MMA12DRAC © Porto Editora

Introdução à inferência estatística

1. Estatística e probabilidade

Pág. 114

Questão 1

1.1. População: todos os alunos da escola, isto é, os 450 alunos da escola.

1.2. Proporção de alunos da escola que se mostraram muito satisfeitos com as condições da biblioteca.

1.3. Proporção de alunos da amostra que se mostraram muito satisfeitos com as condições da biblioteca.

Valor da estatística:

$\hat{p} = \frac{42}{60} = \frac{7}{10} = 0,7 = 70\%$

1.4. Seja x o número de alunos da escola que estão muito satisfeitos com as condições da biblioteca.

$\frac{42}{60} = \frac{x}{450} \Leftrightarrow 60x = 42 \times 450 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 60x = 18\,900 \Leftrightarrow x = \frac{18\,900}{60} \Leftrightarrow x = 315$ alunos

Pág. 116

Questão 2

Comecemos por determinar uma estimativa do valor médio do número de avarias que eram comunicadas por dia.

$x = \frac{0 \times 2 + 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 9}{36} +$

$+ \frac{5 \times 3 + 6 \times 5 + 7 \times 5 + 8 \times 3}{36} =$

$= \frac{160}{36} = \frac{40}{9} \approx 4,4$

Pág. 119

Questão 3

3.1. O número total de amostras com dois elementos (com reposição) que se pode extrair de uma população com 5 elementos é dado por $5^2 = 25$.

Na tabela abaixo estão representadas as 25 amostras que podem ser extraídas da população em estudo.

		Temperaturas				
		30	28	24	32	26
Temperaturas	30	$X_1 = (30,30)$	$X_2 = (30,28)$	$X_3 = (30,24)$	$X_4 = (30,32)$	$X_5 = (30,26)$
	28	$X_6 = (28,30)$	$X_7 = (28,28)$	$X_8 = (28,32)$	$X_9 = (28,32)$	$X_{10} = (28,26)$
	24	$X_{11} = (24,30)$	$X_{12} = (24,28)$	$X_{13} = (24,24)$	$X_{14} = (24,32)$	$X_{15} = (24,26)$
	32	$X_{16} = (32,30)$	$X_{17} = (32,28)$	$X_{18} = (32,24)$	$X_{19} = (32,32)$	$X_{20} = (32,26)$
	26	$X_{21} = (26,30)$	$X_{22} = (26,28)$	$X_{23} = (26,24)$	$X_{24} = (26,32)$	$X_{25} = (26,26)$

3.2. $\overline{X}_1 = \frac{30+30}{2} = 30$, $\overline{X}_2 = \frac{30+28}{2} = 29$

$\overline{X}_3 = \frac{30+24}{2} = 27$, $\overline{X}_4 = \frac{30+32}{2} = 31$

$\overline{X}_5 = \frac{30+26}{2} = 28$, $\overline{X}_6 = \frac{28+30}{2} = 29$

$\overline{X}_7 = \frac{28+28}{2} = 28$, $\overline{X}_8 = \frac{28+24}{2} = 26$

$\overline{X}_9 = \frac{28+32}{2} = 30$, $\overline{X}_{10} = \frac{28+26}{2} = 27$

$\overline{X}_{11} = \frac{24+30}{2} = 27$, $\overline{X}_{12} = \frac{24+28}{2} = 26$

$\overline{X}_{13} = \frac{24+24}{2} = 24$, $\overline{X}_{14} = \frac{24+32}{2} = 28$

$\overline{X}_{15} = \frac{24+26}{2} = 25$, $\overline{X}_{16} = \frac{32+30}{2} = 31$

$\overline{X}_{17} = \frac{32+28}{2} = 30$, $\overline{X}_{18} = \frac{32+24}{2} = 28$

$\overline{X}_{19} = \frac{32+32}{2} = 32$, $\overline{X}_{20} = \frac{32+26}{2} = 29$

$\overline{X}_{21} = \frac{26+30}{2} = 28$, $\overline{X}_{22} = \frac{26+28}{2} = 27$

$\overline{X}_{23} = \frac{26+24}{2} = 25$, $\overline{X}_{24} = \frac{26+32}{2} = 29$

$\overline{X}_{25} = \frac{26+26}{2} = 26$

Distribuição de amostragem da temperatura média:

x_i	24	25	26	27	28	29	30	31	32
$P(\overline{X} = x_i)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$

3.3. $\mu = \frac{30+28+24+32+26}{5} = \frac{140}{5} = 28$

$\mu_{\overline{X}} = \frac{1}{25} \times 24 + \frac{2}{25} \times 25 + \frac{3}{25} \times 26 + \frac{4}{25} \times 27 +$

$+ \frac{5}{25} \times 28 + \frac{4}{25} \times 29 + \frac{3}{25} \times 30 + \frac{2}{25} \times 31 + \frac{1}{25} \times 32 = 28$

$\mu_{\overline{X}} = \mu$

Desvio-padrão da população (σ):

