e^{\ln 2} - 1\right) - 2\ln 2 = \ln(2-1) - 2\ln 2 =$$

$$= \ln 1 - 2\ln 2 = -2\ln 2$$

A função f é estritamente decrescente em $\left]-\infty, -e^2\right]$, em $[-1, 0[$ e em $[\ln 2, +\infty[$ e é estritamente crescente em $\left[-e^2, -1\right]$ e em $]0, \ln 2]$.

f tem um mínimo relativo igual a $-4e^{-2}$ para $x = -e^2$ e tem máximos relativos iguais a 0 e a $-2\ln 2$ para $x = -1$ e para $x = \ln 2$, respetivamente.

Pág. 192

114. $f(x) = 2\ln\left(e^x + 1\right) - x$; $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \underbrace{e^x + 1 \neq 0}_{\text{condição universal}} \right\} = \mathbb{R}$

114.1. $f'(x) = \left[2\ln\left(e^x + 1\right) - x \right]' =$

$$= 2\frac{\left(e^x + 1\right)'}{e^x + 1} - 1 = \frac{2e^x - e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \wedge e^x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f(0) = 2\ln\left(e^0 + 1\right) - 0 = 2\ln 2$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	↘	$2\ln 2$	↗
		Mín.	

A função f é estritamente decrescente em $]-\infty,0]$ e estritamente crescente em $[0,+\infty[$.

f tem um mínimo absoluto igual a $2\ln 2$ para $x=0$.

114.2. $f''(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)'=$

$=\dfrac{(e^x-1)'(e^x+1)-(e^x-1)\times(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}=$

$=\dfrac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)\times e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^x\left(\cancel{e^x}+1-\cancel{e^x}+1\right)}{(e^x+1)^2}=$

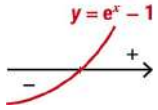
$=\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

$f''(x)=\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Logo, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em todo o domínio.

115.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{x^2}=\dfrac{e^{-\infty}}{+\infty}=\dfrac{0}{+\infty}=0$

115.2. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos x}{e^x-1}=\dfrac{\cos 0}{e^0-1}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$



115.3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^x-1}{x^2}=\dfrac{3^{-\infty}-1}{(-\infty)^2}=\dfrac{0-1}{+\infty}=0$

115.4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(2x+1)}{2x}\times2=$

$=\underbrace{\lim\limits_{y\to0^+}\dfrac{\ln(y+1)}{y}}_{\text{limite notável (L.N.)}}\times2=1\times2=2$

M.V. $\left|\begin{array}{l} y=2x \\ x\to0^+,y\to0^+\end{array}\right.$

Outro processo:

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left[\ln(1+2x)\right]'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{(1+2x)'}{1+2x}}{1}=$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{1+2x}=\dfrac{2}{1+2\times0}=2$

115.5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\dfrac{\ln(x-1+1)}{x-1}=\underbrace{\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\ln(y+1)}{y}}_{\text{L.N.}}=1$

M.V. $\left|\begin{array}{l} y=x-1 \\ x\to1,y\to0\end{array}\right.$

Outro processo:

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{(x)'}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{1}=1$

115.6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)^2}{x}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)^2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\ln(1+2x)}{2x}\times2=$

$=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(y+1)}{y}\times2=2\times1\times2=4$

M.V. $\left|\begin{array}{l} y=2x \\ x\to0,y\to0\end{array}\right.$

Outro processo:

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)^2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\ln(1+2x)}{x}=$

$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left[\ln(1+2x)\right]'}{(x)'}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{(1+2x)'}{1+2x}}{1}=$

$=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{1+2x}=2\times\dfrac{2}{1+0}=4$

115.7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\sqrt{x+1}}{x}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\sqrt{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)^{\frac{1}{2}}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\ln(x+1)}{x}=$

$=\dfrac{1}{2}\underbrace{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}}_{\text{L.N.}}=\dfrac{1}{2}\times1=\dfrac{1}{2}$

115.8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{\ln(2-x)}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{\ln(2-x)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-x(1-x)}{\ln(1+1-x)}=$

$=\lim\limits_{x\to1}(-x)\times\lim\limits_{y\to0}\dfrac{y}{\ln(y+1)}=-1\times\dfrac{1}{\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\ln(y+1)}{y}}=$

$=-1\times1=-1$

M.V. $\left|\begin{array}{l} y=1-x \\ x\to1,y\to0\end{array}\right.$

Outro processo:

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{\ln(2-x)}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2-x)'}{\left[\ln(2-x)\right]'}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-1}{\frac{(2-x)'}{2-x}}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(2x-1)(2-x)}{-1}=\dfrac{(2\times1-1)(2-1)}{-1}=\dfrac{1\times1}{-1}=-1$

115.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2+2x)-\ln 2}{x}=\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+2x)-\ln 2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2x+2}{2}\right)}{x}=$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}}_{\text{L.N.}}=1$$

115.10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\sqrt{x}}{x-1}=\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x^{\frac{1}{2}}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2}\ln x}{x-1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x-1+1)}{x-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y}}_{\text{L.N.}}=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

M.V. $\left|\begin{array}{l} y=x-1 \\ x\to 1, y\to 0\end{array}\right.$

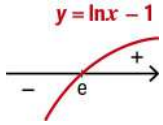
Outro processo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x^{\frac{1}{2}}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2}\ln x}{x-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$$

115.11. $\lim\limits_{x\to e^+}\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x-1}=\dfrac{\sqrt{e}}{\ln e^+-1}=\dfrac{\sqrt{e}}{0^+}=+\infty$



115.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{3x}}{\ln(2x+1)}=\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{3x}}{\ln(2x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x\left(e^{2x}-1\right)}{\ln(2x+1)}=$$

M.V. $y=2x$; $x\to 0$; $y\to 0$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-e^x\right)\times\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(2x+1)}=-e^0\times\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{\ln(y+1)}=$$

$$=-1\times\lim_{y\to 0}\frac{\frac{e^y-1}{y}}{\frac{\ln(y+1)}{y}}=-\frac{\overbrace{\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}^{\text{L.N.}}}{\underbrace{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y}}_{\text{L.N.}}}=-\frac{1}{1}=-1$$

Outro processo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{3x}}{\ln(2x+1)}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{3x}\right)'}{\left[\ln(2x+1)\right]'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(3x)'e^{3x}}{\frac{(2x+1)'}{2x+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-3e^{3x}\right)\times(2x+1)}{2}=$$

$$=\frac{(1-3)(0+1)}{2}==\frac{-2}{2}=-1$$

115.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-3e^x+2}{x^2+x}=\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-3e^x+2}{x^2+x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-3e^x+2\right)'}{\left(x^2+x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)'e^{2x}-3e^x}{2x+1}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-3e^x}{2x+1}=$$

$$=\frac{2\times 1-3\times 1}{0+1}=-1$$

Outro processo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-3e^x+2}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-3e^x+3}{x(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}\times\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-3\left(e^x-1\right)}{x}=$$

$$=\frac{1}{0+1}\times\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times 2-3\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{L.N.}}\right)=$$

$$=1\times\left(\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{L.N.}}\times 2-3\right)=1\times(1\times 2-3)=-1$$

M.V. $\left|\begin{array}{l} y=2x \\ x\to 0, y\to 0\end{array}\right.$

115.14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}+3e^x+2}{x^2+x}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+3e^x+2}{x^2+x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{2x}+3e^x+2\right)'}{\left(x^2+x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'e^{2x}+3e^x}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}+3e^x}{2x+1}=$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2e^{2x}+3e^x\right)'}{(2x+1)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(2x)'e^{2x}+3e^x}{2}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{2x}+3e^x}{2}=+\infty$$

Outro processo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+3e^x+2}{x^2+x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+3e^x+2}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+3e^x+2}{x^2}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=$$

$$= \left(\underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^2\right)^x}{x^2}}_{\text{L.N.}} + 3 \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}}_{\text{L.N.}} + \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} \right) \times \frac{1}{1+0} =$$

$$= \left(+\infty + 3\left(+\infty\right) + 0\right) \times 1 = +\infty$$

115.15. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+\ln x}{1-\ln x} = \dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\ln x}{1-\ln x} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2x+\ln x\right)'}{\left(1-\ln x\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{0-\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{2+0}{0^-} = -\infty$$

115.16. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(x-2\right)}{x} = \dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x-2\right)}{x} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\ln\left(x-2\right)\right]'}{\left(x\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\left(x-2\right)'}{x-2}}{1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Outro processo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x-2\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln\left(x-2\right)}{x-2}}{\frac{x}{x-2}} = \frac{\overbrace{\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{\ln y}{y}}^{\text{L.N.}}}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)}} =$$

$$= \frac{0}{\frac{1}{1-0}} = \frac{0}{1} = 0$$

M.V. $\left| \begin{array}{l} y = x-2 \\ x \to +\infty, y \to +\infty \end{array} \right.$

115.17. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\ln\left(x+1\right)} = \dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln\left(x+1\right)} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln x\right)'}{\left[\ln\left(x+1\right)\right]'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\left(x+1\right)'}{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x+1\right)'}{\left(x\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1} = 1$$

115.18. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{\ln\left(x+3\right)} = \dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{\ln\left(x+3\right)} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x+2\right)'}{\left[\ln\left(x+3\right)\right]'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{\left(x+3\right)'}{x+3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{1} = +\infty$$

115.19. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x+1}{\log x} = \dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x+1}{\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln x+1}{\ln x}}{\ln 10} =$$

$$= \ln 10 \times \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{\ln x} + \frac{1}{\ln x} \right) =$$

$$= \ln 10 \times \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\ln x}\right) = \ln 10 \times \left(1+\frac{1}{+\infty}\right) =$$

$$= \ln 10$$

Outro processo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x+1}{\log x} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln x+1\right)'}{\left(\log x\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}+0}{\frac{1}{x\ln 10}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\ln 10}{\cancel{x}} = \ln 10$$

115.20. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{x^2} = \dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-e^{3x}}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}\left(1-e^x\right)}{x^2} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^2\right)^x}{x^2}}_{\text{L.N.}} \times \lim_{x\to+\infty} \left(1-e^x\right) = +\infty \times \left(1-\infty\right) = -\infty$$

Outro processo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-e^{3x}}{x^2} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^{2x}-e^{3x}\right)'}{\left(x^2\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2x\right)' e^{2x} - \left(3x\right)' e^{3x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}-3e^{3x}}{2x} =$$

$$\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2e^{2x}-3e^{3x}\right)'}{\left(2x\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\left(2x\right)' e^{2x} - 3\times\left(3x\right)' e^{3x}}{2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4e^{2x}-9e^{3x}}{2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \left[e^{2x}\left(4-9e^x\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(+\infty\right)\left(-\infty\right) = -\infty$$

115.21. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+x^5}{2^x+x^{10}} = \dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+x^5}{2^x+x^{10}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1+\frac{x^5}{e^x}\right)}{e^x\left(\frac{2^x}{e^x}+\frac{x^{10}}{e^x}\right)} =$$

$$= \frac{1+\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^5}{e^x}}{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^x + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{10}}{e^x}} \underset{\left(\frac{2}{e}<1\right)}{=} \frac{1+\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^5}}}{0+\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^{10}}}} =$$

$$= \frac{1+\dfrac{1}{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^5}}_{\text{(L.N.)}}}}{0+\dfrac{1}{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^{10}}}_{\text{(L.N.)}}}} = \frac{1+\dfrac{1}{+\infty}}{0+\dfrac{1}{+\infty}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

115.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\tan x}{x^3} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\tan x}{x^3} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x\tan x\right)'}{\left(x^3\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x\right)'\tan x + e^x\left(\tan x\right)'}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x\tan x + e^x\dfrac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} = \frac{1\times 0+1\times 1}{3\times 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

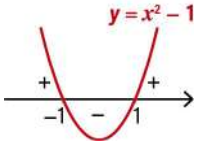
Outro processo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\tan x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x\times\dfrac{\sin x}{\cos x}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x}{x^3\cos x} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{\text{L.N.}}\times\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{x^2\cos x} = 1\times\frac{1}{0^+\times 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

115.23. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^2}}{\ln x} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

115.24. $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{e^{x+1}}{x^2-1} = \dfrac{e^0}{1-1} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$



115.25. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{e^{2x}} = \dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\ln x}{x}}{\dfrac{e^{2x}}{x}} = \frac{\overbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}}^{\text{L.N.}}}{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(e^2\right)^x}{x}}_{\text{L.N.}}} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

Outro processo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^{2x}} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln x\right)'}{\left(e^{2x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{(2x)'e^{2x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2xe^{2x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

115.26. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x - x}{e^x} = \dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x - x}{e^x} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln x - x\right)'}{\left(e^x\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}-1}{e^x} = \frac{0-1}{+\infty} = 0$$

Outro processo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x - x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(\dfrac{\ln x}{x}-1\right)}{\cancel{x}\dfrac{e^x}{x}} = \frac{\overbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}}^{\text{L.N.}}-1}{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^P}}_{\text{L.N.}}} =$$

$$= \frac{0-1}{+\infty} = 0$$

115.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{|x|} = \dfrac{0}{0}$

C.A. $\left|x\right| = \begin{cases} x & se \quad x\geq 0 \\ -x & se \quad x<0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{|x|} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{|x|} = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{-x} = -\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{|x|} \neq \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{|x|}.$$

Logo, não existe $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{|x|}$.

115.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)-x}{x^3} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)-x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left(\dfrac{\sin(3x)}{x}-1\right)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin(3x)}{3x}\times 3-1}{x^2} = \frac{\overbrace{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}}^{\text{L.N.}}\times 3-1}{\lim\limits_{x\to 0}x^2} =$$

$$= \frac{1\times 3-1}{0^+} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

M.V. $\left|\begin{array}{l} y = 3x \\ x\to 0, y\to 0 \end{array}\right.$

Outro processo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)-x}{x^3} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin(3x)-x\right)'}{\left(x^3\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(3x)'\cos(3x)-1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cos(3x)-1}{3x^2} =$$

$$= \frac{3-1}{0^+} = +\infty$$

115.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1-2x}{x^2} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-2x}{x^2} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-1-2x\right)'}{\left(x^2\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(2x)'e^{2x}-0-2}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2}{2x} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\left(2e^{2x}-2\right)'}{(2x)'} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(2x)'\,e^{2x}-0}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}}{2}=\frac{4\times e^0}{2}=2$$

115.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\overset{\text{RL'H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left[\ln(1+x)-x\right]'}{\left(x^2\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1+x)'}{1+x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-1-x}{1+x}}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cancel{x}}{2\cancel{x}(1+x)}=\frac{-1}{2(1+0)}=-\frac{1}{2}$$

Pág. 193

116. $C(t)=\dfrac{e^{2t}-1-2t}{t^2},\ t>0$

$$\lim_{t\to 0^+}C(t)=\lim_{t\to 0^+}\frac{e^{2t}-1-2t}{t^2}\overset{\text{RL'H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{t\to 0^+}\frac{\left(e^{2t}-1-2t\right)'}{\left(t^2\right)'}=$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{(2t)'\,e^{2t}-0-2}{2t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2e^{2t}-2}{2t}=2\lim_{t\to 0^+}\frac{e^{2t}-1}{2t}=$$

$$=2\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}}_{\text{L.N.}}=2\times 1=2$$

M.V. $\left|\begin{array}{l} y=2t \\ t\to 0^+,\ y\to 0^+ \end{array}\right.$

$$\lim_{t\to+\infty}C(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{2t}-1-2t}{t^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{e^{2t}}{t^2}-\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}\right)=$$

$$=\underbrace{\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(e^2\right)^t}{t^2}}_{\text{L.N.}}-\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^2}-\lim_{t\to+\infty}\frac{2}{t}=+\infty-0-0=+\infty$$

No instante inicial, a concentração de dióxido de carbono tende para 2 ppm. À medida que o tempo aumenta, $C(t)$ tende para $+\infty$, indicando um aumento ilimitado da concentração de dióxido de carbono no modelo considerado.

117. $f(x)=xe^{2x}-1$

$$f'(x)=\left(xe^{2x}-1\right)'=(x)'\,e^{2x}+x\times\left(e^{2x}\right)'=$$

$$=1\times e^{2x}+x\times(2x)'\,e^{2x}=e^{2x}+x\times 2e^{2x}=$$

$$=e^{2x}(1+2x)$$

Então, a opção (A) é verdadeira.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow(2x+1)e^{2x}=0\Leftrightarrow 2x+1=0\vee\underbrace{e^{2x}=0}_{\text{equação impossível}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

f é estritamente crescente em $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$.

Então, a opção (B) é verdadeira.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{2x}-1\right)=+\infty\times(+\infty)-1=+\infty$$

Logo, a opção (C) é verdadeira.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{2x}}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=$$

$$=+\infty-0=+\infty$$

O gráfico de f não tem assíntota quando $x\to+\infty$.

Logo, a opção (D) é falsa.

118. $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x(\ln x)^2}$

(A) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:x\geq 0\wedge\sqrt{x}>0\wedge\ln\sqrt{x}\neq 0\right\}=$

$$=]0,+\infty[\setminus\{1\}$$

C.A. $\left|\begin{array}{l} \ln\sqrt{x}=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=e^0\Leftrightarrow x=1 \end{array}\right.$

Logo, a afirmação é falsa.

(B) Assíntota não vertical:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{\ln\sqrt{x}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x\ln\sqrt{x}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{+\infty}=\frac{1}{2}$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x}}{2}-\frac{1}{\ln\sqrt{x}}-\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{+\infty}=0$$

A reta de equação $y=\frac{1}{2}x$ é assíntota ao gráfico de f quando $x\to+\infty$.

Logo, a afirmação é verdadeira.

(C) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{\ln\sqrt{x}}\right)=$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{0^-}=\frac{1}{2}+\infty=+\infty$$

Logo, a afirmação é falsa.

(D) $f'(x)=\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{\ln\sqrt{x}}\right)'=$

$$=\frac{1}{2}-\frac{(1)'\ln\sqrt{x}-1\times\left(\ln x^{\frac{1}{2}}\right)'}{\left(\ln x^{\frac{1}{2}}\right)^2}=\frac{1}{2}-\frac{0-\left(\frac{1}{2}\ln x\right)'}{\left(\frac{1}{2}\ln x\right)^2}=$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{x}}{\frac{1}{4}(\ln x)^2} = \frac{1}{2} + \frac{4}{2x(\ln x)^2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{x(\ln x)^2}$$

Logo, a afirmação é verdadeira.

119. $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^{-x}} & \text{se} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1 \\ \frac{x}{\ln x} & \text{se} \quad x > 0 \wedge x \neq 1 \end{cases}$; $D_g = \mathbb{R}$

Assíntotas verticais:

$D_g = \mathbb{R}$ e g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Logo, só poderão existir assíntotas verticais ao gráfico de g em $x = 0$ e $x = 1$.

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{e^{-x}} = \frac{0}{1} = 0 = g(0)$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

g é contínua em $x = 0$, pelo que, não existe assíntota vertical ao gráfico de g em $x = 0$.

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de g.

Assíntotas não verticais:

Quando $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left[g(x) - mx \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}}{\frac{\ln x}{x}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

O gráfico de g não tem assíntota não vertical quando $x \to +\infty$.

Quando $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \left[g(x) - mx \right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x \to -\infty} \frac{(x)'}{\left(e^{-x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{(-x)' e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \to -\infty$.

O gráfico de g tem uma assíntota vertical de equação $x = 1$ e uma assíntota horizontal de equação $y = 0$.

Pág. 194

120.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

120.2. $f'(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)' e^{\frac{x+1}{x-1}} =$

$$= \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} =$$

$$= \frac{x - 1 - (x+1)}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{x - 1 - x - 1}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} =$$

$$= \frac{-2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Logo, f é estritamente decrescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$ e não tem extremos.

120.3. $f''(x) = \left(\frac{-2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} \right)' =$

$$= \left(\frac{-2}{(x-1)^2} \right)' e^{\frac{x+1}{x-1}} + \left(\frac{-2}{(x-1)^2} \right) \left(e^{\frac{x+1}{x-1}} \right)' =$$

$$= \frac{(-2)'(x-1)^2 - (-2)\left[(x-1)^2\right]'}{\left[(x-1)^2\right]^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} -$$

$$- \frac{2}{(x-1)^2} \times \left(\frac{x+1}{x-1} \right)' e^{\frac{x+1}{x-1}} =$$

$$= e^{\frac{x+1}{x-1}} \left(\frac{0 + 2 \times 2(x-1)(x-1)'}{(x-1)^4} - \frac{2}{(x-1)^2} \times \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x} \right.$$

$$= e^{\frac{x+1}{x-1}} \left(\frac{4(x-1)}{(x-1)^4} - \frac{2\left(\cancel{x} - 1 - \cancel{x} - 1\right)}{(x-1)^4} \right) =$$

$$= e^{\frac{x+1}{x-1}} \times \left(\frac{4x - 4 + 4}{(x-1)^4} \right) = e^{\frac{x+1}{x-1}} \times \frac{4x}{(x-1)^4}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{x+1}{x-1}} \times 4x}{(x-1)^4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{\frac{x+1}{x-1}} = 0}_{\text{equação impossível}} \vee 4x = 0 \wedge (x-1)^4 \neq 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f(0) = e^{\frac{1}{-1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	N.D.	$+$
f		$\frac{1}{e}$ P.I.		N.D.	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e voltada para cima em $]0, 1[$ e em $]1, +\infty[$.

O ponto de coordenadas $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ é um ponto de inflexão.

120.4. • Assíntotas verticais (paralelas a Oy):

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ e f é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical ao gráfico de f para $x=1$.

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}}=\mathrm{e}^{\frac{2}{0}}=\mathrm{e}^{\infty}$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\mathrm{e}^{-\infty}=0$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\mathrm{e}^{+\infty}=+\infty$

A reta de equação $x=1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f .

• Assíntotas horizontais paralelas a Ox :

Quando $x\to\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}}=\lim_{x\to\pm\infty}\mathrm{e}^{\frac{\not{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\not{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}}=\mathrm{e}^{\frac{1+0}{1-0}}=\mathrm{e}^{1}=\mathrm{e}$$

A reta de equação $y=\mathrm{e}$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x\to+\infty$ e quando $x\to-\infty$.

O gráfico de f tem uma assíntota paralela ao eixo Oy de equação $x=1$ e uma assíntota paralela ao eixo Oy de equação $y=\mathrm{e}$.

121.1. $f(x)=\log\left(x^2+1\right)$

• Domínio:

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:\underbrace{x^2+1>0}_{\text{condição universal}}\right\}=\mathbb{R}$$

• Monotonia e extremos:

$$f'(x)=\left[\log\left(x^2+1\right)\right]'=\frac{\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)\ln10}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)\ln10}$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x=0\wedge\left(x^2+1\right)\ln10\neq0\Leftrightarrow x=0$

$f(0)=\log1=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$
		Mín.	

A função f é estritamente decrescente em $]-\infty,0]$, estritamente crescente em $[0,+\infty[$ e tem um mínimo absoluto igual a 0 para $x=0$.

• Concavidade e pontos de inflexão:

$$f''(x)=\left(\frac{2x}{\left(x^2+1\right)\ln10}\right)'=$$

$$=\frac{(2x)'\times\left(x^2+1\right)\ln10-2x\left[\left(x^2+1\right)\ln10\right]'}{\left[\left(x^2+1\right)\ln10\right]^2}=$$

$$=\frac{2\left(x^2+1\right)\ln10-2x\ln10\times2x}{\left(x^2+1\right)^2\ln^2 10}=$$

$$=\frac{2\ln10\left(x^2+1-2x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2\ln^2 10}=$$

$$=\frac{2\ln10\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)\ln^2 10}=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)\ln10}$$

$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)\ln10}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left(1-x^2\right)=0\wedge\underbrace{\left(x^2+1\right)\ln10\neq0}_{\text{condição universal}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-x^2=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1$

$f(-1)=\log(1+1)=\log2$

$f(1)=\log(1+1)=\log2$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f		$\log2$		$\log2$	
		P.I.		P.I.	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-1[$ e em $]1,+\infty[$ e voltada para cima em $]-1,1[$.

Os pontos de coordenadas $(-1,\log2)$ e $(1,\log2)$ são pontos de inflexão.

• Assíntotas

Assíntotas verticais:

$D_f=\mathbb{R}$ e f é contínua, pelo que não existem assíntotas verticais ao seu gráfico.

Assíntotas não verticais:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\log\left(x^2+1\right)}{x}\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left[\log\left(x^2+1\right)\right]'}{(x)'}=$$

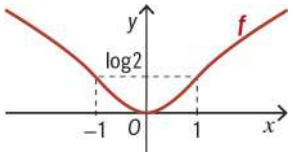
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)\ln10}}{1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{\left(x^2+1\right)\ln10}=$$

$$\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(2x)'}{\left[\left(x^2+1\right)\ln10\right]'}=\frac{2}{(2x)\ln10}=\frac{1}{\pm\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\log\left(x^2+1\right)\right]=+\infty$$

O gráfico de f não tem assíntotas não verticais.

• Gráfico:



121.2. $f(x)=\mathrm{e}^{x}+4\mathrm{e}^{-x}$

• Domínio: $D_f=\mathbb{R}$

• Monotonia e extremos:

$f'(x)=\left(e^{x}+4e^{-x}\right)'=e^{x}+4(-x)'e^{-x}=e^{x}-4e^{-x}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow e^{x}-4e^{-x}=0\Leftrightarrow e^{x}=4e^{-x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{e^{x}}{e^{-x}}=4\Leftrightarrow e^{2x}=4\Leftrightarrow 2x=\ln 4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\ln 4}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\ln 2^{2}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{2}{2}\ln 2=\ln 2$

$f(\ln 2)=e^{\ln 2}+4e^{\ln 2}=2+4e^{\ln 2^{1}}=$

$=2+4\times 2^{-1}=4$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Mín.

A função f é estritamente decrescente em $]-\infty,\ln 2]$, estritamente crescente em $[\ln 2,+\infty[$ e tem um mínimo absoluto, aproximadamente, igual a 4 para $x=\ln 2$.

• Concavidades e pontos de inflexão:

$f''(x)=\left(e^{x}-16e^{-4x}\right)'=e^{x}-16\times(-4x)'e^{-4x}=$

$=e^{x}+64e^{-4x}$

$f''(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$

Então, f tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$.

• Assíntotas:

Assíntotas verticais:

$D_f=\mathbb{R}$ e f é contínua, pelo que não existem assíntotas verticais ao seu gráfico.

Assíntotas não verticais:

Quando $x\to+\infty$:

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+4e^{-x}}{x}=$

$\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{x}+4e^{-x}\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+4(-x)'e^{-x}}{1}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}-4e^{-x}\right)=+\infty-0=+\infty$

O gráfico de f não tem assíntota não vertical quando $x\to+\infty$.

Quando $x\to-\infty$:

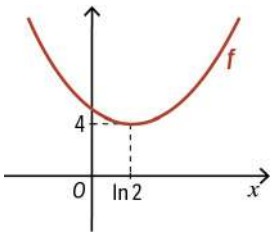
$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{x}+4e^{-x}}{x}=$

$\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(e^{x}+4e^{-x}\right)'}{(x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x}-4e^{-x}\right)=0-\infty=-\infty$

O gráfico de f não tem assíntota não vertical quando $x\to-\infty$.

Gráfico:



121.3. $f(x)=\frac{-2-\ln x}{x}$

• Domínio:

$D_f=\{x\in\mathbb{R}:x>0\wedge x\neq 0\}=\mathbb{R}^{+}$

• Monotonia e extremos:

$f'(x)=\left(\frac{-2-\ln x}{x}\right)'=\frac{(-2-\ln x)'\times x-(-2-\ln x)(x)'}{x^{2}}=$

$=\frac{-\frac{1}{\cancel{x}}\times\cancel{x}-(-2-\ln x)}{x^{2}}=\frac{-1+2+\ln x}{x^{2}}=\frac{1+\ln x}{x^{2}}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1+\ln x}{x^{2}}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+\ln x=0\wedge x^{2}\neq 0\wedge x\in D_f\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ln x=-1\wedge x\in\mathbb{R}^{+}\Leftrightarrow x=e^{-1}\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$

$f\left(e^{-1}\right)=\frac{-2-\ln e^{-1}}{e^{-1}}=\frac{-2-(-1)}{e^{-1}}=-e$

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
f'	N.D.	$-$	0	$+$
f	N.D.	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$

Mín.

A função f é estritamente decrescente em $\left]0,\frac{1}{e}\right]$, estritamente crescente em $\left[\frac{1}{e},+\infty\right[$ e tem um mínimo absoluto igual a $-e$ para $x=\frac{1}{e}$.

• Concavidades e pontos de inflexão:

$f''(x)=\left(\frac{1+\ln x}{x^{2}}\right)'=\frac{(1+\ln x)'\times x^{2}-(1+\ln x)\times\left(x^{2}\right)'}{\left(x^{2}\right)^{2}}=$

$=\frac{\frac{1}{x}\times x^{2}-(1+\ln x)\times 2x}{x^{4}}=\frac{x\left[1-(1+\ln x)\times 2\right]}{x^{4}}=$

$=\frac{1-2-2\ln x}{x^{3}}=\frac{-1-2\ln x}{x^{3}}$

$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{-1-2\ln x}{x^{3}}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1-2\ln x=0\wedge x^{3}\neq 0\wedge x\in D_f\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ln x=-\frac{1}{2}\wedge x\in\mathbb{R}^{+}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{e}}{e}$

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{-2-\ln e^{-\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}}=\frac{-2+\frac{1}{2}}{e^{-\frac{1}{2}}}=-\frac{3}{2}\sqrt{e}$$

x	0		$\frac{\sqrt{e}}{e}$	$+\infty$
f''	N.D.	+	0	−
f	N.D.		$-\frac{3}{2}\sqrt{e}$	

P.I.

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\left]0,\frac{\sqrt{e}}{e}\right[$ e voltada para baixo em $\left]\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty\right[$.

O ponto de coordenadas $\left(\frac{\sqrt{e}}{e},-\frac{3}{2}\sqrt{e}\right)$ é um ponto de inflexão.

• Assíntotas:

Assíntotas verticais:

$D_f=\mathbb{R}^+$ e f é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical para $x=0$.

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{-2-\ln x}{x}=\frac{+\infty}{0^+}=+\infty$$

A reta de equação $x=0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f.

Assíntotas não verticais:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2-\ln x}{x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\underset{\text{RL'H}}{\lim_{x\to+\infty}}\frac{(-2-\ln x)'}{(x^2)'}=$$

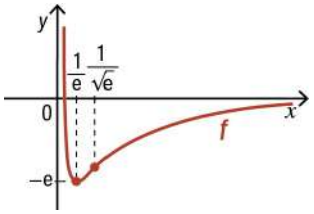
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2-\ln x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{x}\right)-\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}_{\text{L.N.}}=0-0=0$$

A reta de equação $y=0$ é assíntota ao gráfico de f.

• Gráfico:



121.4. $f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$

• Domínio: $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:\underbrace{1+e^{-x}\neq0}_{\text{condição universal}}\right\}=\mathbb{R}$

• Monotonia e extremos:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)'=\frac{(1)'\left(1+e^{-x}\right)-1\times\left(1+e^{-x}\right)'}{\left(1+e^{-x}\right)^2}=$$

$$=\frac{0-(-x)'e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}=\frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$f'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$

Logo, a função f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e não tem extremos.

• Concavidade e pontos de inflexão:

$$f''(x)=\left(\frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}\right)'=$$

$$=\frac{\left(e^{-x}\right)'\left(1+e^{-x}\right)^2-e^{-x}\left[\left(1+e^{-x}\right)^2\right]'}{\left[\left(1+e^{-x}\right)^2\right]^2}=$$

$$=\frac{(-x)'e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)^2-e^{-x}\times2\left(1+e^{-x}\right)\times\left(1+e^{-x}\right)'}{\left(1+e^{-x}\right)^4}=$$

$$=\frac{-e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)^2-2e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)\times(-x)'e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^4}=$$

$$=\frac{\left(1+e^{-x}\right)e^{-x}\left[-\left(1+e^{-x}\right)+2e^{-x}\right]}{\left(1+e^{-x}\right)^4}=$$

$$=\frac{e^x\left(-1-e^{-x}+2e^{-x}\right)}{\left(1+e^{-x}\right)^3}=\frac{e^x\left(e^{-x}-1\right)}{\left(1+e^{-x}\right)^3}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{e^x\left(e^x-1\right)}{\left(1+e^{-x}\right)^3}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x\left(e^x-1\right)=0\wedge\underbrace{\left(1+e^{-x}\right)^3\neq0}_{\text{condição universal}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\underbrace{e^x=0}_{\text{equação impossível}}\vee e^x-1=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$$

$$f(0)=\frac{1}{1+e^0}=\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	+	0	−
f		$\frac{1}{2}$	

P.I.

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty,0[$ e voltada para baixo em $]0,+\infty[$.

O ponto de coordenadas $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ é um ponto de inflexão.

• Assíntotas:

Assíntotas verticais:

$D_f=\mathbb{R}$ e f é contínua. Logo, não existem assíntotas verticais ao seu gráfico.

Assíntotas não verticais:
Quando $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\left(1+e^{-x}\right)} = \frac{1}{+\infty \times 1} = 0$$

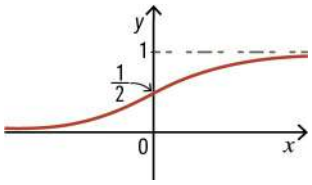
$$b = \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

A reta de equação $y = 1$ é assíntota ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.
Quando $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x\left(1+e^{-x}\right)} = \frac{1}{+\infty \times +\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.
• Gráfico:



121.5. $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x^2}$

• Domínio: $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x^2 \neq 0\right\} = \mathbb{R}^+$

• Monotonia e extremos:

$$f'(x) = \left(\frac{1+\ln x}{x^2}\right)' = \frac{(1+\ln x)' \times x^2 - (1+\ln x) \times (x^2)'}{(x^2)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - (1+\ln x) \times 2x}{x^4} = \frac{x - 2x(1+\ln x)}{x^4} =$$

$$= \frac{x(1-2-2\ln x)}{x^4} = \frac{-1-2\ln x}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-1-2\ln x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1-2\ln x = 0 \wedge x^3 \neq 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{e}}{e}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{e}}{e}\right) = \frac{1+\ln e^{-\frac{1}{2}}}{\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{1-\frac{1}{2}}{e^{-1}} = \frac{e}{2}$$

x	0		$\frac{\sqrt{e}}{e}$	$+\infty$
f'	N.D.	+	0	−
f	N.D.	↗	$\frac{e}{2}$	↘
			Máx.	

A função f é estritamente crescente em $\left]0, \frac{\sqrt{e}}{e}\right]$ e estritamente decrescente em $\left[\frac{\sqrt{e}}{e}, +\infty\right[$.

f tem um máximo absoluto igual a $\frac{e}{2}$ para $x = \frac{\sqrt{e}}{e}$.

• Concavidades e pontos de inflexão:

$$f''(x) = \left(\frac{-1-2\ln x}{x^3}\right)' =$$

$$= \frac{(-1-2\ln x)' \times x^3 - (-1-2\ln x) \times (x^3)'}{(x^3)^2} =$$

$$= \frac{-\frac{2}{x} \times x^3 - (-1-2\ln x) \times 3x^2}{x^6} = \frac{-2x^2 - 3x^2(-1-2\ln x)}{x^6} =$$

$$\frac{x^2(-2+3+6\ln x)}{x^6} = \frac{1+6\ln x}{x^4}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1+6\ln x}{x^4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+6\ln x = 0 \wedge x^4 \neq 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{6} \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{6}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[6]{e}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[6]{e}}\right) = \frac{1+\ln e^{-\frac{1}{6}}}{\left(e^{-\frac{1}{6}}\right)^2} = \frac{1-\frac{1}{6}}{e^{-\frac{1}{3}}} = \frac{5\sqrt[3]{e}}{6}$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$	$+\infty$
f''	N.D.	−	0	+
f	N.D.		$\frac{5\sqrt[3]{e}}{6}$	
			P.I.	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left]0, \frac{1}{\sqrt[6]{e}}\right[$ e voltada para cima em $\left]\frac{1}{\sqrt[6]{e}}, +\infty\right[$.

O ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{\sqrt[6]{e}}, \frac{5\sqrt[3]{e}}{6}\right)$ é um ponto de inflexão.

• Assíntotas:
Verticais:
$D_f = \mathbb{R}^+$ e f é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical em $x = 0$.

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{1+\ln x}{x} = \frac{1-\infty}{0^+} = -\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f.

Assíntotas não verticais:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}+\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}}_{\text{L.N.}}=$$

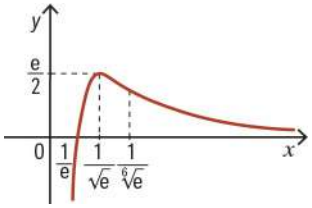
$$=0+0=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}}_{\text{L.N.}}=0+0=0$$

A reta de equação $y=0$ é assíntota ao gráfico de f.

• Gráfico:



121.6. $f(x)=\ln\left(\frac{4x}{x+2}\right)$

• Domínio: $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{4x}{x+2}>0\right\}$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$4x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{4x}{x+2}$	$+$	N.D.	$-$	0	$+$

$D_f=]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

• Monotonia e extremos:

$$f'(x)=\left[\ln\left(\frac{4x}{x+2}\right)\right]'=\frac{\left(\frac{4x}{x+2}\right)'}{\frac{4x}{x+2}}=$$

$$=\frac{(4x)'(x+2)-4x(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{4(x+2)-4x\times1}{4x(x+2)}=$$

$$=\frac{4x+8-4x}{4x(x+2)}=\frac{8}{4x(x+2)}=\frac{2}{x(x+2)}$$

$f'(x)>0,\forall x\in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

Logo, a função f é estritamente crescente em $]-\infty,-2[$ e em $]0,+\infty[$ e não tem extremos.

• Concavidades e pontos de inflexão:

$$f''(x)=\left[\frac{2}{x(x+2)}\right]'=\frac{(2)'\left[x(x+2)\right]-2\left[x(x+2)\right]'}{\left[x(x+2)\right]^2}=$$

$$=\frac{0-2\left[(x)'(x+2)+x(x+2)'\right]}{x^2(x+2)^2}=\frac{-2(x+2+x)}{x^2(x+2)^2}=$$

$$=\frac{-2(2x+2)}{x^2(x+2)^2}=\frac{-4(x+1)}{x^2(x+2)^2}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{-4(x+1)}{x^2(x+2)^2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-4(x+1)=0\wedge x^2(x+2)^2\neq0\wedge x\in D_f\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-1\wedge x\in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[\Leftrightarrow x\in\varnothing$$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
f''	$+$	N.D.	N.D.	N.D.	$-$
f		N.D.	N.D.	N.D.	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty,-2[$ e voltada para baixo em $]0,+\infty[$ e não tem pontos de inflexão.