$\sigma^2 = \frac{(30-28)^2 + (28-28)^2 + (24-28)^2}{5} +$

$+ \frac{(32-28)^2 + (26-28)^2}{5} = \frac{40}{5} = 8$ (variância populacional)

$\sigma = \sqrt{8}$ (desvio-padrão populacional)

Desvio-padrão da distribuição de amostragem da média $(\sigma_{\overline{X}})$:

$\sigma_{\overline{X}}{}^2 = (24-28)^2 \times \frac{1}{25} + (25-28)^2 \times \frac{2}{25} +$

$+ (26-28)^2 \times \frac{3}{25} + (27-28)^2 \times \frac{4}{25} +$

$+ (28-28)^2 \times \frac{5}{25} + (29-28)^2 \times \frac{4}{25} +$

$+(30-28)^2 \times \frac{3}{25} + (31-28)^2 \times \frac{2}{25} +$

$+(32-28)^2 \times \frac{1}{25} = 4$

$\sigma_{\overline{X}} = \sqrt{4} = 2$

$\sigma_{\overline{X}} \neq \sigma$, mas $2 = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2 = \sqrt{\frac{8}{2}} \Leftrightarrow 2 = \sqrt{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 = 2$

$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ n é o número de elementos de cada amostra.

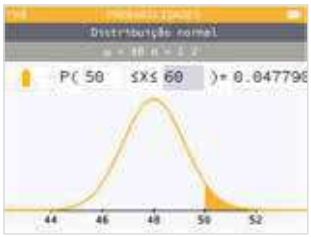
Pág. 121

Questão 4

4.1. Tendo em conta o Teorema Limite Central, espera-se que possa ser modelado por uma distribuição normal com valor médio 48 kg e desvio-padrão $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{100}} = 1{,}2$ kg.

4.2. $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$\overline{X} \sim N\left(48, \frac{12}{\sqrt{100}}\right)$



$P(50 \leq X \leq 60) \approx 0{,}0478 \approx 4{,}8\%$

Questão 5

5.1. Como $n = 40 \geq 30$, o Teorema Limite Central garante que, aproximadamente:

$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$; $\overline{X} \sim N\left(12{,}5; \frac{0{,}6}{\sqrt{40}}\right)$

$\overline{X} \sim N(12{,}5; 0{,}094\,87)$

5.2. Pretende-se calcular $P(X < 12{,}3)$.

$P(X < 12{,}3) \approx 0{,}0175 \approx 1{,}75\%$

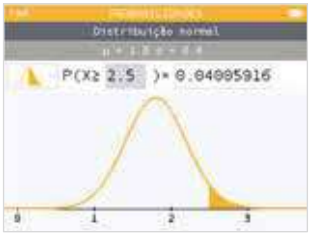


Pág. 122

Questão 6

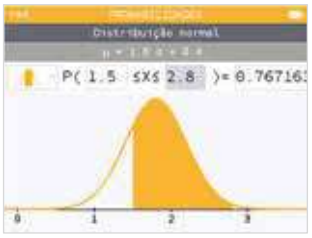
$X \sim (1{,}8; 0{,}4)$

6.1. Pretende-se calcular $P(X > 2{,}5)$.



$P(X > 2{,}5) \approx 0{,}0401 \approx 4{,}01\%$

6.2. Pretende-se calcular $P(1{,}5 < X < 2{,}8)$.

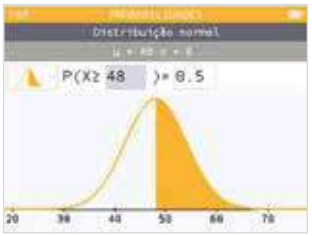


$P(1{,}5 < X < 2{,}8) \approx 0{,}7672 \approx 76{,}72\%$

Questão 7

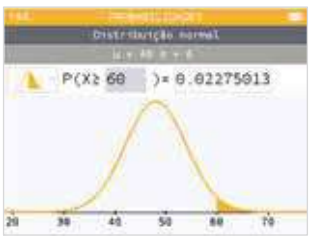
$X \sim N(48, 6)$

7.1. Pretende-se calcular $P(X > 48)$.



$P(X > 48) = 0{,}5 = 50\%$

7.2.



$P(X > 60) \approx 0{,}0228 \approx 2{,}3\%$

$2{,}3\% \times 600 = 13{,}8$

MMA12DRAC © Porto Editora

Pág. 123

Questão 8

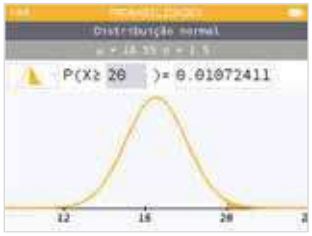
$X \sim N(16,55;\ 7,50)$

Amostra constituída por 25 adolescentes.

8.1. $\overline{X} \sim N\left(16,55;\ \frac{7,50}{\sqrt{25}}\right)$

$\overline{X} \sim N(16,55;\ 1,5)$

Pretendemos determinar $P(\overline{X} > 20)$.