• Assíntotas:

Assíntotas verticais:

$D_f=]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$ e f é contínua. Logo, só poderão existir assíntotas verticais em -2 e em 0.

$$\lim_{x\to-2^-}f(x)=\lim_{x\to-2^-}\left[\ln\left(\frac{4x}{x+2}\right)\right]=\ln\frac{-8}{0^-}=\ln(+\infty)=+\infty$$

A reta de equação $x=-2$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\ln\left(\frac{4x}{x+2}\right)\right]=\ln0^+=-\infty$$

A reta de equação $x=0$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

Assíntotas não verticais:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln\left(\frac{4x}{x+2}\right)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln\left(\frac{4x}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}\right)}{x}=$$

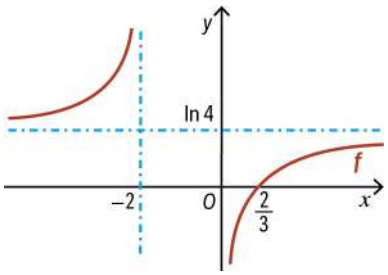
$$=\frac{\ln4}{\pm\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\ln\left(\frac{4x}{x+2}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\ln\frac{4x}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}\right]=\ln\frac{4}{1+0}=\ln4$$

A reta de equação $y=\ln4$ é assíntota ao gráfico de f quando $x\to+\infty$ e quando $x\to-\infty$.

Gráfico:



122.1. $k=10000$

a) $P(4)=\frac{10000}{2-2^{-0,5\times4}}=\frac{10000}{2-2^{-2}}\approx5714$

Ao fim de quatro semanas após a deteção da doença, existiam cerca de 5714 patos.

b) $P(t)=6000 \Leftrightarrow \frac{10000}{2-2^{-0,5t}}=6000 \Leftrightarrow$

$\underset{(t\geq 0)}{\Leftrightarrow} 10000=6000\left(2-2^{-0,5t}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2-2^{-0,5t}=\frac{10000}{6000} \Leftrightarrow -2^{-0,5t}=\frac{5}{3}-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{-0,5t}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow -0,5t=\log_2\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\frac{\log_2\left(\frac{1}{3}\right)}{-0,5} \Leftrightarrow t\approx 3,170$ semanas

$3,170\times 7\approx 22$ dias

Ao fim de cerca de 22 dias existiam 6000 patos na região.

c) Pretende-se resolver graficamente a equação:

$P(t)=0,9P(t-1) \Leftrightarrow \frac{10000}{2-2^{-0,5t}}=$

$=0,9\times\frac{10000}{2-2^{-0,5(t-1)}}$

$f(x)=\frac{10000}{2-2^{-0,5x}}$

$g(x)=0,9\times\frac{10000}{2-2^{-0,5(x-1)}}$

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x\approx 2,72$.



Ao fim de aproximadamente 2,72 semanas o número de patos era 90% do existente uma semana antes.

d) $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{10000}{2-2^{-0,5t}}=$

$=\frac{10000}{2-0}=5000$

A população tende a estabilizar em 5000 patos.

e) $P'(t)=\left(\frac{10000}{2-2^{-0,5t}}\right)'=$

$=\frac{(10000)'\left(2-2^{-0,5t}\right)-10000\left(2-2^{-0,5t}\right)'}{\left(2-2^{-0,5t}\right)^2}=$

$=\frac{0-10000\times\left(-(-0,5t)'\times 2^{-0,5t}\ln 2\right)}{\left(2-2^{-0,5t}\right)^2}=$

$=\frac{-5000\ln 2\times 2^{-0,5t}}{\left(2-2^{-0,5t}\right)^2}$

$P'(t)<0, \forall t\geq 0$

Logo, a função P é estritamente decrescente.

122.2. $P(0)=\frac{k}{2-2^{-0,5\times 0}}=\frac{k}{2-1}=k$

$P(2)=k-500 \Leftrightarrow \frac{k}{2-2^{-0,5\times 2}}=k-500 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{k}{2-\frac{1}{2}}=k-500 \Leftrightarrow \frac{k}{\frac{3}{2}}=k-500 \Leftrightarrow k=\frac{3}{2}k-750 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2k-3k=-1500 \Leftrightarrow k=1500$

Pág. 195

123. $f(x)=\frac{1}{2}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right), D_f=[1,3]$

$f'(x)=\left[\frac{1}{2}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)\right]'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x^2}\right)=\frac{x+1}{2x^2}$

$f''(x)=\left(\frac{x+1}{2x^2}\right)'=\frac{(x+1)'\left(2x^2\right)-(x+1)\left(2x^2\right)'}{\left(2x^2\right)^2}=$

$=\frac{1\times 2x^2-(x+1)\times 4x}{4x^4}=\frac{2x(x-2x-2)}{4x^4}=\frac{-x-2}{2x^3}$

$f''(x)<0, \forall x\in[1,3]$. Pelo que, f' é estritamente decrescente em $[1,3]$ e, portanto, tem máximo absoluto para $x=1$.

Seja m o declive da reta tangente de declive máximo e θ a sua inclinação.

$m=f'(1)=\frac{1+1}{2\times 1^2}=1$

$m=\tan\theta \Leftrightarrow \tan\theta=1$

Então, $\theta=45º$.

Opção (B)

124. $f(x)=e^{2x}+ax+\frac{b}{x+1}, D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Se $y=5x-2$ é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x=0$, sabemos que $f'(0)=5$ e $f(0)=5\times 0-2=-2$.

$f'(x)=\left(e^{2x}+ax+\frac{b}{x+1}\right)'=$

$=(2x)'e^{2x}+a+\frac{(b)'\times(x+1)-b(x+1)'}{(x+1)^2}=$

$=2e^{2x}+a-\frac{b}{(x+1)^2}$

$$\begin{cases} f'(0)=5 \\ f(0)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e^0+a-\dfrac{b}{(0+1)^2}=5 \\ e^0+a\times 0+\dfrac{b}{0+1}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+a-b=5 \\ 1+b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+3 \\ b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-3 \end{cases}$$

Pág. 196

125.1. • Assíntotas verticais (paralelas ao eixo Oy):

$D_f=\mathbb{R}$ e f é contínua. Logo, não existem assíntotas verticais ao seu gráfico.

• Assíntotas horizontais (paralelas ao eixo Ox):

Quando $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{e^x}{x}}=\frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}}_{\text{L.N.}}}=\frac{1}{+\infty}=0$$

A reta de equação $y=0$ é assíntota ao gráfico de f.

Quando $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=\frac{+\infty}{0^+}=+\infty$$

Não existe assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x\to-\infty$.

O gráfico de f tem uma assíntota paralela ao eixo Ox de equação $y=0$ (quando $x\to+\infty$) e não tem assíntotas paralelas ao eixo Oy.

125.2. $f'(x)=\left(\dfrac{x}{e^x}\right)'=\dfrac{(x)'e^x-x\left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2}=$

$$=\frac{e^x-xe^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{e^x(1-x)}{\left(e^x\right)^2}=\frac{1-x}{e^x}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-x}{e^x}=0\Leftrightarrow 1-x=0\wedge\underbrace{e^x\neq 0}_{\text{condição universal}}\Leftrightarrow x=1$$

$$f(1)=\frac{1}{e}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

Máx.

A função f é estritamente crescente em $]-\infty,1]$ e estritamente decrescente em $[1,+\infty[$.

f tem um máximo absoluto igual a $\dfrac{1}{e}$ para $x=1$.

125.3. $m=f'(0)=\dfrac{1-0}{e^0}=\dfrac{1}{1}=1$; $f(0)=\dfrac{0}{e^0}=0$

$y-0=1(x-0)\Leftrightarrow y=x$

125.4. $f''(x)=\left(\dfrac{1-x}{e^x}\right)'=$

$$=\frac{(1-x)'e^x-(1-x)\left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2}=\frac{-e^x-(1-x)e^x}{\left(e^x\right)^2}=$$

$$=\frac{e^x(-1-1+x)}{\left(e^x\right)^2}=\frac{x-2}{e^x}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{x-2}{e^x}=0\Leftrightarrow x-2=0\wedge\underbrace{e^x\neq 0}_{\text{condição universal}}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x=2$

$$f'(2)=\frac{1-2}{e^2}=-\frac{1}{e^2}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f'	$\searrow$	$-\frac{1}{e^2}$	$\nearrow$

Mín.

O declive da reta tangente ao gráfico de f com menor declive é $-\dfrac{1}{e^2}$.

126.1. Assíntotas verticais:

$D_f=\mathbb{R}$ e f é contínua. Logo, não existem assíntotas verticais ao gráfico de f.

Assíntotas não verticais:

Quando $x\to+\infty$: $(y=m_1x+b_1)$

$$m_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{-x}+e^x\right)}{x}=$$

$$\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\ln\left(e^{-x}+e^x\right)\right]'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\left(e^{-x}+e^x\right)'}{e^{-x}+e^x}}{1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(-x)'e^{-x}+e^x}{e^{-x}+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{-x}+e^x}{e^{-x}+e^x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(-e^{-2x}+1\right)}{e^x\left(e^{-2x}+1\right)}=\frac{-0+1}{0+1}=1$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-m_1x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{-x}+e^x\right)-x\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{-x}+e^x\right)-\ln e^x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{e^{-x}+e^x}{e^x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^{-2x}+1\right)\right)=\ln\left(e^{-\infty}+1\right)=\ln 1=0$$

A reta de equação $y=x$ é assíntota ao gráfico de f quando $x\to+\infty$.

Quando $x\to-\infty$: $(y=m_2x+b_2)$

$$m_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(e^{-x}+e^x\right)}{x}=$$

$$\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{\left[\ln\left(e^{-x}+e^x\right)\right]'}{(x)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}+e^x}{e^{-x}+e^x}=$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{e^{-x}}\left(-1+e^{2x}\right)}{\cancel{e^{-x}}\left(1+e^{2x}\right)} = \frac{-1+0}{1+0} = -1$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(e^{-x}+e^{x}\right)+x\right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(e^{-x}+e^{x}\right)+\ln e^{x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\ln\left(\left(e^{-x}+e^{x}\right)\times e^{x}\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\ln\left(1+e^{2x}\right)\right) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0$$

A reta de equação $y=-x$ é assíntota ao gráfico de f quando $x\to-\infty$.

Temos, então, duas assíntotas ao gráfico de f de declives $m_1=1$ e $m_2=-1$.

Como $m_1 = -\frac{1}{m_2}$, conclui-se que as duas assíntotas são perpendiculares.

126.2. $f'(x) = \left[\ln\left(e^{-x}+e^{x}\right)\right]' = \frac{\left(e^{-x}+e^{x}\right)'}{e^{-x}+e^{x}} =$

$$= \frac{(-x)'e^{-x}+e^{x}}{e^{-x}+e^{x}} = \frac{-e^{-x}+e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-e^{-x}+e^{x}}{e^{-x}+e^{x}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -e^{-x}+e^{x}=0 \wedge \underbrace{e^{-x}+e^{x}\neq 0}_{\text{condição universal}} \Leftrightarrow e^{x}=e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-x \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$$

$$f(0) = \ln\left(e^{0}+e^{0}\right) = \ln 2$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$
		Mín.	

A função f é estritamente decrescente em $]-\infty,0]$ e estritamente crescente em $[0,+\infty[$.

f tem um mínimo absoluto igual a $\ln 2$ para $x=0$.

126.3. Atendendo aos resultados das alíneas anteriores, podemos concluir que $D'_f = [\ln 2,+\infty[$.

Então, para que $f(x)=k$ seja uma equação impossível em $\mathbb{R}$, $k\in]-\infty,\ln 2[$.

127.1. $D_f = \left\{x\in\mathbb{R}: 2-\frac{1}{x}>0\right\}$; $2-\frac{1}{x}>0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x}>0$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{2x-1}{x}$	$+$	N.D.	$-$	0	$+$

$D_f =]-\infty,0[\cup \left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

127.2. Assíntotas verticais:

$D_f =]-\infty,0[\cup \left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ e f é contínua. Logo, só poderão existir assíntotas verticais em 0 e $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left[x\ln\left(2-\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{y\to+\infty}\left[-\frac{1}{y}\ln(2+y)\right] =$$

M.V. $\left| \begin{array}{l} y=-\frac{1}{x} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{y} \\ x\to0^-, y\to+\infty \end{array}\right.$

$$= -\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(2+y)}{y} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} -\lim_{y\to+\infty}\frac{\left[\ln(2+y)\right]'}{(y)'} =$$

$$= -\lim_{y\to+\infty}\frac{\frac{(2+y)'}{2+y}}{1} = -\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{2+y} = 0$$

Não existe assíntota em $x=0$.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\left[x\ln\left(2-\frac{1}{x}\right)\right] = \frac{1}{2}\times\ln 0^+ = -\infty$$

A reta de equação $x=\frac{1}{2}$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f.

Assíntotas não verticais:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x}\ln\left(2-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\ln\left(2-\frac{1}{x}\right)\right] = \ln 2$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x\ln\left(2-\frac{1}{x}\right)-x\ln 2\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[x\left(\ln\left(2-\frac{1}{x}\right)-\ln 2\right)\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x\ln\frac{2-\frac{1}{x}}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(x\ln\left(1-\frac{1}{2x}\right)\right) = \lim_{y\to0^\mp}\left[-\frac{1}{2y}\ln(1+y)\right] =$$

M.V. $\left| \begin{array}{l} y=-\frac{1}{2x} \Leftrightarrow 2x=-\frac{1}{y} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2y} \\ x\to\pm\infty, y\to0^\mp \end{array}\right.$

$$= -\frac{1}{2}\underbrace{\lim_{y\to0^\mp}\frac{\ln(y+1)}{y}}_{\text{L.N.}} = -\frac{1}{2}\times 1 = -\frac{1}{2}$$

A reta de equação $y=(\ln 2)x-\frac{1}{2}$ é assíntota ao gráfico de f quando $x\to+\infty$ e quando $x\to-\infty$.

O gráfico de f tem uma assíntota vertical de equação $x=\frac{1}{2}$ e uma assíntota oblíqua de equação $y=(\ln 2)x-\frac{1}{2}$ (quando $x\to\pm\infty$).

128. $f(x)=\frac{\mathrm{e}x}{x^p}, p\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$; $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$g(x)=x+\sin(2x)$; $D_g=\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

128.1. $g'(0)=\lim\limits_{h\to0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{h+\sin(2h)-(0+\sin0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\left(\frac{h+\sin(2h)}{h}\right)=$

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{h}{h}+\lim\limits_{h\to0}\frac{\sin(2h)}{h}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}1+\lim\limits_{h\to0}\frac{(\sin(2h))'}{(h)'}=$

$=1+\lim\limits_{h\to0}\frac{(2h)'\cos(2h)}{1}=1+\lim\limits_{h\to0}(2\cos(2h))=$

$=1+2\times1=3$

128.2. $f'(x)=\frac{(\mathrm{e}^x)'x^p-\mathrm{e}^x(x^p)'}{(x^p)^2}=$

$=\frac{\mathrm{e}^xx^p-\mathrm{e}^x\times p\times x^{p-1}}{x^{2p}}=\frac{\mathrm{e}^xx^{p-1}(x-p)}{x^{2p}}=\frac{\mathrm{e}^x(x-p)}{x^{p+1}}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{\mathrm{e}^x(x-p)}{x^{p+1}}=0\Leftrightarrow\mathrm{e}^x(x-p)=0\wedge x^{p+1}\neq0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\underbrace{\mathrm{e}^x=0}_{\text{equação impossível}}\vee x-p=0\right)\wedge x\neq0\Leftrightarrow x=p$

x	$-\infty$	0		p	$+\infty$
f'		N.D.	$-$	0	$+$
f		N.D.	↘	$\frac{\mathrm{e}^p}{p}$	↗
				Mín.	

Logo, a função f tem um mínimo relativo para $x=p$.

129.1. f é contínua em $x=0$, se

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$.

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$

$f(0)=0\times\mathrm{e}^0=0$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq f(0)$. Logo, f não é contínua nem derivável para $x=0$.

Se $x<0$:

$f'(x)=(x\mathrm{e}^x)'=(x)'\mathrm{e}^x+x(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x=$

$=\mathrm{e}^x(1+x)$

$f''(x)=\left[\mathrm{e}^x(1+x)\right]'=(\mathrm{e}^x)'(1+x)+\mathrm{e}^x(1+x)'=$

$=\mathrm{e}^x(1+x)+\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x(1+x+1)=\mathrm{e}^x(x+2)$

$f''(x)=0\Leftrightarrow\mathrm{e}^x(x+2)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\underbrace{\mathrm{e}^x=0}_{\text{equação impossível}}\vee x+2=0\Leftrightarrow x=-2$

Se $x>0$:

$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'x-\ln x(x)'}{x^2}=$

$=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$f''(x)=\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)'=$

$=\frac{(1-\ln x)'\times x^2-(1-\ln x)(x^2)'}{(x^2)^2}=$

$=\frac{-\frac{1}{x}\times x^2-(1-\ln x)\times2x}{x^4}=\frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=$

$=\frac{x(-1-2+2\ln x)}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}$

$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{2\ln x-3}{x^3}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow2\ln x-3=0\wedge x^3\neq0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ln x=\frac{3}{2}\wedge x>0\Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\Leftrightarrow x=\sqrt{\mathrm{e}^3}$

x	$-\infty$	-2		0		$\sqrt{\mathrm{e}^3}$	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	N.D.	$-$	0	$+$
f		$f(-2)$				$f\left(\sqrt{\mathrm{e}^3}\right)$	
		P.I.				P.I.	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-2[$ e em $]0,\sqrt{\mathrm{e}^3}[$ e voltada para cima em $]-2,0[$ e em $]\sqrt{\mathrm{e}^3},+\infty[$.

As abcissas dos pontos de inflexão são $x=-2$ e $x=\sqrt{\mathrm{e}^3}$.

129.2. Assíntotas verticais:

$D_f=\mathbb{R}$ e f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Logo, só poderá existir assíntota vertical para $x=0$.

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$

A reta de equação $x=0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f.

Assíntotas não verticais:

Quando $x\to+\infty$:

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}}_{\text{L.N.}}=0$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}_{\text{L.N.}}=0$

A reta de equação $y=0$ é assíntota ao gráfico de f quando $x\to+\infty$.

Quando $x\to-\infty$:

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\mathrm{e}^x}{x}=\mathrm{e}^{-\infty}=0$

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}(x\mathrm{e}^x)=$

M.V. $\left|\begin{array}{l} y=-x \Leftrightarrow x=-y \\ x\to-\infty, y\to+\infty \end{array}\right.$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(-ye^{-y}\right) = -\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^{y}} = -\lim_{y\to+\infty}\frac{\frac{y}{y}}{\frac{e^{y}}{y}} = \frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{y}}{y}}_{\text{L.N.}}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

A reta de equação $y=0$ é assíntota ao gráfico de f quando $x\to-\infty$.

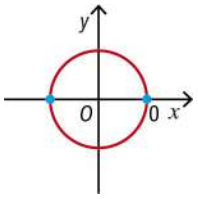
O gráfico de f tem uma assíntota vertical de equação $x=0$ e uma assíntota horizontal de equação $y=0$ (quando $x\to+\infty$ e $x\to-\infty$).

Pág. 197

130.1. $D_g=\left\{x\in\mathbb{R}:\sin(3x)\neq 0\right\}$

$$\sin(3x)=0 \Leftrightarrow 3x=k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$$

$$D_g=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\right\}$$



130.2. $\lim\limits_{x\to0} g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{2x}}{\sin(3x)}=$

$$\overset{\text{RL'H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to0}\frac{\left(1-e^{2x}\right)'}{\left(\sin(3x)\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{-(2x)'e^{2x}}{(3x)'\cos(3x)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2e^{2x}}{3\cos(3x)}=\frac{-2e^{0}}{3\cos 0}=-\frac{2}{3}$$

130.3. $g'(x)=\left(\dfrac{1-e^{2x}}{\sin(3x)}\right)'=$

$$=\frac{\left(1-e^{2x}\right)'\sin(3x)-\left(1-e^{2x}\right)\times\left(\sin(3x)\right)'}{\sin^2(3x)}=$$

$$=\frac{-(2x)'e^{2x}\sin(3x)-\left(1-e^{2x}\right)\times(3x)'\cos(3x)}{\sin^2(3x)}=$$

$$=\frac{-2e^{2x}\sin(3x)-3\left(1-e^{2x}\right)\cos(3x)}{\sin^2(3x)}$$

$$m=g'\left(\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=\frac{-2e^{2\left(\frac{\pi}{6}\right)}\sin\left(3\times\frac{\pi}{6}\right)-3\left(1-e^{2\times\frac{\pi}{6}}\right)\cos\left(3\times\frac{\pi}{6}\right)}{\sin^2\left(3\times\frac{\pi}{6}\right)}=$$

$$=\frac{-2e^{\frac{\pi}{3}}\times\sin\frac{\pi}{2}-3\left(1-e^{\frac{\pi}{3}}\right)\cos\frac{\pi}{2}}{\sin^2\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{-2e^{\frac{\pi}{3}}\times1-3\left(1-e^{\frac{\pi}{3}}\right)\times0}{1^2}=-2e^{\frac{\pi}{3}}$$

O declive da reta tangente no ponto de abcissa $x=\dfrac{\pi}{6}$ é $-2e^{\frac{\pi}{3}}$.

131.1. $\overline{OQ}=x$

$$\overline{PQ}=0-f(x)=0-\left(-e^{-2x}\right)=e^{-2x}$$

$$A_{[OPQ]}=\frac{\overline{OQ}\times\overline{PQ}}{2}=\frac{xe^{-2x}}{2}$$

Logo, $A(x)=\dfrac{xe^{-2x}}{2}$.

131.2. $A'(x)=\left(\dfrac{1}{2}xe^{-2x}\right)'=$

$$=\left(\frac{1}{2}x\right)'e^{-2x}+\frac{1}{2}x\left(e^{-2x}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{2}x\times(-2x)'e^{-2x}=$$

$$=\frac{1}{2}e^{-2x}-xe^{-2x}=e^{-2x}\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

$$A'(x)=0 \Leftrightarrow e^{-2x}\left(\frac{1}{2}-x\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-2x}=0}_{\text{equação impossível}} \vee \frac{1}{2}-x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

x	0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
A'	N.D.	+	0	−
A	N.D.	↗	Máx.	↘

A medida da área do triângulo é máxima quando a abcissa de P é igual a $\dfrac{1}{2}$.

132. $g(x)=e^{x}-e^{-x}-x-2$

$$g'(x)=\left(e^{x}-e^{-x}-x-2\right)'=e^{x}-(-x)'e^{-x}-1-0=$$

$$=e^{x}+e^{-x}-1$$

$$g''(x)=\left(e^{x}+e^{-x}-1\right)'=e^{x}+(-x)'e^{-x}-0=e^{x}-e^{-x}$$

$$g(x)+g'(x)+g''(x)=-x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x}-e^{-x}-x-2+e^{x}+e^{-x}-1+e^{x}-e^{-x}=-x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3e^{x}-e^{-x}-2=0 \Leftrightarrow 3e^{x}-\frac{1}{e^{x}}-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(e^{x}\right)^2-1-2e^{x}=0$$

Fazendo $y=e^{x}$, vem:

$3y^2-2y-1=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\times3\times(-1)}}{2\times3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{2\pm\sqrt{16}}{6} \Leftrightarrow y=\dfrac{2\pm4}{6} \Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{3}\vee y=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^x=-\dfrac{1}{3}}_{\text{equação impossível}} \vee e^x=1 \Leftrightarrow e^x=e^0 \Leftrightarrow x=0$

$S=\{0\}$

133. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$; $D_f=\mathbb{R}^+$

Seja a a abcissa do ponto de f onde a reta r é tangente.

$f'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'=\dfrac{(\ln x)'\times x-\ln x\times(x)'}{x^2}=$

$=\dfrac{\frac{1}{2}\times x-\ln x\times1}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(a)=\dfrac{1-\ln a}{a^2}$

$r: y=\left(\dfrac{1-\ln a}{a^2}\right)x$

$f(a)=\dfrac{\ln a}{a}$

$\left(a,\dfrac{\ln a}{a}\right)\in r$

Então,

$\dfrac{\ln a}{a}=\dfrac{1-\ln a}{a^2}\times a \Leftrightarrow \dfrac{\ln a}{a}=\dfrac{1-\ln a}{a} \underset{(a\in\mathbb{R}^+)}{\Leftrightarrow} \ln a=1-\ln a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\ln a=1 \Leftrightarrow \ln a=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a=e^{\frac{1}{2}}$

Logo, $m_r=f'(a)=\dfrac{1-\ln e^{\frac{1}{2}}}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2}=\dfrac{1-\frac{1}{2}}{e}=\dfrac{1}{2e}$.

$f''(x)=\left(\dfrac{1-\ln x}{x^2}\right)'=\dfrac{(1-\ln x)'\times x^2-(1-\ln x)(x^2)'}{(x^2)^2}=$

$=\dfrac{-\frac{1}{x}\times x^2-(1-\ln x)\times2x}{x^4}=\dfrac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=$

$=\dfrac{x(-1-2+2\ln x)}{x^4}=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2\ln x-3}{x^3}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\ln x-3=0\wedge x\in\mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \ln x=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x=\sqrt{e^3}$

$f'\left(\sqrt{e^3}\right)=\dfrac{1-\ln e^{\frac{3}{2}}}{\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2}=\dfrac{1-\frac{3}{2}}{e^3}=-\dfrac{1}{2e^3}$.

x	0		$\sqrt{e^3}$	$+\infty$
f''	N.D.	$-$	0	$+$
f'	N.D.	$\searrow$	$\dfrac{3}{2\sqrt{e^3}}$	$\nearrow$
			Mín.	

Então, $m_s=-\dfrac{1}{2e^3}$.

Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$ dois vetores diretores das retas r e s, respetivamente.

$\vec{r}=(2e,1)$ e $\vec{s}=(2e^3,-1)$

$\cos\left(\hat{r,s}\right)=\dfrac{\left|\vec{r}.\vec{s}\right|}{\|\vec{r}\|\times\|\vec{s}\|}=\dfrac{\left|(2e,1).(2e^3,-1)\right|}{\sqrt{(2e)^2+1^2}\times\sqrt{(2e^3)^2+(-1)^2}}=$

$=\dfrac{\left|4e^4-1\right|}{\sqrt{4e^2+1}\times\sqrt{4e^6+1}}\approx0,9787$

$\hat{r,s}\approx\cos^{-1}(0,9787)\approx12^\circ$

Pág. 198

134. Para que se possa aplicar o teorema de Bolzano-Cauchy à equação $f(x)=0$ no intervalo $]-1,1[$, a função f tem de ser contínua em $[-1,1]$, logo tem de ser contínua em $x=0$.

Assim, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+k)=0+k=k$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[k(k-3)+\sqrt{x}\right]=$

$=k(k-3)+\sqrt{0}=k^2-3k=f(0)$

$k^2-3k=k \Leftrightarrow k^2-4k=0 \Leftrightarrow k(k-4)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=0 \vee k=4$

Se $k=0$:

$f(-1)=-1+0=-1<0$

$f(1)=0(0-3)+\sqrt{1}=1>0$

$f(-1)<0<f(1)$ e é possível aplicar o teorema de Bolzano-Cauchy à equação $f(x)=0$ no intervalo $]-1,1[$.

Se $k=4$:

$f(-1)=-1+4=3>0$

$f(1)=4(4-3)+\sqrt{4}=4+2=6>0$

$f(-1)>0$ e $f(1)>0$ pelo que não é possível aplicar o teorema de Bolzano-Cauchy.

$k=0$

135. $f(-1)=2$

$f(3)=-e^0=-1$

Opção (A)

$g(x)=\ln(x+2)+f(x)$

$g(-1)=\ln(-1+2)+f(-1)=\ln 1+2=0+2=2>0$

$g(3)=\ln(3+2)+f(3)=\ln 5-1\approx 0,61>0$

Como $g(-1)\times g(3)>0$, o teorema de Bolzano-Cauchy não garante a existência de, pelo menos, um zero de g no intervalo $]-1,3[$.

Opção (B)

$g(x)=\sin(x)+f(x)$

$g(-1)=\sin(-1)+f(-1)=\sin(-1)+2\approx 1,16>0$

$g(3)=\sin(3)+f(-3)=\sin(3)-1\approx -0,86<0$

$g(-1)\times g(3)<0$

Como a função g é contínua em $[-1,3]$, por ser definida pela soma de duas funções contínuas nesse intervalo, e $g(-1)\times g(3)<0$, então o teorema de Bolzano-Cauchy garante a existência de, pelo menos, um zero de g no intervalo $]-1,3[$.

Opção (C)

$g(x)=e^x+f(x)$

$g(-1)=e^{-1}+f(-1)=\dfrac{1}{e}+2>0$

$g(3)=e^3+f(3)=e^3-1\approx 19,09>0$

Como $g(-1)\times g(3)>0$, o teorema de Bolzano-Cauchy não garante a existência de, pelo menos, um zero de g no intervalo $]-1,3[$.

Opção (D)

$g(x)=\cos(x)+f^2(x)$

$g(-1)=\cos(-1)+f^2(-1)=\cos(-1)+2^2=$

$=\cos(-1)+4\approx 4,54>0$

$g(3)=\cos(3)+f^2(3)=\cos(3)+(-1)^2=$

$=\cos(3)+1\approx 0,01>0$

Como $g(-1)\times g(3)>0$, o teorema de Bolzano-Cauchy não garante a existência de, pelo menos, um zero de g no intervalo $]-1,3[$.

Opção (B)

136. $f(x)=\sin(x)-\dfrac{\sin(2)}{2}x$

$A(2,f(2))$

$P(a,f(a))$

$Q(a+1,f(a+1))$

$a\in]0,1[$

$f(a)=\sin(a)-\dfrac{\sin(2)}{2}a$

$f(a+1)=\sin(a+1)-\dfrac{\sin(2)}{2}(a+1)=$

$=\sin(a+1)-\dfrac{\sin(2)}{2}a-\dfrac{\sin(2)}{2}$

$A_{T_1}(a)=\dfrac{\overline{OA}\times y_P}{2}=\dfrac{\overline{OA}\times f(a)}{2}=\dfrac{2\times f(a)}{2}=f(a)$

$A_{T_2}(a)=\dfrac{\overline{OA}\times y_Q}{2}=\dfrac{\overline{OA}\times f(a+1)}{2}=$

$=\dfrac{2\times f(a+1)}{2}=f(a+1)$

$A_{T_1}(a)=A_{T_2}(a) \Leftrightarrow f(a)=f(a+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(a)-\dfrac{\sin(2)}{2}a=\sin(a+1)-$

$-\dfrac{\sin(2)}{2}a-\dfrac{\sin(2)}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(a)=\sin(a+1)-\dfrac{\sin(2)}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sin(a)-\sin(a+1)+\frac{\sin(2)}{2}}_{g(a)}=0$$

Queremos mostrar que existe, pelo menos, um $c\in\left]0,1\right[$ tal que: $A_{T_1}(c)=A_{T_2}(c)$, ou seja, pretendemos mostrar que existe, pelo menos, um $c\in\left]0,1\right[$ tal que $g(c)=0$.

• A função g é contínua em $[0,1]$ porque resulta de operações entre funções contínuas nesse intervalo.

• $g(0)=\sin(0)-\sin(0+1)+\frac{\sin(2)}{2}\approx -0,39$

• $g(1)=\sin(1)-\sin(1+1)+\frac{\sin(2)}{2}\approx 0,39$

• Como g é contínua em $[0,1]$ e $g(0)<0<g(1)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $g(c)=0$, ou seja, $A_{T_1}(c)=A_{T_2}(c)$ tem, pelo menos, uma solução em $\left]0,1\right[$, pelo que existe um valor nesse intervalo para o qual as áreas dos dois triângulos são iguais.

Pág. 199

137.1. $f(x)=0\Leftrightarrow x^3+4x-1=0$, em $[0,1]$

f é contínua em $[0,1]$ por ser uma função polinomial.

$f(0)=0^3+4\times 0-1=-1<0$

$f(1)=1^3+4\times 1-1=4>0$

Como f é contínua em $[0,1]$ e $f(0)<0<f(1)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $f(x)=0$ tem, pelo menos, uma raiz em $\left]0,1\right[$ logo, tem, pelo menos, uma raiz em $[0,1]$.

137.2. • $f(0,2500)=0,2500^3+4\times 0,2500-1\approx -0,0156$

a) $0,0156$

$\frac{0+0,2500}{2}=0,1250$

b) $0,1250$

Como $f(m_3)<0$, isto é, $f(0,1250)<0$ e $f(m_2)>0$, isto é, $f(0,2500)>0$,

$I_3=[0,1250;0,2500]$

Logo, **c)** $0,1250$.

$f(0,1875)=0,1875^3+4\times 0,1875-1\approx -0,2434<0$

Como $f(m_4)<0$, isto é, $f(0,1875)<0$ e $f(m_2)>0$, isto é, $f(0,2500)>0$,

$I_4=[0,1875;0,2500]$

Logo, **e)** $0,2500$.

$\frac{0,1875+0,2500}{2}\approx 0,2188$

f) $0,2188$

137.3. $x_0=0,25$

$f(x)=x^3+4x-1$

$f'(x)=3x^2+4$

$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=0,2500-\frac{0,0156}{4,1875}\approx 0,2463$

a) $0,2463$

b) $0,2463$

$f(0,2463)=0,2463^3+4\times 0,2463-1\approx 0,0001$

c) $0,0001$

$f'(0,2463)=3\times 0,2463^2+4\approx 4,1820$

d) $4,1820$

e) $0,0001$

f) $4,1820$

$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=0,2463-\frac{0,0001}{4,1820}\approx 0,2463$

g) $0,2463$

137.4. Método da bisseção: $x\approx 0,2188$

Método de Raphson: $x\approx 0,2463$

O método de Newton-Raphson converge muito mais depressa (ao fim de uma iteração já estabiliza às quatro casas decimais), enquanto que a bisseção reduz o intervalo a um ritmo mais lento (metade do intervalo em cada iteração).

138. $x_4=0,75$

$f(x_4)=-1$

$t_4: y=mx-3$

O ponto de coordenadas $(0,75;-1)$ pertence à reta t_4.

$-1=0,75m-3\Leftrightarrow 0,75m=2\Leftrightarrow 75m=200\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m=\frac{200}{75}\Leftrightarrow m=\frac{8}{3}$

$y=\frac{8}{3}x-3$

$f'(x_4)=-3$

$x_5=x_4-\frac{f(x_4)}{f'(x_4)}=0,75-\frac{-1}{\frac{8}{3}}=0,75+\frac{3}{8}=$

$=\frac{75}{100}+\frac{3}{8}=\frac{9}{8}$

139. $|x_3-x_2|=0,0004=4\times 10^{-4}<10^{-3}$

Sim, é aceitável.

Pág. 200

140. f contínua em $[a,b]$; $f(a)=-2$; $f(b)=4$

$g(x)=f(x+c)$

Pretendemos mostrar que a equação $g(x)=0$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]a-c,b-c[$.

• Como f é uma função contínua em $[a,b]$, $f(x+c)$ é uma função contínua em $[a-c,b-c]$ logo, g é uma função contínua em $[a-c,b-c]$.

• $g(a-c)=f(a-c+c)=f(a)=-2$

• $g(b-c)=f(b-c+c)=f(b)=4$

• Como g é contínua em $[a-c,b-c]$ e $g(a-c)<0<g(b-c)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $g(x)=0$ tem, pelo menos, uma solução em $]a-c,b-c[$, isto é, a função g tem, pelo menos, um zero em $]a-c,b-c[$.

141. h contínua em $\mathbb{R}$; $h(a)=3$; $h(b)=-1$

$g(x)=h(x)+\frac{k}{2}$

• Como g é contínua em $\mathbb{R}$, porque resulta de operações entre funções contínuas em $\mathbb{R}$, também é contínua no intervalo $[a,b]\subset\mathbb{R}$.

• Para que o teorema de Bolzano-Cauchy garanta que a função g tenha pelo menos um zero no intervalo $]a,b[$ é necessário que $g(a)$ e $g(b)$ tenham sinais contrários.

$g(a)=h(a)+\frac{k}{2}=3+\frac{k}{2}$

$g(b)=h(b)+\frac{k}{2}=-1+\frac{k}{2}$

$(g(a)>0\wedge g(b)<0)\vee(g(a)<0\wedge g(b)>0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(3+\frac{k}{2}>0\wedge -1+\frac{k}{2}<0\right)\vee$

$\vee\left(3+\frac{k}{2}<0\wedge -1+\frac{k}{2}>0\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(6+k>0\wedge -2+k<0)\vee(6+k<0\wedge -2+k>0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(k>-6\wedge k<2)\vee\underbrace{(k<-6\wedge k>2)}_{\text{condição impossível}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6<k<2$

$k\in]-6,2[$

Pág. 201

142. $f(x)=\frac{x^3-2x+1}{x+1}$

O declive da reta perpendicular à reta $y=2x-3$ é $-\frac{1}{2}$.

Recordar:
Declives de retas perpendiculares sejam m e m' os declives de duas retas perpendiculares $m=-\frac{1}{m'}$.

Pretendemos provar que existe um ponto cuja abcissa pertence ao intervalo $]0,1[$ tal que $f'(x)=-\frac{1}{2}$

$f'(x)=\frac{(x^3-2x+1)'(x+1)-(x^3-2x+1)(x+1)'}{(x+1)^2}=$

$=\frac{(3x^2-2)(x+1)-(x^3-2x+1)\times 1}{(x+1)^2}=$

$=\frac{3x^3+3x^2-2x-2-x^3+2x-1}{(x+1)^2}=\frac{2x^3+3x^2-3}{(x+1)^2}$

$f'(x)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{2x^3+3x^2-3}{(x+1)^2}=-\frac{1}{2}$

• f' é contínua em $[0,1]$ por ser o quociente de duas funções contínuas nesse intervalo.

• $f'(0)=\frac{2\times 0^3+3\times 0^2-3}{(0+1)^2}=-3<0$

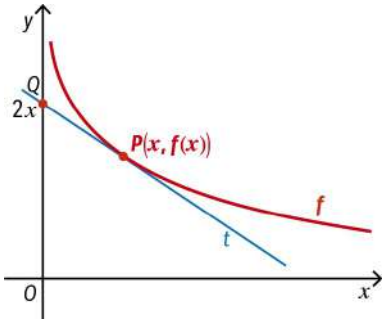
• $f'(1)=\frac{2\times 1^3+3\times 1^2-3}{(1+1)^2}=\frac{1}{2}>0$

• Como f' é contínua em $[0,1]$ e $f'(0)<-\frac{1}{2}<f'(1)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $f'(x)=-\frac{1}{2}$ tem, pelo menos, uma solução em $]0,1[$, isto é, existe pelo menos um ponto cuja abcissa pertence ao intervalo $]0,1[$ tal que a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto é perpendicular à reta de equação $y=2x-3$.

143. $f(x)=2-\ln\left(\frac{x}{2}\right)$; $D_f=\mathbb{R}^+$

$P(x,f(x))$; $Q(0,2x)$

$m_t=\frac{f(x)-2x}{x-0}=\frac{f(x)-2x}{x}=\frac{f(x)}{x}-2$



Pretendemos resolver a equação $f'(x)=\frac{f(x)}{x}-2$ no intervalo $[1,5]$.

$$f'(x)=\left[2-\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]'=2'-\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]'=0-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{\frac{x}{2}}=$$

$$=-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}}=-\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x}-2\Leftrightarrow-\frac{1}{x}=\frac{f(x)}{x}-2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\underbrace{\frac{f(x)}{x}+\frac{1}{x}-2}_{g(x)}=0$$

Pretendemos resolver a equação $g(x)=0$ no intervalo $[1,5]$. Erro máximo absoluto inferior a $10^{-1}=0,1$.

$$\frac{5-1}{2^{n+1}}<10^{-1}\Leftrightarrow\frac{4}{2^{n+1}}<0,1\Leftrightarrow2^{n+1}>\frac{4}{0,1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow2^n\times2>\frac{4}{0,1}\Leftrightarrow2^n>\frac{4}{0,2}\Leftrightarrow2^n>20$$

$2^1=2,\ldots,2^4=16$, $2^5=32$

Logo, são necessárias, pelo menos, 5 iterações.

$$g(1)=\frac{f(1)}{1}+\frac{1}{1}-2=\frac{2-\ln 2\left(\frac{1}{2}\right)}{1}+1-2=$$

$$=\cancel{2}-\ln\left(\frac{1}{2}\right)+1-\cancel{2}=-\ln\left(\frac{1}{2}\right)+1\approx1,69>0$$

$$g(5)=\frac{f(5)}{5}+\frac{1}{5}-2=\frac{2-\ln\left(\frac{5}{2}\right)}{5}+\frac{1}{5}-2\approx-1,58<0$$

It.	Intervalo	m	Erro inferior a	$g(m)$
1	$I_0=[1,5]$	$\frac{1+5}{2}=3$	$\frac{5-1}{2}=2>10^{-1}$	$g(3)\approx$ $\approx-1,135<0$
2	$I_1=[1,3]$	$\frac{1+3}{2}=2$	$\frac{3-1}{2}=1>10^{-1}$	$g(2)=$ $=-0,5<0$
3	$I_2=[1,2]$	$\frac{1+2}{2}=1,5$	$\frac{2-1}{2}=0,5>10^{-1}$	$g(1,5)\approx$ $\approx0,192>0$
4	$I_3=[1,5;2]$	$\frac{1,5+2}{2}=1,75$	$\frac{2-1,5}{2}=$ $=0,25>10^{-1}$	$g(1,75)\approx$ $\approx-0,209<0$
5	$I_4=$ $=[1,5;1,75]$	$\frac{1,5+1,75}{2}=$ $=1,625$	$\frac{1,75-1,5}{2}=$ $=0,125>10^{-1}$	$g(1,625)\approx$ $\approx-0,026<0$
6	$I_5=$ $=[1,5;1,625]$	$\frac{1,5+1,625}{2}=$ $=1,5625$	$\frac{1,625-1,5}{2}=$ $=0,0625$	

A solução aproximada, com erro inferior a 10^{-1}, é $1,6$.

144.1. Pretendemos mostrar que a equação $f(x)=0$ tem uma solução no intervalo $[2,3]$.

- f é contínua em $[2,3]$ por ser uma função polinomial.
- $f(2)=2^3-25=-17<0$
- $f(3)=3^3-25=2>0$
- Como f é contínua em $[2,3]$ e $f(2)<0<f(3)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $f(x)=0$ tem, pelo menos, uma solução em $]2,3[$, isto é, f tem pelo menos um zero no intervalo $]2,3[$ logo, tem pelo menos um zero em $[2,3]$.

144.2. $\frac{3-2}{2^{n+1}}<10^{-2}\Leftrightarrow\frac{1}{2^n\times2}<10^{-2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow1<2^n\times2\times10^{-2}\Leftrightarrow2^n>\frac{1}{2\times10^{-2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow2^n>\frac{100}{2}\Leftrightarrow2^n>50$$

$2^1=2,\ldots,2^5=32,2^6=64$

Logo, são necessárias, pelo menos, 6 iterações.

$f(2)<0$; $f(3)>0$

It.	Intervalo	m	Erro inferior a	$f(m)$
1	$I_0=[2,3]$	2,5	$\frac{3-2}{2}=$ $=0,5$ $>10^{-2}$	$f(2,5)\approx$ $\approx-9,38$ <0
2	$I_1=[2,5;3]$	2,75	$\frac{3-2,5}{2}=$ $=0,25$ $>10^{-2}$	$f(2,75)\approx$ $\approx-4,20$ <0
3	$I_2=$ $=[2,75;3]$	2,875	$\frac{3-2,75}{2}=$ $=0,125$ $>10^{-2}$	$f(2,875)\approx$ $\approx-1,24$ <0
4	$I_3=$ $=[2,875;3]$	2,9375	$\frac{3-2,875}{2}=$ $=0,0625$ $>10^{-2}$	$f(2,9375)\approx$ $\approx0,35$ <0
5	$I_4=$ $=[2,875;2,9375]$	$\approx2,9063$	$\frac{2,9375-2,875}{2}\approx$ $\approx0,0313>10^{-2}$	$f(2,9063)\approx$ $\approx-0,45$ <0
6	$I_5=$ $=[2,9063;2,9375]$	2,9219	$\frac{2,9375-2,9063}{2}=$ $=0,0156>10^{-2}$	$f(2,9219)\approx$ $\approx-0,05$ <0
7	$I_6=$ $=[2,9219;2,9375]$	2,9297	$\frac{2,9375-2,9219}{2}=$ $=0,0078>10^{-2}$	

A solução aproximada, com erro inferior a 10^{-2} é $2,93$.

145. $B(x)=e^{-0,15x}\sin(0,8x)+$

$$+0,02\left(1-e^{-0,40x}\right),x\geq0$$

$$B'(x)=\left(e^{-0,15x}\right)'\sin(0,8x)+e^{-0,15x}\left(\sin(0,8x)\right)'+$$

$$+0,02'\left(1-e^{-0,40x}\right)+0,02\left(1-e^{-0,40x}\right)'=$$

$$=e^{-0,15x}\left[-0,15\sin(0,8x)+0,8\cos(0,8x)\right]+0,008e^{-0,40x}$$

$$B''(x)=\left(e^{-0,15x}\right)'\left[-0,15\sin(0,8x)+0,8\cos(0,8x)\right]+$$
$$+e^{-0,15x}\left[-0,15\sin(0,8x)+0,8\cos(0,8x)\right]'+$$
$$+0,008'e^{-0,40x}+0,008\times\left(e^{-0,40x}\right)'=$$
$$=e^{-0,15x}\left[-0,6175\sin(0,8x)-0,24\cos(0,8x)\right]-$$
$$-0,0032e^{-0,40x}$$

Pretendemos um valor aproximado da solução da equação $B'(x)=0$.

$x_0=2$

$$x_1=x_0-\frac{B'(x_0)}{B''(x_0)}=2-\frac{B'(2)}{B''(2)}=2-\frac{-0,12479}{-0,45351}\approx 1,72484$$

$$|x_2-x_1|=|2-1,72484|=0,27516>10^{-4}$$

$$x_2=x_1-\frac{B'(x_1)}{B''(x_1)}=1,72484-\frac{B'(1,72484)}{B''(1,72484)}=$$
$$=1,72484-\frac{0,00752}{-0,50484}\approx 1,73974$$

$$|x_2-x_1|=|1,73974-1,72484|=0,0149$$

$$x_3=x_2-\frac{B'(x_2)}{B''(x_2)}=1,73974-\frac{B'(1,73974)}{B''(1,73974)}=$$
$$=1,73974-\frac{0,00001}{-0,50258}=1,7398$$

$$|x_3-x_2|=0<10^{-4}$$

$x\approx 1,7398$

Pág. 202

Avaliação global 1

1. $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x-1}$; $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{\left(e^x-1\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{e^x}=\frac{1}{1}=1$$

Opção (C)

2. $f(x)=\dfrac{\sin x-x}{x^3}$; $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=$$
$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)'}{\left(3x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(-\sin x)'}{(6x)'}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6}=-\frac{1}{6}$$

Opção (B)

3. $f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{x+1}$; $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x+1}{x^2+x}=$$
$$\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(2x^2-x+1\right)'}{\left(x^2+x\right)'}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x-1}{2x+1}=$$
$$\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(4x-1)'}{(2x+1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{2}=2$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-2x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2-x+1}{x+1}-2x\right)=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{2x^2}-x+1-\cancel{2x^2}-2x}{x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x+1}{x+1}=$$
$$\underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(-3x+1)'}{(x+1)'}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{1}=-3$$

$y=2x-3$

Opção (C)

4. $f(x)=xe^{-x}$

$$f'(x)=x'e^{-x}+x\left(e^{-x}\right)'=e^{-x}+x(-x)'e^{-x}=$$
$$=e^{-x}+x(-1)e^{-x}=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$$
$$f''(x)=\left(e^{-x}\right)'(1-x)+e^{-x}(1-x)'=$$
$$=(-x)'e^{-x}(1-x)+e^{-x}(-1)=-e^{-x}(1-x)-e^{-x}=$$
$$=-e^{-x}(1-x+1)=-e^{-x}(-x+2)=e^{-x}(x-2)$$

Opção (D)

5. $f'(x)+f(x)=2$

Opção (A):

$f(x)=3e^{-x}$; $f'(x)=3(-x)'e^{-x}=-3e^{-x}$

$f'(x)+f(x)=-3e^{-x}+3e^{-x}=0$

Opção (B):

$f(x)=2e^{-x}+1$; $f'(x)=2(-x)'e^{-x}+0=-2e^{-x}$

$f'(x)+f(x)=-2e^{-x}+2e^{-x}+1=1$

Opção (C):

$f(x)=1-e^{-x}$; $f'(x)=0-(-x)'e^{-x}=e^{-x}$

$f'(x)+f(x)=e^{-x}+1-e^{-x}=1$

Opção (D):

$f(x)=2+e^{-x}$; $f'(x)=0+(-x)'e^{-x}=-e^{-x}$

$f'(x)+f(x)=-e^{-x}+2+e^{-x}=2$

Opção (D)

6. $A^{x-y}=2$; $A^{3y}=8$; $A\in\mathbb{R}^+, x,y\in\mathbb{R}$

$$A^{x-y}=2\Leftrightarrow A^x\times A^{-y}=2\Leftrightarrow A^x=\frac{2}{A^{-y}}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A^x=2A^y\quad(1)$$
$$A^{3y}=8\Leftrightarrow\left(A^y\right)^3=2^3\Leftrightarrow A^y=2\quad(2)$$

De (1) e (2) vem $A^x = 2A^y \Leftrightarrow A^x = 2\times 2 = 4$

Opção (A)

7. $a^2 = b^3 \Leftrightarrow 2 = \log_a b^3 \Leftrightarrow 2 = 3\log_a b \Leftrightarrow \log_a b = \frac{2}{3}$

Por outro lado,

$a^2 = b^3 \Leftrightarrow 3 = \log_b a^2 \Leftrightarrow 3 = 2\log_b a \Leftrightarrow \log_b a = \frac{3}{2}$

Logo, $\log_a b - \log_b a = \frac{2}{3} - \frac{3}{2} = \frac{4}{6} - \frac{9}{6} = -\frac{5}{6}$.

Opção (A)

Pág. 203

8. Como a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias, o modelo é de crescimento exponencial:

$f(t) = f(0)\,e^{kt}$

$f(0) = 10^4$

$f(3) = 8\times 10^4$

$f(3) = f(0)\,e^{3k} \Leftrightarrow e^{3k} = \frac{f(3)}{f(0)} \Leftrightarrow e^{3k} = \frac{8\times 10^4}{10^4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{3k} = 8 \Leftrightarrow \left(e^k\right)^3 = 8 \Leftrightarrow \left(e^k\right)^3 = 2^3 \Leftrightarrow e^k = 2$

$f(t) = 10^4 \times 2^t \Leftrightarrow f(t) = 10\,000 \times 2^t$

30 minutos = 0,5 horas

$f(0{,}5) = 10000 \times 2^{0{,}5} \approx 14142$ bactérias

Opção (C)

9. $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$ e $g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$

$f(\log_2 3) = \frac{2^{\log_2 3} + 2^{-\log_2 3}}{2} = \frac{3 + 2^{\log_2 3^{-1}}}{2} = \frac{3 + 3^{-1}}{2} =$

$= \frac{3 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

$g(2) = \frac{2^2 - 2^{-2}}{2} = \frac{4 - \frac{1}{4}}{2} = \frac{15}{8}$

$f(\log_2 3) - g(2) = \frac{5}{3} - \frac{15}{8} = \frac{40}{24} - \frac{45}{24} = -\frac{5}{24}$

Opção (A)

10. $2^{2x} - 8\times 2^x + 12 = 0 \Leftrightarrow$

M.V. $\left| \; 2^x = y \right.$

$\Leftrightarrow y^2 - 8y + 12 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4\times 1\times 12}}{2\times 1} \Leftrightarrow y = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{8 \pm 4}{2} \Leftrightarrow y = 6 \vee y = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x = 6 \vee 2^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_2 6 \vee x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 + \frac{\log 3}{\log 2} \vee x = 1$

C.A. $\left| \; \log_2 6 = \frac{\log 6}{\log 2} = \frac{\log(2\times 3)}{\log 2} = \right.$

$\left. = \frac{\log 2 + \log 3}{\log 2} = 1 + \frac{\log 3}{\log 2} \right.$

Opção (B)

11. $f(x) = \frac{(x+2)^2}{e^{x+2}}$

- $f'(x) = \frac{\left[(x+2)^2\right]' e^{x+2} - (x+2)^2 \left(e^{x+2}\right)'}{\left(e^{x+2}\right)^2} =$

$= \frac{2(x+2)(x+2)' e^{x+2} - (x+2)^2 (x+2)' e^{x+2}}{\left(e^{x+2}\right)^2} =$

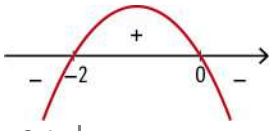
$= \frac{2(x+2)e^{x+2} - (x+2)^2 e^{x+2}}{\left(e^{x+2}\right)^2} =$

$= \frac{\cancel{e^{x+2}}\left[2(x+2) - (x+2)^2\right]}{\left(e^{x+2}\right)^{\cancel{2}}} =$

$= \frac{2x + \cancel{4} - x^2 - 4x - \cancel{4}}{e^{x+2}} = \frac{-x^2 - 2x}{e^{x+2}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2x = 0 \wedge \underbrace{e^{x+2} \neq 0}_{\text{condição universal}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$



C.A. $\left| \; f(-2) = \frac{(-2+2)^2}{e^{-2+2}} = \frac{0}{1} = 0 \right.$

$\left. f(0) = \frac{(0+2)^2}{e^{0+2}} = \frac{4}{e^2} = 4e^{-2} \right.$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$
		Mín.		Máx.	

Máximo relativo $4e^{-2}$ para $x = 0$.

I → b) ; II → a)

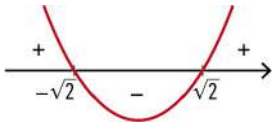
$f''(x) = \frac{\left(-x^2 - 2x\right)' e^{x+2} - \left(-x^2 - 2x\right)\left(e^{x+2}\right)'}{\left(e^{x+2}\right)^2} =$

$= \frac{(-2x - 2)e^{x+2} - \left(-x^2 - 2x\right)e^{x+2}}{\left(e^{x+2}\right)^2} =$

$= \frac{\cancel{e^{x+2}}\left(\cancel{-2x} - 2 + x^2 + \cancel{2x}\right)}{\left(e^{x+2}\right)^{\cancel{2}}} = \frac{x^2 - 2}{e^{x+2}}$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2}{e^{x+2}} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \wedge \underbrace{e^{x+2} \neq 0}_{\text{condição universal}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$



Como em $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ há mudança de sinal de f'', os pontos de inflexão têm abcissas $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.

III → b)

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x+2)^2}{e^{x+2}} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left[(x+2)^2\right]'}{\left(e^{x+2}\right)'} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2(x+2)(x+2)'}{(x+2)'e^{x+2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2(x+2)}{e^{x+2}} =$

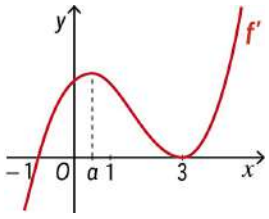
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+4}{e^{x+2}} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x+4)'}{\left(e^{x+2}\right)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^{x+2}} = \dfrac{2}{+\infty} = 0$

IV → c)

Pág. 204

Avaliação global 2

1.



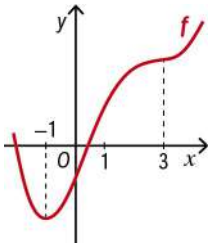
$0 < a < 1$

Da análise do gráfico de f' podemos concluir que:

- f é decrescente em $]-\infty,-1]$ e é crescente em $[-1,+\infty[$.
- $f'(-1)=0$; f tem um mínimo absoluto para $x=-1$;
- $f'(3)=0$, mas como não há mudança de sinal em $x=3$, f não tem extremo em $x=3$.
- $f''(a)=0$ e $f''(3)=0$

f tem dois pontos de inflexão de abcissas a e 3.

Exemplo de um possível gráfico:



2. $f(x)=\dfrac{e^x}{3-x}$

$f'(x)=\dfrac{\left(e^x\right)'(3-x)-e^x(3-x)'}{(3-x)^2}=$

$=\dfrac{e^x(3-x)-e^x(-1)}{(3-x)^2}=\dfrac{e^x(3-x+1)}{(3-x)^2}=\dfrac{e^x(4-x)}{(3-x)^2}$

$f'(0)=\dfrac{e^0(4-0)}{(3-0)^2}=\dfrac{4}{9}$

$f(0)=\dfrac{e^0}{3-0}=\dfrac{1}{3}$ ordenada na origem

O ponto de coordenadas $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ pertence ao gráfico de f e à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0.

$y=mx+b$

$m=f'(0)=\dfrac{4}{9}$; $\left(\underbrace{0,\dfrac{1}{3}}_{b}\right)$

$y=\dfrac{4}{9}x+\dfrac{1}{3}$

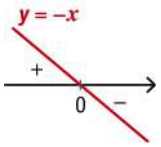
3.1. $g'(x)=\left(e^x-xe^x-1\right)'=$

$=\left(e^x\right)'-\left(xe^x\right)'-1'=e^x-\left[x'e^x+x\left(e^x\right)'\right]-0=$

$=\cancel{e^x}-\cancel{e^x}-xe^x=-xe^x$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow -xe^x=0 \Leftrightarrow -x=0 \vee \underbrace{e^x=0}_{\substack{\text{equação}\\ \text{impossível}}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0$



$g(0)=e^0-0\times e^0-1=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	+	0	−
g	↗	0	↘
		Máx.	

g é estritamente crescente em $]-\infty,0]$ e estritamente decrescente em $[0,+\infty[$.

Como $g(0)=0$, $g(x)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

3.2. $f'(x)=\dfrac{x'\left(e^x-1\right)-x\left(e^x-1\right)'}{\left(e^x-1\right)^2}=$

$=\dfrac{e^x-1-xe^x}{\left(e^x-1\right)^2}=\dfrac{e^x-xe^x-1}{\left(e^x-1\right)^2}=\dfrac{g(x)}{\left(e^x-1\right)^2}$

Como $\left(e^x-1\right)^2>0, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, como vimos na alínea anterior, $g(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

O sinal de $f'(x)$ é o sinal de $g(x)$.

Como $g(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, f é estritamente decrescente em $]-\infty,0[$ e em $]0,+\infty[$ e não tem extremos.

3.3. Assíntotas verticais:

f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ por ser definida pelo quociente de funções contínuas.

Se existir assíntota vertical será em $x=0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{x'}{\left(e^x-1\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}=1$$

O gráfico de f não tem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

Quando $x\to+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{e^x-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(e^x-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{e^{+\infty}-1}=\frac{1}{+\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{x'}{\left(e^x-1\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{e^{+\infty}}=$$

$$=\frac{1}{+\infty}=0$$

$y=0$ é assíntota horizontal para $x\to+\infty$.

Quando $x\to-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{e^{-\infty}-1}=\frac{1}{0-1}=-1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^x-1}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}+xe^x-\cancel{x}}{e^x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{e^x-1}=$$

$$\overset{-\infty\times 0}{=}\lim_{x\to-\infty}\left(xe^x\times\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)\times\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x-1}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)\times\frac{1}{e^{-\infty}-1}=$$

M.V. $\left|\begin{array}{l}-x=y\Leftrightarrow x=-y\\ x\to-\infty,\ y\to+\infty\end{array}\right.$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(-ye^{-y}\right)\times\frac{1}{0-1}=-\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y}\times(-1)=$$

$$=-\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^y}{y}}\times(-1)=-\frac{1}{\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^y}{y}}_{\text{L.N.}}}\times(-1)=$$

$$=-\frac{1}{+\infty}\times(-1)=0\times(-1)=0$$

$y=-x$ é assíntota oblíqua para $x\to-\infty$.

3.4. • f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

• $y=0$ é assíntota horizontal para $x\to+\infty$.

• $$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}=$$

$$=\frac{1}{\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{L.N.}}}=\frac{1}{1}=1$$

$$D'_f=\mathbb{R}^+\setminus\{1\}=]0,1[\cup]1,+\infty[$$

4.1. $f(x)=\dfrac{\ln\left(x^2\right)+2x^2}{x}$; $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Assíntotas verticais:

f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ por ser definida pelo quociente de funções contínuas.

Se existir assíntota vertical será em $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(x^2\right)+2x^2}{x}=\frac{\ln\left(0^+\right)+2\times 0^+}{0^+}=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln\left(x^2\right)+2x^2}{x}=\frac{\ln\left(0^+\right)-2\times 0^+}{0^-}=\frac{-\infty}{0^-}=+\infty$$

$x=0$ é assíntota vertical.

Assíntotas não verticais:

Quando $x\to+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2\right)+2x^2}{x^2}=$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\ln\left(x^2\right)+2x^2\right]'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\left(x^2\right)'}{x^2}+4x}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x^2}+4x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{4x^2}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+4x^2}{2x^2}=$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2+4x^2\right)'}{\left(2x^2\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8\cancel{x}}{4\cancel{x}}=2$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln\left(x^2\right)+2x^2}{x}-2x\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2\right)+\cancel{2x^2}-\cancel{2x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}=$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{RL'H}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=\frac{2}{+\infty}=0$$

$y=2x$ é assíntota oblíqua para $x\to+\infty$.

Quando $x\to-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-2x\right]=0$$

$y=2x$ é assíntota oblíqua para $x\to-\infty$.

4.2. $$f'(x)=\frac{\left[\ln\left(x^2\right)+2x^2\right]'x-\left[\ln\left(x^2\right)+2x^2\right]x'}{x^2}=$$

$$=\frac{\left[\frac{\left(x^2\right)'}{x^2}+4x\right]x-\ln\left(x^2\right)-2x^2}{x^2}=$$

$$=\frac{\left(\frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}+4x\right)x-\ln\left(x^2\right)-2x^2}{x^2}=$$

$$= \frac{\frac{2}{\cancel{x}} \times \cancel{x} + 4x^2 - \ln\left(x^2\right) - 2x^2}{x^2} = \frac{2 + 2x^2 - \ln\left(x^2\right)}{x^2}$$

$$f'(1) = \frac{2 + 2 \times 1^2 - \ln\left(1^2\right)}{1^2} = 2 + 2 - 0 = 4$$

$$f(1) = \frac{\ln\left(1^2\right) + 2 \times 1^2}{1} = 0 + 2 = 2$$

O ponto de coordenadas $(1, 2)$ pertence ao gráfico de f e à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

$y = mx + b$

$m = f'(1) = 4$

$y = 4x + b$; $(1, 2)$ ponto da reta

$2 = 4 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -2$

$y = 4x - 2$

5. $f(x) = \frac{2x - 1}{x - 1}$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)'(x-1) - (2x-1)(x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{2(x-1) - (2x-1)}{(x-1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x + 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f'(2) = \frac{-1}{(2-1)^2} = -1$$

$$f(2) = \frac{2 \times 2 - 1}{2 - 1} = 3$$

O ponto de coordenadas $(2, 3)$ pertence ao gráfico de f e à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2.

$y = mx + b$

$m = f'(2) = -1$

$y = -x + b$; $(2, 3)$ ponto da reta tangente

$3 = -2 + b \Leftrightarrow b = 5$

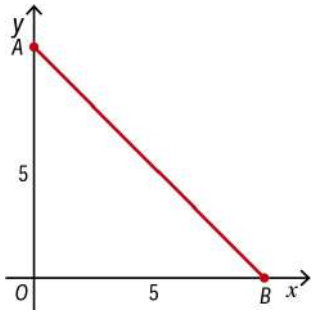
$y = -x + 5$

$x = 0 \Leftrightarrow y = 5$

$A(0, 5)$ ponto de interseção da reta tangente com o eixo Oy.

$y = 0 \Leftrightarrow -x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

$B(5, 0)$ ponto de interseção da reta tangente com o eixo Ox.



Aplicando o teorema de Pitágoras vem:

$\overline{AB}^2 = 5^2 + 5^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 50 \underset{\overline{AB}>0}{\Leftrightarrow} \overline{AB} = \sqrt{50} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AB} = 5\sqrt{2}$ u.c.

C.A.

50	2
25	5
5	5
1	

$50 = 2 \times 5^2$

$\sqrt{50} = \sqrt{2 \times 5^2} = 5\sqrt{2}$

Pág. 205

6. $f(x) = e^{-ax}$, $a \in \mathbb{R}^+$

Seja x a abcissa de P.

$P\left(x, f(x)\right) = \left(x, e^{-ax}\right)$

$A(x, 0)$

$$A_{[OAP]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{AP}}{2} = \frac{x \times e^{-ax}}{2}$$

$$A(x) = \frac{xe^{-ax}}{2}$$

$$A'(x) = \frac{\left(xe^{-ax}\right)' \times 2 - xe^{-ax} \times 2'}{2^2} =$$

$$= \frac{\left[x'\left(e^{-ax}\right) + x\left(e^{-ax}\right)'\right] \times 2}{4} = \frac{e^{-ax} + x(-ax)'e^{-ax}}{2} =$$

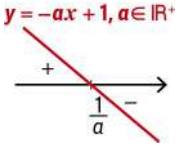
$$= \frac{e^{-ax} - axe^{-ax}}{2} = \frac{e^{-ax}(1 - ax)}{2}$$

Zeros de A':

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{-ax}(1 - ax)}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-ax}(1 - ax) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-ax} = 0}_{\text{equação impossível}} \vee 1 - ax = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}$$



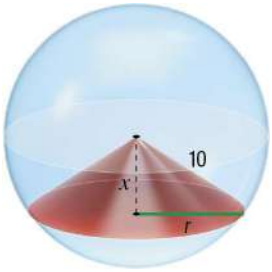
$$A(0) = \frac{0 \times e^{-a \times 0}}{2} = 0$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{a}$	$+\infty$
A'	+	0	−
A	↗	0 Máx.	↘

A abcissa de P é $\frac{1}{a}$.

7.1. $V_{cone} = \frac{1}{3} A_{base} \times altura$

$V_{cone} = \frac{1}{3} \pi R^2 \times x$



Aplicando o teorema de Pitágoras vem:

$10^2 = x^2 + R^2 \Leftrightarrow R^2 = 100 - x^2$

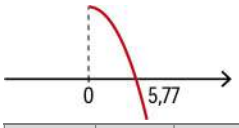
$V(x) = \frac{1}{3}\pi\left(100 - x^2\right) \times x \Leftrightarrow V(x) = \frac{\pi\left(100x - x^3\right)}{3}$

7.2. $V'(x) = \frac{\pi}{3}\left(100x - x^3\right)' = \frac{\pi}{3}\left(100 - 3x^2\right)$

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}\left(100 - 3x^2\right) = 0 \Leftrightarrow 100 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2 = 100 \Leftrightarrow x^2 = \frac{100}{3} \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{\frac{100}{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \approx 5{,}77$ cm



x	0		5,77	$+\infty$
V'		+	0	−
V		↗	Máx.	↘

A altura do cone de volume máximo é, aproximadamente, 5,77 cm.

8. $f(x) = ax + (bx + c) \times \ln x$

Sabe-se que:

- $f(1) = 1$ e $f'(1) = 0$
- $f(2) = 2 - 3\ln 2$

8.1. $f(1) = 1 \Leftrightarrow a + (b + c) \times \ln 1 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a + (b + c) \times 0 = 1 \Leftrightarrow a = 1$

$f(x) = x + (bx + c) \times \ln x$

$f'(x) = 1 + b \times \ln x + (bx + c) \times \frac{1}{x} =$

$= 1 + b \times \ln x + b + \frac{c}{x}$

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + b \times \ln 1 + b + \frac{c}{1} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + b \times 0 + b + c = 0 \Leftrightarrow b + c = -1$

$f(2) = 2 - 3\ln 2 \Leftrightarrow \cancel{2} + (2b + c) \times \ln 2 = \cancel{2} - 3\ln 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2b + c) \times \ln 2 = -3\ln 2 \Leftrightarrow 2b + c = -3$

$\begin{cases} b + c = -1 \\ 2b + c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 - b \\ 2b - 1 - b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 - b \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -2 \end{cases}$

$a = c = 1$ e $b = -2$

8.2. **a)** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \underset{\text{RL'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{x'}$

$f'(x) = 1 - 2\ln x - 2 + \frac{1}{x} = -1 - 2\ln x + \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-1 - 2\ln x + \frac{1}{x}\right) = -1 - 2 \times (+\infty) + \frac{1}{+\infty} =$

$= -1 - \infty + 0 = -\infty$

8.3. $f''(x) = \left(-1 - 2\ln x + \frac{1}{x}\right)' =$

$= (-1)' - (2\ln x)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 0 - \left(2 \times \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} =$

$= -\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{-2x - 1}{x^2}$

Como $D_f = \mathbb{R}^+$, $-2x - 1 < 0$ e $x^2 > 0$ logo, $\frac{-2x - 1}{x^2} < 0$ e $f''(x) < 0$.

A concavidade de f é voltada para baixo em todo o seu domínio.

8.4. $y = x$; $f(x) = x + (-2x + 1)\ln x$

a) $f(x) = x$

$f(x) = x \Leftrightarrow \cancel{x} + (-2x + 1)\ln x = \cancel{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-2x + 1)\ln x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x + 1 = 0 \vee \ln x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(2x = 1 \vee x = e^0\right) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{2} \vee x = 1\right) \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 1$

$S = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$

Os gráficos da função f e da reta de equação $y = x$ intersetam-se em dois pontos de abcissas $\frac{1}{2}$ e 1.

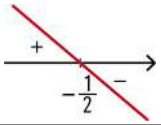
b) $f(x) < x \Leftrightarrow \cancel{x} + (-2x + 1)\ln x < \cancel{x} \Leftrightarrow$

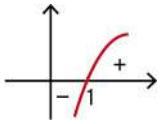
$\Leftrightarrow (-2x + 1)\ln x < 0$

C.A.

$-2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 \Leftrightarrow x = 1$





x	0		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$-2x + 1$		+	0	−	−	−
$\ln x$		−	−	−	0	
$(-2x + 1)\ln x$		−	0	+	0	−

$S = \left]0, \frac{1}{2}\right[\cup]1, +\infty[$

9. $f(x) = \frac{e^{-0,5x^2}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5x^2}$

$f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5x^2}\right)' =$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)' e^{-0,5x^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \left(e^{-0,5x^2}\right)' =$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-0,5x^2\right)' e^{-0,5x^2} = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5x^2}$

$f''(x) = \left(\frac{-x}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5x^2}\right)' =$

$= \left(\frac{-x}{\sqrt{2\pi}}\right)' e^{-0,5x^2} + \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-0,5x^2}\right)' =$

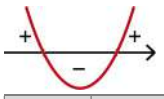
$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-0,5x^2} - \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \left(-0,5x^2\right)' e^{-0,5x^2} =$

$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5x^2} = e^{-0,5x^2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}\right)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,5x^2}}_{\substack{\text{equação} \\ \text{impossível}}} = 0 \vee -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-1 + x^2}{\sqrt{2\pi}} = 0 \Leftrightarrow -1 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$



x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f'	+	0	–	0	+
f		P.I.		P.I.	

As abcissas dos pontos de inflexão são -1 e 1.

Máximo On

Pág. 206

Tarefa – O método da bisseção

1. $f(0) = 0^3 - 5 \times 0^2 + 2 \times 0 - 3 = -3$

$f(5) = 5^3 - 5 \times 5^2 + 2 \times 5 - 3 = 7$

2. Como f é uma função polinomial, é contínua em $\mathbb{R}$ e em $[0,5]$ de forma particular. Como $f(0) < 0 < f(5)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, f tem pelo menos uma raiz no intervalo $[0,5]$.

3.1. $c_1 = \frac{0+5}{2} = 2,5$

3.2. $f(2,5) = 2,5^3 - 5 \times 2,5^2 + 2 \times 2,5 - 3 = -13,625 < 0$

3.3. Como $f(0)$ e $f(2,5)$ têm o mesmo sinal, $[a_1, b_1] = [2,5;\ 5]$.

4.1. $c_2 = \frac{2,5+5}{2} = 3,75$

4.2. $f(3,75) = 3,75^3 - 5 \times 3,75^2 + 2 \times 3,75 - 3 \approx$

$\approx -13,078 < 0$

4.3. Como $f(0)$ e $f(3,5)$ têm o mesmo sinal, $[a_2, b_2] = [3,75;5]$.

5.1. Esta condição verifica se $f(a)$ e $f(b)$ têm o mesmo sinal, isto é, se o produto $f(a) \times f(b)$ é positivo. Se $f(a)$ e $f(b)$ tiverem o mesmo sinal, pelo método da bisseção, não há garantia de existir raiz no intervalo $[a,b]$ e o programa avisa e interrompe a execução.

Pág. 207

5.2. A quantidade $b - a$ é o comprimento do intervalo em que sabemos que está a raiz.
O programa continua a repetir o processo enquanto o comprimento do intervalo for maior que $2 \times erro$.
Quando a condição deixa de ser verdadeira, tem-se $b - a \leq 2 \times erro$ e, nesse momento, qualquer ponto do intervalo (em particular o ponto médio que o programa devolve) está a uma distância no máximo igual ao erro da raiz verdadeira, o que faz parar a execução do programa uma vez que a aproximação já tem a precisão pretendida.

6.1. Em cada iteração do Programa 1, a função é avaliada, no mínimo, duas vezes em *a* e duas vezes em *c*.
Em cada iteração do Programa 2, a função é avaliada apenas uma vez em c e, por isso, tornando o Programa 2 mais eficiente.

6.2. Com estes comandos, quando o novo intervalo passa a ser $[a,c]$ ou $[c,b]$, atualiza-se ao mesmo tempo o extremo do intervalo (*a* ou *b*) e o valor da função nesse extremo (*fa* ou *fb*).
Se se atualizasse apenas *a* ou *b*, sem atualizar *fa* e *fb*, então a variável *a* já teria o novo valor, mas *fa* continuaria a guardar o valor antigo de $f(a)$.
Nas iterações seguintes, a condição "if fa*fc < 0" estaria a usar um valor de *fa* que não corresponde ao de *a*, o que podia levar o programa a escolher o subintervalo errado e deixar de funcionar corretamente. Por isso é essencial atualizar *a*, *b*, *fa* e *fb* em simultâneo.

6.3. O programa devolve $x \approx 4,710\,623\,025\,894\,165$.
Como o erro é $0,000\,001$, a raiz encontra-se no intervalo aproximado:
$[a,b] = [x - 0,000\,001; x + 0,000\,001] =$
$= [4,710622026; 4,710624026]$

Questões para preparar o exame

Pág. 208

1.1. Para *f* ser contínua em $x=0$,

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1-\cos x}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(1-\cos x)'}{x'}$

$=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{1}=\sin 0=0\quad\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^x-2x\right)=e^0-2\times0$

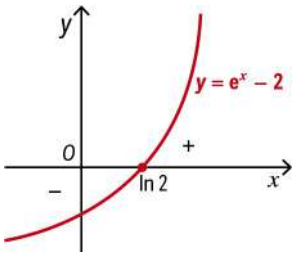
$=1-0=1=f(0)$

Como $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, a função *f* não é contínua em $x=0$.

1.2. $f'(x)=\left(e^x-2x\right)'=e^x-2$

$f'(x)=0\Leftrightarrow e^x-2=0\Leftrightarrow e^x=2\Leftrightarrow x=\ln 2$

x	0		$\ln 2$		π
f'		−	0	+	$e^\pi-2$
f		↘	Mín.	↗	Máx.



f é estritamente decrescente em $]0,\ln 2]$ e estritamente crescente em $[\ln 2,\pi]$. Existe um mínimo relativo em $x=\ln 2$ e um máximo relativo em $x=\pi$.

1.3. Concordo com o Igor quando afirma que a função *f* não tem assíntotas horizontais nem oblíquas ao seu gráfico para $x\to+\infty$, mas não concordo com o cálculo do $\lim\limits_{x+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ porque o $D_f=]-\infty,\pi]$. Logo, não faz sentido calcular limites para $x\to+\infty$.

1.4. $f'(x)=e^x-2$

$f''(x)=\left(e^x-2\right)'=e^x>0$

Como $f''(x)>0$, para todo o $x\in]0,\pi[$, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]0,\pi[$. Não existem pontos de inflexão.

1.5. $f'(c)=\pi^0\Leftrightarrow f'(c)=1,\ c\in]0,\pi[$

Seja $f'(x)=1$.

A função f' é contínua em $[0,\pi]$ porque resulta de operações entre funções contínuas nesse intervalo.

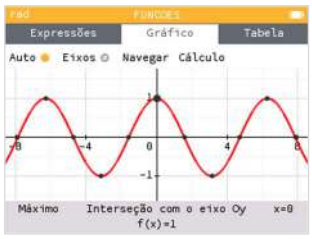
$f'(0)=e^0-2=1-2=-1$

$f'(\pi)=e^\pi-2\approx21{,}1$

Como f' é contínua em $[0,\pi]$ e $f'(0)<1<f'(\pi)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $f'(x)=1$.

Tem, pelo menos, uma solução em $]0,\pi[$, isto é, existe, pelo menos, um $c\in]0,\pi[$ tal que $f'(c)=1$.

2. $f(x)=\cos x\quad D_f=\mathbb{R}$



I. $g(x)=\sqrt{f(x)}$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}:f(x)\geq0\}=\{x\in\mathbb{R}:\cos x\geq0\}$

$=\left[-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right],k\in\mathbb{R}\neq\mathbb{R}$

A proposição I. é falsa.

II. $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

$D_h=\{x\in\mathbb{R}:f(x)\neq0\}=\{x\in\mathbb{R}:\cos x\neq0\}=$

$=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$

C.A. $\cos x=0$

$x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} h(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$

$x=\dfrac{\pi}{2}$ é assíntota vertical ao gráfico de h. A proposição II. é falsa.

3. $f(x)=\ln(x-a)\qquad D_f=]a,+\infty[$

$A\left(\dfrac{a}{2},f\left(\dfrac{a}{2}\right)\right)\quad B\left(-a,f\left(\dfrac{a}{2}\right)\right)\quad C\left(-a,f(-a)\right)$

$f\left(\dfrac{a}{2}\right)=\ln\left(\dfrac{a}{2}-a\right)=\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)$

$f(-a)=\ln(-a-a)=\ln(-2a)$

$A\left(\dfrac{a}{2},\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)\right)\quad B\left(-a,\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)\right)\quad C\left(-a,\ln(-2a)\right)$

A e *B* têm a mesma ordenada.
O segmento de reta [*AB*] é horizontal.

B e *C* têm a mesma abcissa.
O segmento de reta [*BC*] é vertical.
Portanto o triângulo é retângulo em *B*.

Base: $\overline{AB}$

$$\overline{AB}=\left|-a-\frac{a}{2}\right|=\underbrace{\left|-\frac{3a}{2}\right|}_{\substack{\text{Como } a<0,\\ -\frac{3a}{2}>0}}=-\frac{3}{2}a$$

Altura: $\overline{BC}$

$$\overline{BC}=\left|\ln(-2a)-\ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right|=\left|\ln\left(\frac{-2a}{-\frac{a}{2}}\right)\right|=\left|\ln\left(\frac{4a}{a}\right)\right|$$

$$=|\ln 4|=\ln 4$$

$$Área_{[ABC]}=\frac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{2}=\frac{-\frac{3}{2}a\times\ln 4}{2}=\frac{-3a\times\ln 4}{4}$$

$$=\frac{-3a\times\ln 2^2}{4}=\frac{-3a\times 2\ln 2}{4}=\frac{-3a\ln 2}{2}$$

$$Área_{[ABC]}=6\ln 2\Leftrightarrow\frac{-3a\ln 2}{2}=6\ln 2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3a\ln 2=12\ln 2\Leftrightarrow -3a=12\Leftrightarrow a=-4$$

Pág. 209

4.1. $f(x)=3\Leftrightarrow e^x+2e^{-x}=3\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^x+\frac{2}{e^x}-3=0\Leftrightarrow\left(e^x\right)^2-3e^x+2=0\Leftrightarrow$$

Mudança de variável $e^x=y$:

$$\Leftrightarrow y^2-3y+2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times2}}{2\times1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}\Leftrightarrow y=2\vee y=1\Leftrightarrow e^x=2\vee e^x=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\ln 2\vee e^x=e^0\Leftrightarrow x=\ln 2\vee x=0$$

Em $\mathbb{R}^+$, $S=\{\ln 2\}$.

$$f'(x)=\left(e^x+2e^{-x}\right)'=\left(e^x\right)'+\left(2e^{-x}\right)'=$$

$$=e^x+2(-x)'e^{-x}=e^x-2e^{-x}$$

$$f'(x)=1\Leftrightarrow e^x-2e^{-x}=1\Leftrightarrow e^x-\frac{2}{e^x}-1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(e^x\right)^2-e^x-2=0$$

Mudança de variável $e^x=y$

$$\Leftrightarrow y^2-y-2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}\Leftrightarrow y=\frac{1\pm3}{2}\Leftrightarrow y=2\vee y=-1\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow e^x=2\vee e^x=-1$, em que $e^x=-1$ é uma equação impossível

$\Leftrightarrow x=\ln 2$

$S=\{\ln 2\}$

Como as equações $f(x)=3$ e $f'(x)=1$ têm o mesmo conjunto solução em $\mathbb{R}^+$, são equivalentes em $\mathbb{R}^+$.

4.2.



$f(x)=3\Leftrightarrow x=\ln 2\vee x=3$

$A(\ln 2,3)$; $B(0,3)$

$$A_{[OAB]}=\frac{\overline{AB}\times\overline{BO}}{2}=\frac{\ln 2\times 3}{2}=\frac{3}{2}\ln 2 \text{ u.a.}$$

4.3. $f(x)=x+2{,}5$ Intervalo $[0,1]$, 2 iterações

$$f(x)=x+2{,}5\Leftrightarrow f(x)-x-2{,}5=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\underbrace{e^x+2e^{-x}-x-2{,}5}_{g(x)}=0$$

Como *g* é contínua em $[0,1]$ porque resulta de operações entre funções contínuas nesse intervalo, e

$g(0)=e^0+2e^{-0}-0-2{,}5=1+2-2{,}5=0{,}5>0$

$g(1)=e^1+2e^{-1}-1-2{,}5\approx-0{,}0046<0$,

Pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe uma solução da equação $g(x)=0$, isto é, existe uma solução da equação $f(x)=x+2{,}5$.

1.ª iteração:

$$x_1=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}+2e^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}-2{,}5\approx-0{,}14<0$$

Novo intervalo: $I_1=\left[0,\frac{1}{2}\right]$

2.ª iteração:

$$x_2=\frac{0+\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}=0{,}25$$

$x=0{,}25$

5. $D_f=\mathbb{R}^+$

$y=-x$ assíntota não vertical ao gráfico de f

$m=-1$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{f(x)}{x}}=\frac{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}}=\frac{\frac{1}{+\infty}}{-1}=\frac{0}{-1}=0$$

$y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de $\frac{1}{f}$.

A proposição I. é falsa.

$f''(x)>\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $\forall x\in\mathbb{R}^+$ e f' é crescente em $\mathbb{R}^+$.

A proposição II. é falsa.

6. $\frac{1}{2}e^x\ln(3-x)^2=(4-e^x)\ln(5-2x)+4\ln(3-x)$

$D=\{x\in\mathbb{R}: 3-x\neq 0\wedge 5-2x>0\wedge 3-x>0\}=$

$=\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq 3\wedge x<\frac{5}{2}\wedge x<3\right\}=\left]-\infty,\frac{5}{2}\right[$

C.A. $3-x\neq 0\Leftrightarrow x\neq 3$

$5-2x>0\Leftrightarrow -2x>-5\Leftrightarrow x<\frac{5}{2}$

$3-x>0\Leftrightarrow -x>-3\Leftrightarrow x<3$

$\frac{1}{2}e^x\ln(3-x)^2=(4-e^x)\ln(5-2x)+4\ln(3-x)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\times 2e^x\ln(3-x)-4\ln(3-x)=(4-e^x)\ln(5-2x)$

$\Leftrightarrow e^x\ln(3-x)-4\ln(3-x)=-(e^x-4)\ln(5-2x)$

$\Leftrightarrow (e^x-4)\ln(3-x)+(e^x-4)\ln(5-2x)=0$

$\Leftrightarrow (e^x-4)[\ln(3-x)+\ln(5-2x)]=0$

$\Leftrightarrow e^x-4=0\vee\ln(3-x)+\ln(5-2x)=0$

$\Leftrightarrow e^x=4\vee\ln(3-x)=-\ln(5-2x)$

$\Leftrightarrow e^x=4\vee\ln(3-x)=\ln(5-2x)^{-1}$

$\Leftrightarrow \left(e^x=4\vee 3-x=\frac{1}{5-2x}\right)\wedge x<\frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \left(x=\ln 4\vee x=\frac{7}{2}\vee x=2\right)\wedge x<\frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow x=\ln 4\vee x=2$

C.A. $3-x=\frac{1}{5-2x}$

$\Leftrightarrow 3-x-\frac{1}{5-2x}=0$

$\Leftrightarrow 15-6x-5x+2x^2-1=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-11x+14=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4\times 2\times 14}}{2\times 2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{11\pm\sqrt{9}}{4}\Leftrightarrow x=\frac{7}{2}\vee x=2$

Pág. 210

7.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-2}{xe^x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{g(x)-2}{x}\times\frac{1}{e^x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-2}{x}\times\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{e^x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}\times\frac{1}{e^0}$

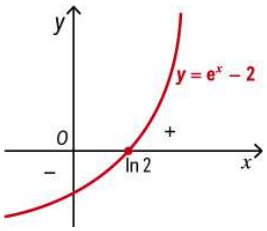
$=g'(0)\times\frac{1}{1}=2\times 1=2$

C.A. $g'(0)=e^0-2\times 0+1=1+1=2$

7.2. $g''(x)=(e^x-2x+1)'=(e^x)'-(2x)'+1'=e^x-2$

$g''(x)=0\Leftrightarrow e^x-2=0\Leftrightarrow e^x=2\Leftrightarrow x=\ln 2$

x	0		$\ln 2$		2
g''		−	0	+	
g			P.I.		



O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $]0,\ln 2[$ e voltada para cima em $]\ln 2,2[$.

Tem um ponto de inflexão em $x=\ln 2$.

7.3. Como a reta r é tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa 0, o declive da reta r é $g'(0)$:

$g'(0)=e^0-2\times 0+1=2$; $m_r=2$

Como a reta s é perpendicular à reta r, o seu declive, $m_s=-\frac{1}{m_r}$, isto é, $m_s=-\frac{1}{2}$.

Por outro lado, os pontos $A(x,0)$ e $B(0,y)$, pertencem à reta s.

Assim, $m_s=\frac{y-0}{0-x}=-\frac{y}{x}$.

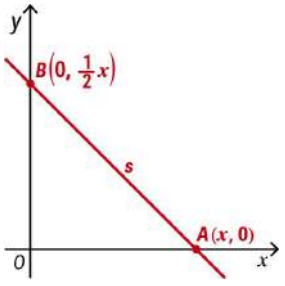
Como $m_s=-\frac{1}{2}$ e $m_s=-\frac{y}{x}$,

$-\frac{y}{x}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x$.

Sabe-se que:

$A_{[OAB]}=12\Leftrightarrow\frac{x\times\frac{1}{2}x}{2}=12\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^2=24$

$\Leftrightarrow x^2=48\underset{(x>0)}{\Leftrightarrow}x=\sqrt{48}\Leftrightarrow x=4\sqrt{3}$



A abcissa do ponto A é $4\sqrt{3}$.

8.1. $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x-1-x}{x^2}\underset{\text{R L'H}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{(e^x-1-x)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{2x}=$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x+\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0^+}x+\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=0+\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\underset{\text{R L' H}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left[x-\ln(1+x)\right]'}{\left(x^2\right)'}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\frac{(1+x)'}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{1}+x-\cancel{1}}{2x(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}(1+x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}$$

Como $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\frac{1}{2}$, existe $\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{2}$.

8.2. *f* é contínua em $]-\infty,0[$ porque resulta de operações contínuas nesse intervalo.

f é contínua em $]0,+\infty[$ porque resulta de operações continuas nesse intervalo.

f é contínua em $x=0$ se $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$.

$\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{2}$; $f(0)=2$

Como $\lim_{x\to 0}f(x)\neq f(0)$, *f* é descontínua em $x=0$.

Assim, *f* é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

8.3. Como $y=x$ é assíntota ao gráfico de *f* quando $x\to+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=0$.

Vamos mostrar que $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\cancel{x}+\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}-\cancel{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\underset{\text{R L' H}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[x-\ln(1+x)\right]'}{\left(x^2\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x'-\left[\ln(1+x)\right]'}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{(1+x)'}{1+x}}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{1}+x\cancel{-1}}{2x(1+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}(1+x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{+\infty}=0$$

8.4. $y=mx+b$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{e^x-1-x}{x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1-x}{x^3}=$$

$$\underset{\text{R L' H}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(e^x-1-x\right)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{3x^2}=\frac{e^{-\infty}-1}{3(-\infty)^2}=0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1-x}{x^2}\underset{\text{R L' H}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(e^x-1-x\right)'}{\left(x^2\right)'}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{e^{-\infty}-1}{-\infty}=\frac{0-1}{-\infty}=\frac{-1}{-\infty}=0$$

$y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

Pág. 211

9. $f'(x)\times f''(x)\leq 0$, $x\in\mathbb{R}$

Opção (A)

Para $x>0$, a função *f* é crescente, isto é, $f'(x)>0$ e tem a concavidade voltada para cima, isto é, $f''(x)>0$.

Logo, $f'(x)\times f''(x)>0$

Na opção (A), o gráfico não corresponde ao gráfico da tal função *f*.

Opção (B)

O gráfico de *f* é uma reta horizontal logo, a função *f* é constante.

$f'(x)=0$ e $f''(x)=0$, para todo o $x\in\mathbb{R}$

$f'(x)\times f''(x)=0$, ou seja, $f'(x)\times f''(x)\leq 0$, para todo o $x\in\mathbb{R}$.

O gráfico pode corresponder ao gráfico da função *f*.

Opção (C)

A função *f* é crescente, $f'(x)>0$, para todo o $x\in\mathbb{R}$.

A concavidade de *f* é voltada para baixo, $f''(x)<0$, para todo o $x\in\mathbb{R}$.

Assim, $f'(x)\times f''(x)\leq 0$, para todo o $x\in\mathbb{R}$.

O gráfico pode corresponder ao gráfico da função *f*.

Opção (D)

A função *f* é decrescente, $f'(x)<0$, para todo o $x\in\mathbb{R}$.

A concavidade de *f* é voltada para cima, $f''(x)>0$, para todo o $x\in\mathbb{R}$.

Assim, $f'(x)\times f''(x)\leq 0$, para todo o $x\in\mathbb{R}$

O gráfico pode corresponder ao gráfico da função *f*.

Opção (A)

10.1. $x\in]1,+\infty[$

$$g'(x)=\left(x^2-2x+\ln x\right)'=\left(x^2\right)'-(2x)'+(\ln x)'$$

$$=2x-2+\frac{1}{x}=\frac{2x^2-2x+1}{x}$$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-2x+1}{x}=0$

$\Leftrightarrow \underbrace{2x^2-2x+1=0}_{\text{equação impossível}} \wedge x\neq 0 \wedge x\in]1,+\infty[$

C.A.

$2x^2-2x+1=0$

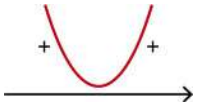
$\Leftrightarrow x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times 2\times 1}}{2\times 2}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{-4}}{4}$

Equação impossível

g' não tem zeros.

$g'(x)>0, \forall x\in]1,+\infty[$



g é estritamente crescente em $]1,+\infty[$ e não tem extremos relativos.

10.2. Se g é contínua em $x=1$, isto é,

$\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=g(1)$.

$g(1)=1^2-2\times 1+\ln 1=1-2+0=-1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=-1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}-e^{x-k}\right)=-1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}-\lim\limits_{x\to 1^-} e^{x-k}=-1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{[\sin(x-1)]'}{(x-1)'}-e^{1-k}=-1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)'\cos(x-1)}{1}-e^{1-k}=-1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}\cos(x-1)-e^{1-k}=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 0-e^{1-k}=-1 \Leftrightarrow 1-e^{1-k}=-1 \Leftrightarrow e^{1-k}=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-k=\ln 2 \Leftrightarrow k=1-\ln 2$

11. $f(x)=0$; $I_0=[a,4a], a>0$

Recordar: $I_0=[a,b]$

Amplitude do intervalo inicial: $b-a$

Após a realização de n iterações, a amplitude do intervalo obtido é: $\dfrac{b-a}{2^n}$

Após a realização de n iterações, a amplitude do intervalo obtido é:

$\dfrac{4a-a}{2^n}=\dfrac{3a}{2^n}$

Opção (B)

Pág. 212

12. $u(x)=1{,}2e^{-0{,}5x}(x+1)^2$, $x\geq 0$

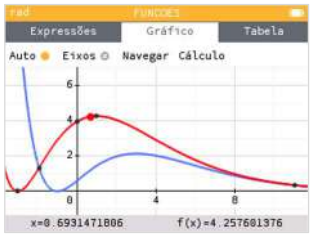
Pretendemos determinar x tal que:

$u(x+2)=\dfrac{1}{2}u(x)$

Seja $f(x)=u(x+2)=1{,}2e^{-0{,}5(x+2)}(x+3)^2$ e

$g(x)=\dfrac{1}{2}\times 1{,}2e^{-0{,}5x}(x+1)^2=0{,}6e^{-0{,}5x}(x+1)^2$

Coordenadas do ponto de interseção das funções *f* e *g*: $(11{,}06;0{,}35)$



$x\approx 11{,}06$ semanas

$11{,}06\times 7\approx 77{,}42$

Resposta: 77 dias

13. Zeros de *f*: $x=-3$ e $x=1$

$f(x)=a(x+3)(x-1)$

Como o gráfico de *f* tem a concavidade voltada para cima, $a>0$.

$g(x)=\ln(f(x))$

$f(x)=a(x^2-x+3x-3)=a(x^2+2x-3)$

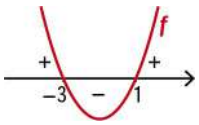
$=ax^2+2ax-3a$

$f'(x)=2ax+2a$

$f''(x)=2a>0$

$g(x)=\ln(f(x))$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}: f(x)>0\}=]-\infty,-3[\cup]1,+\infty[$



$g'(x)=\left[\ln(f(x))\right]'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$g''(x)=\dfrac{f''(x)f(x)-f'(x)\times f'(x)}{[f(x)]^2}$

$=\dfrac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{[f(x)]^2}$

Como $f(x)>0$, o sinal de g'' depende do sinal de

$f''(x)f(x)-(f'(x))^2$.

$f''(x)f(x)-(f'(x))^2=$

$=2a(ax^2+2ax-3a)-(2ax+2a)^2$

$=2a^2x^2+4a^2x-6a^2-(4a^2x^2+8a^2x+4a^2)$

$= 2a^2x^2 + 4a^2x - 6a^2 - 4a^2x^2 - 8a^2x - 4a^2$

$= -2a^2x^2 - 4a^2x - 10a^2$

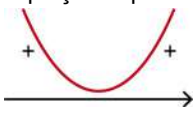
$= -2a^2\left(x^2 + 2x + 5\right)$

Como $-2a^2 < 0$, o sinal de $f''(x)f(x) - \left(f'(x)\right)^2$ depende apenas do sinal de $x^2 + 2x + 5$.

$x^2 + 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$

Equação impossível



$x^2 + 2x + 5 > 0$

Assim,

$f''(x)f(x) - \left(f'(x)\right)^2 = -2a^2\left(x^2 + 2x + 5\right) < 0$

O gráfico de *g* tem a concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio, $]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$.

14.1. Como *f* é contínua no seu domínio, porque é o quociente de duas funções contínuas, uma logarítmica e outra exponencial, a existirem assíntotas verticais são em 1 e em 2.

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\ln(x-1)}{(x-2)^2} = \dfrac{\ln 0^+}{(-1)^2} = \dfrac{-\infty}{1} = -\infty$

$x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

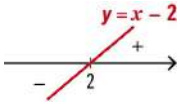
$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(x-1)}{(x-2)^2} \underset{\text{R L' H}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\left(\ln(x-1)\right)'}{\left[(x-2)^2\right]'} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\dfrac{(x-1)'}{x-1}}{2(x-2)(x-2)'} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\dfrac{1}{x-1}}{2(x-2)} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{2(x-2)(x-1)} = \dfrac{1}{2 \times 0 \times 1} = \dfrac{1}{0} = \infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{2(x-2)(x-1)} = \dfrac{1}{2 \times 0^+ \times 1} = +\infty$

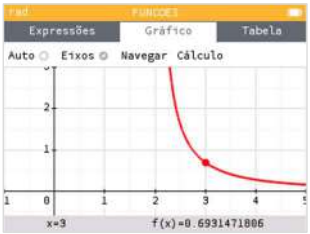
$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{2(x-2)(x-1)} = \dfrac{1}{2 \times 0^- \times 1} = -\infty$



$x = 2$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

$x = 0$ e $x = 2$

14.2.



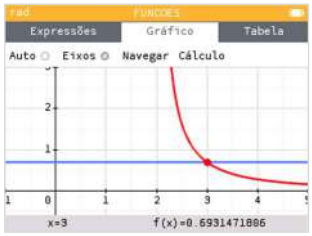
$A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{CB} \times \overline{AB}}{2} = \dfrac{(x-2) \times f(x)}{2} =$

$= \dfrac{(x-2) \times \dfrac{\ln(x-1)}{(x-2)^2}}{2} = \dfrac{\ln(x-1)}{2(x-2)}$

$A_{[ABC]} = \dfrac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\ln(x-1)}{2(x-2)} = \dfrac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\ln(x-1)}{x-2} = \ln 2$

Seja $f(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{x-2}$ e $g(x) = \ln 2$.

O valor de x é a abscissa do ponto de interseção dos gráficos das funções *f* e *g*.



$x = 3$

Pág. 213

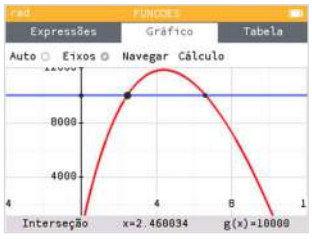
15. $N(p) = 5000e^{-0,2p} - 200p + 1500$, $2 \leq p \leq 12$

O valor total obtido com a venda dos bilhetes é dado por $p \times N(p)$.

1000 centenas = 10 000 dezenas

Pretende-se descobrir o menor valor de *p* para o qual $p \times N(p) = 10000$.

Recorrendo à calculadora gráfica:



$g(x) = x \times N(x)$

$h(x) = 10000$

$g(x) = h(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \approx 2,46$

$A(2,46; 10000)$

2,46 dezenas de euros são, aproximadamente, 25 €.

O menor preço que permite obter 1000 centenas de euros de receita é, aproximadamente 25 €.

16.1. a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{3x} = \dfrac{1}{3} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} =$

$= \dfrac{1}{3} g'(0) = \dfrac{1}{3}\left(\sqrt{0^2 + 4} - 2\right) =$

$= \dfrac{1}{3}(2 - 2) = \dfrac{1}{3} \times 0 = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g'(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x} =$

$\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left[\left(x^2 + 4\right)^{\frac{1}{2}} - 2\right]'}{(x)'} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(x^2+4\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(x^2+4\right)'}{1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \times \cancel{2}x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \underset{x>0}{=} \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2+4}} =$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+4}} \underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}}} = \sqrt{1} = 1$$

16.2. $m_r = g'(1) = \sqrt{1^2+4} - 2 = \sqrt{5} - 2$

$$m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{\sqrt{5}-2}$$

Seja θ a inclinação da rera *s*.

$$\tan\theta = m_s \Leftrightarrow \tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}-2}$$

Então, como $m_s < 0$,

$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right) + 180º \Leftrightarrow \theta \approx 103º$$

A inclinação da reta *s* é, aproximadamente, 103º.

16.3. $g''(x) = \left(\sqrt{x^2+4} - 2\right)' = \left[\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{2}}\right]' - 0$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2+4\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(x^2+4\right)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge \underbrace{\sqrt{x^2+4} \neq 0}_{\text{condição universal}} \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g''	−	0	+
g		P.I.	

O gráfico de *g* tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e voltada para cima em $]0, +\infty[$.

Tem um ponto de inflexão em $x = 0$.

16.4. $(f \circ g)'(0) = g'(0) \times f'(g(0)) = 0 \times f'(g(0)) =$

C.A. $\left| \begin{array}{l} g'(0) = \sqrt{0+4} = 0 \\ f'(x) = \left(x^2\right)' = 2x \end{array} \right.$

$$= 0 \times \left[2g(0)\right] = 0$$

$$(f \circ g)'(0) = 0$$

Pág. 214

17. *h* é contínua; $D_h = [0, a]$

Pretende-se provar que a equação $h(x) = x$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[0, a]$.

$h(x) = x \Leftrightarrow h(x) - x = 0$.

Seja $f(x) = h(x) - x$.

f é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, é contínua em $[0, a]$.

$f(0) = h(0) - 0 = h(0) \geq 0$

$f(a) = h(a) - a \leq 0$

Se $h(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$

Se $h(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) = 0$

C.A. $\left| \begin{array}{l} h(0) \leq a \\ \Leftrightarrow h(a) - a \leq 0 \end{array} \right.$

Nos dois casos, existe pelo menos uma solução de $f(x) = 0$ em $[0, a]$.

Se $h(0) \neq 0 \wedge h(a) \neq 0$, então $f(a) < 0 < f(0)$.

Então, como *f* é contínua em $[0, a]$ e $f(a) < 0 < f(0)$, o teorema de Bolzano-Cauchy, permite-nos concluir que a equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma solução em $]0, a[$.

Provamos, então, que existe pelo menos uma solução da equação $f(x) = x$ em $[0, a]$, ou seja, que existe pelo menos um $c \in [0, a]$ tal que $h(c) = c$.

Logo, *h* tem, pelo menos, um ponto fixo pertencente ao intervalo $[0, a]$.

18.1. $f(x) = e^x - x - 2 \quad D_f = \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{f(x)}{x-1} \; ; \; D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$f'(x) = \left(e^x - x - 2\right)' = e^x - 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$

$f(0) = e^0 - 0 - 2 = 1 - 2 = -1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	−	0	+
f	↘	−1	↗

A função *f* é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

f tem um mínimo absoluto igual a -1 para $x = 0$.

18.2. Assíntotas verticais (paralelas a *Oy*):

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e *g* é contínua. Logo, só poderá existir assíntota vertical em $x = 1$.

$$\lim_{x\to1} g(x) = \lim_{x\to1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{e^x - x - 2}{x-1} = \frac{e-3}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to1^+} g(x) = \frac{e-3}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} g(x) = \frac{e-3}{0^-} = +\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de *f*.

Assíntotas horizontais (paralelas a *Ox*):

Quando $x \to +\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - x - 2}{x-1}$

$\underset{\text{R L' H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(e^x - x - 2)'}{(x-1)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - 1}{1} = e^{-\infty} = 0$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de *g*.

O gráfico de *g* tem duas assíntotas paralelas aos eixos coordenados: a reta de equação $x = 1$ (paralela ao eixo *Oy*) e a reta de equação $y = 0$ (paralela ao eixo Ox).

18.3. $f(x) = e^x - x - 2$; $f'(x) = e^x - 1$

Iteração 1:

$x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \dfrac{e^1 - 1 - 2}{e^1 - 1} = 1 - \dfrac{e-3}{e-1} \approx 1{,}16395$

Iteração 2:

$x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}16395 - \dfrac{e^{1{,}16395} - 1{,}16395 - 2}{e^{1{,}16395} - 1}$

$= 1{,}16395 - \dfrac{e^{1{,}16395} - 3{,}16395}{e^{1{,}16395} - 1} \approx 1{,}15$

Uma solução aproximada da equação $f(x) = 0$ é $x_2 \approx 1{,}15$.

19.1. $f(x) = \ln^3 x$; $D_f = \mathbb{R}^+$

$g(x) = 3\ln^2 x - 2\ln x$; $D_g = \mathbb{R}^+$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln^3 x = 3\ln^2 x - 2\ln x$

$\Leftrightarrow \ln^3 x - 3\ln^2 x + 2\ln x = 0$

$\Leftrightarrow \ln x\left(\ln^2 x - 3\ln x + 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 0 \vee \ln^2 x - 3\ln x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 0 \vee \ln x = 1 \vee \ln x = 2$

$\Leftrightarrow x = e^0 \vee x = e \vee x = e^2$

C.A. Fazendo $y = \ln x$

$y^2 - 3y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4\times 1\times 2}}{2}$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{3 \pm 1}{2}$

$\Leftrightarrow y = 1 \vee y = 2$

$\Leftrightarrow \ln x = 1 \vee \ln x = 2$

$f(1) = \ln^3 1 = 0^3 = 0$

$f(e) = \ln^3 e = 1^3 = 1$

$f(e^2) = \ln^3 e^2 = 2^3 = 8$

Os pontos de interseção dos gráficos das funções *f* e *g* são os pontos de coordenadas $(1, 0)$, $(e, 1)$ e $(e^2, 8)$.

19.2. a) $f'(x) = (\ln^3 x)' = 3\ln^2 x \times (\ln x)' = 3\ln^2 x \times \dfrac{1}{x} =$

$= \dfrac{3\ln^2 x}{x}$

$f'(x) = \dfrac{3}{x} \Leftrightarrow \dfrac{3\ln^2 x}{x} = \dfrac{3}{x} \Leftrightarrow \dfrac{3\ln^2 x - 3}{x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\ln^2 x - 3 = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln^2 x = 1 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x = -1 \vee \ln x = 1 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = e^{-1} \vee x = e$

Logo, existem exatamente dois números reais $x > 0$ (e^{-1} e e) tais que $f'(x) = \dfrac{3}{x}$.

b) $g'(x) = (3\ln^2 x - 2\ln x)' = 6\ln x (\ln x)' - 2\times\dfrac{1}{x}$

$= 6\ln x \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{6\ln x - 2}{x}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{6\ln x - 2}{x} = 0$

$\Leftrightarrow 6\ln x - 2 = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow \ln x = \dfrac{1}{3} \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{e}$

x	0		$\sqrt[3]{e}$	$+\infty$
f'	N.D	$-$	0	$+$
f	N.D.	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$

$g\left(e^{\frac{1}{3}}\right) = 3\left(\ln e^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 2\ln e^{\frac{1}{3}} = 3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 - 2\times\dfrac{1}{3}$

$= \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{3}$

Logo, *g* admite um mínimo relativo igual a $-\dfrac{1}{3}$ para $x = \sqrt[3]{e}$.

Pág. 215

20. $C(t) = 120\left(e^{-0{,}3t} - e^{-t}\right)$, $t > 0$

Pretende-se resolver graficamente a equação $C(t) = 0{,}9C(t-1)$.

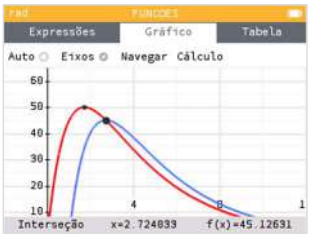
$C(t) = 0{,}9C(t-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 120\left(e^{-0{,}3t} - e^{-t}\right) = 0{,}9\times 120\left(e^{-0{,}3(t-1)} - e^{-(t-1)}\right)$

$f(x) = 120\left(e^{-0{,}3x} - e^{-x}\right)$

$g(x) = 0{,}9\times 120\left(e^{-0{,}3(x-1)} - e^{-(x-1)}\right)$

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x \approx 2{,}72$



$A(2{,}74\,;45{,}126)$

Ao fim de 2,72 h, após a administração do medicamento, a concentração desse medicamento no sangue é 90% da concentração existente uma hora antes.

21.1. f é contínua; $D_f=[0,+\infty[\ ;\ f(0)=2$

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x\geq 0 \\ \dfrac{e^{kx}-1}{e^{x}-1} & \text{se} \quad x<0 \end{cases} \qquad D_g=\mathbb{R}$$

Se a reta de equação $y=3x-4$ é assíntota ao gráfico de g quando $x\to+\infty$, sabe-se que:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3$ ((D) é verdadeira)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-3x\right]=-4 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x=-4\right)$ ((C) é falsa)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(3x-4)\right]=0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x+4\right)=0$ ((B) é verdadeira)

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-4)=+\infty$ ((A) é verdadeira)

Opção (C)

21.2. g é contínua em $x=0$, se

$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=g(0)$

$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=2=g(0)$

$$\lim_{x\to0^-}g(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{kx}-1}{e^{x}-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{R L' H}}{=}}\lim_{x\to0^-}\frac{\left(e^{kx}-1\right)'}{\left(e^{x}-1\right)'}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{(kx)'\,e^{kx}}{e^{x}}=\lim_{x\to0^-}\frac{ke^{kx}}{e^{x}}=\frac{k\times e^{0}}{e^{0}}=k$$

$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=g(0)\Leftrightarrow k=2$

Logo, g é descontínua em $x=0$ se $k\neq 2$.

21.3. $k=-1$

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x\geq 0 \\ \dfrac{e^{-x}-1}{e^{x}-1} & \text{se} \quad x<0 \end{cases}$$

$-\ln 2<0$

Se $x<0$,

$$g'(x)=\left(\frac{e^{-x}-1}{e^{x}-1}\right)'=$$

$$=\frac{\left(e^{-x}-1\right)'\left(e^{x}-1\right)-\left(e^{-x}-1\right)\left(e^{x}-1\right)'}{\left(e^{x}-1\right)^2}$$

$$=\frac{(-x)'\,e^{-x}\left(e^{x}-1\right)-\left(e^{-x}-1\right)\times e^{x}}{\left(e^{x}-1\right)^2}=$$

$$=\frac{-1+e^{-x}-1+e^{x}}{\left(e^{x}-1\right)^2}=\frac{e^{-x}+e^{x}-2}{\left(e^{x}-1\right)^2}$$

$$m=g'(-\ln 2)=\frac{e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}-2}{\left(e^{-\ln 2}-1\right)^2}=\frac{\cancel{2}+e^{\ln 2^{-1}}-\cancel{2}}{\left(e^{\ln 2^{-1}}-1\right)^2}=$$

$$=\frac{2^{-1}}{\left(2^{-1}-1\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=2$$

$$g(-\ln 2)=\frac{e^{\ln 2}-1}{e^{-\ln 2}-1}=\frac{2-1}{e^{\ln 2^{-1}}-1}=\frac{1}{2^{-1}-1}=\frac{1}{\frac{1}{2}-1}=-2$$

$y-(-2)=2(x+\ln 2) \Leftrightarrow y+2=2x+2\ln 2$

$\Leftrightarrow y=2x+2\ln 2-2$

Equação da reta tangente em $x=-\ln 2$:

$y=2x+2\ln 2-2$

Pág. 216

22. $D=\{x\in\mathbb{R}: x-1>0\wedge x>0\}=]1,+\infty[$

$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)-1=\log_{\frac{1}{2}}(x)$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-1)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)+\log_{\frac{1}{2}}(x)$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-1)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-1=\frac{1}{2}x\wedge x\in D \Leftrightarrow 2x-2=x\wedge x\in D\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-2=x\wedge x>1\Leftrightarrow x=2$

$S=\{2\}$

23. $C(t)=\dfrac{100}{1+4e^{-0{,}25t}}$, $0\leq t\leq 30$

Pretende-se resolver graficamente a equação

$C(3a)-C(a)=40$ e $0\leq a\leq 5$

$$\Leftrightarrow \frac{100}{1+4e^{-0{,}25\times 3a}}-\frac{100}{1+4e^{-0{,}25\times a}}=40$$

$$f(x)=\frac{100}{1+4e^{-0{,}25\times 3x}}-\frac{100}{1+4e^{-0{,}25x}}$$

$g(x)=40$



$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x \approx 3,494$

$a \approx 3,494$

Amplitude do intervalo = $3a - a = 2a \approx 2 \times 3,494 =$

$= 6,988$ minutos

1 min	_____	60 s	$x = 0,988 \times 60 \approx 59$ s
0,988	_____	x s	

Logo, a amplitude do intervalo é, aproximadamente, 6 minutos e 59 segundos.

24.1. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3x+1}{e^{x-2}-1} = \dfrac{7}{0^-} = -\infty$

Sim. A reta de equação $x = 2$ é assíntota ao gráfico de *f*.

24.2. $g(x) = f(x)$; $D_g = [2, +\infty[$

a) $g'(x) = \left(5 \times 2^{x-2} - 4\right)' =$

$= 5 \times (x-2)' \times 2^{x-2} \times \ln 2 - 0 = 5 \times 2^{x-2} \ln 2$

$g'(x) > 0, \forall x \in [2, +\infty[$

Logo, a função *g* é estritamente crescente. Então, passa no teste da reta horizontal, pelo que é invertível.

b) Como a função *g* é estritamente crescente e $D_g = [2, +\infty[$, a equação $g(x) = k$ não pode ter mais do que uma solução. Logo, tem, no máximo, uma solução em $[2, +\infty[$, para qualquer $k \in \mathbb{R}$.

c) $g^{-1}(x+4) = 3 \Leftrightarrow x + 4 = g(3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 4 = 5 \times 2^{3-2} - 4 \Leftrightarrow x = 5 \times 2 - 4 - 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 10 - 8 \Leftrightarrow x = 2$; $S = \{2\}$

Pág. 217

25. $A(2, 3)$ pertence ao gráfico de *f*. Então, $f(2) = 3$.

$B(3,1)$ pertence ao gráfico de *g*. Então, $g(3) = 1$

$m_t = \dfrac{1-3}{3-2} = -2$. Então, $f'(2) = -2$.

Seja *r* a reta tangente ao gráfico de *g* no ponto *B*.

$m_r = -\dfrac{1}{m_t} = -\dfrac{1}{-2} = \dfrac{1}{2}$. Então, $g'(3) = \dfrac{1}{2}$.

25.1. $(g \circ f)'(2) = f'(2) \times g'(f(2)) = -2 \times g'(3) =$

$= -2 \times \dfrac{1}{2} = 1$

$(g \circ f)'(2) = -1$

25.2. $g(3) = 1 \Leftrightarrow g^{-1}(1) = 3$; $\dfrac{g^{-1}(1)}{f'(2)} = \dfrac{3}{-2} = -\dfrac{3}{2}$

26. $\log_a(ab^2) = 5$, $a > 1$, $b > 0$

$\Leftrightarrow \log_a a + \log_a b^2 = 5 \Leftrightarrow 1 + 2\log_a b = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\log_a b = 4 \Leftrightarrow \log_a b = 2$

26.1. $\log_a\left(\dfrac{b}{a^2}\right) = \log_a b - \log_a a^2 = 2 - 2 = 0$

$\log_a\left(\dfrac{b}{a^2}\right) = 0$

26.2. $\log_a\left(\sqrt{a^3b^5}\right) = \log_a\left(a^3b^5\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log_a\left(a^3b^5\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\log_a a^3 + \log_a b^5\right) = \dfrac{1}{2}(3 + 5\log_a b)$

$= \dfrac{1}{2}(3 + 5 \times 2) = \dfrac{13}{2}$

$\log_a\left(\sqrt{a^3b^5}\right) = \dfrac{13}{2}$

27. $f(x) = \ln(x+1) + 0,02x$

$f'(x) = \left(\ln(x+1) + 0,02x\right)' = \dfrac{(x+1)'}{x+1} + 0,02 =$

$= \dfrac{1}{x+1} + 0,02$

Pretende-se determinar uma solução aproximada da equação $f(x) = f'(x)$ no intervalo $]0,1[$.

$f(x) = f'(x) \Leftrightarrow \ln(x+1) + 0,02x = \dfrac{1}{x+1} + 0,02 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(x+1) + 0,02x - \dfrac{1}{x+1} - 0,02 = 0$

Seja $g(x) = \ln(x+1) + 0,02x - \dfrac{1}{x+1} - 0,02$.

$g'(x) = \dfrac{(x+1)'}{x+1} + 0,02 - \dfrac{1'(x+1) - 1(x+1)'}{(x+1)^2} - 0 =$

$= \dfrac{1}{x+1} + 0,02 + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

Iteração 1:

$g(x_0) = g(0,8) = \ln 1,8 + 0,02 \times 0,8 - \dfrac{1}{1,8} - 0,02$

$\approx 0,0282$

$g'(x_0) = \dfrac{1}{1,8} + 0,02 + \dfrac{1}{1,8^2} \approx 0,8842$

$x_1 = x_0 - \dfrac{g(x_0)}{g'(x_0)} = 0,8 - \dfrac{g(0,8)}{g'(0,8)}$

$\approx 0,8 - \dfrac{0,0282}{0,8842} \approx 0,7681$

$|x_1 - x_0| = |0,7681 - 0,8| = 0,0319 < 10^{-1}$

Então, $x = x_1 \approx 0,77$.