$P(\overline{X} > 20) \approx 0,0107 \approx 1,1\%$

8.2. 50 cêntimos $= 0,50$ €

Pretendemos determinar $P(|\overline{X} - \mu| \leq 0,5)$, isto é,

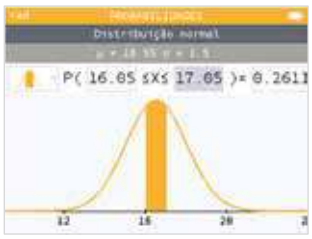
$P(|\overline{X} - 16,55| \leq 0,5)$.

$P(|\overline{X} - 16,55| \leq 0,5) \Leftrightarrow P(-0,5 \leq \overline{X} - 16,55 \leq 0,5) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(-0,5 + 16,55 < \overline{X} < 0,5 + 16,55) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(16,05 < \overline{X} < 17,05)$

Vimos na alínea anterior que a distribuição de amostragem da média é modelada por $N(16,55;\ 1,5)$.



$P(|\overline{X} - \mu| < 0,5) \approx 26,11\%$

Pág.124

Questão 9

$\mu = 18,20$ € ; $\sigma = 6,40$ €

$X \sim N(18,20;\ 6,40)$

Amostra constituída por 36 adolescentes, $n = 36$.

9.1. Pretendemos determinar $P(\overline{X} > 21)$.

$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6,40}{\sqrt{36}} \approx 1,067$

$\overline{X} \sim N(18,20;\ 1,067)$



$P(\overline{X} > 21) \approx 0,004\,34 \approx 0,4\%$

9.2. Pretendemos determinar $P(|\overline{X} - \mu| \leq 0,70)$, isto é,

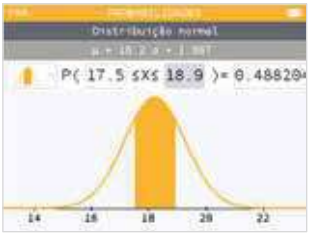
$P(|\overline{X} - 18,20| \leq 0,70)$.

$P(|\overline{X} - 18,20| \leq 0,70) =$

$= P(-0,70 \leq \overline{X} - 18,20 \leq 0,70) =$

$= P(-0,70 + 18,20 \leq \overline{X} \leq 0,70 + 18,20) =$

$= P(17,5 \leq \overline{X} \leq 18,9)$



$P(|\overline{X} - \mu| \leq 0,7) \approx 0,4882 \approx 48,82\%$

Pág. 125

Questão 10

Sabe-se que $X \sim N(650, \sigma)$ e que

$P(X > 700) = 8,4\% \Leftrightarrow P(X > 700) = 0,084$

Pretendemos determinar o valor de σ.

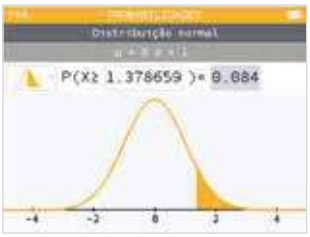
Comecemos por estandardizar a variável X.

$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$; $Z = \frac{X - 650}{\sigma}$; $Z \sim N(0, 1)$

$P(X > 700) = 0,084 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{X - 650}{\sigma} > \frac{700 - 650}{\sigma}\right) = 0,084 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(Z > \frac{50}{\sigma}\right) = 0,084$



$\frac{50}{\sigma} = 1,38 \Leftrightarrow \sigma = \frac{50}{1,38} \Leftrightarrow \sigma \approx 36,23$

MMA12DRAC © Porto Editora

Pág. 126

Questão 11

$X \sim N(1; 0,1)$

Pretendemos descobrir o valor de n para o qual $P(0,98 < \overline{X} < 1,02) = 0,99$ sabendo que

$\overline{X} \sim N\left(1; \frac{0,1}{\sqrt{n}}\right)$.

Comecemos por estandardizar a variável $\overline{X}$.

$$Z = \frac{\overline{X} - 1}{\frac{0,1}{\sqrt{n}}} \Leftrightarrow \frac{0,1}{\sqrt{n}} Z = \overline{X} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{X} = \frac{0,1}{\sqrt{n}} Z + 1 \; ; \; Z \sim N(0,1)$$

$$P(0,98 < \overline{X} < 1,02) = 0,99 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(0,98 < \frac{0,1}{\sqrt{n}} Z + 1 < 1,02\right) = 0,99 \Leftrightarrow$$

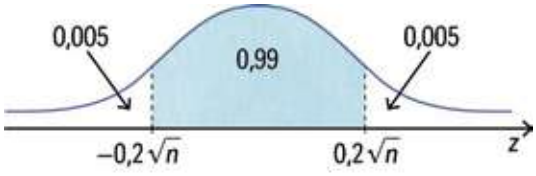
$$\Leftrightarrow P\left(0,98 - 1 < \frac{0,1}{\sqrt{n}} Z < 1,02 - 1\right) = 0,99 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(-0,02 < \frac{0,1}{\sqrt{n}} Z < 0,02\right) = 0,99 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(-0,02\sqrt{n} < 0,1Z < 0,02\sqrt{n}\right) = 0,99 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(-0,2\sqrt{n} < Z < 0,2\sqrt{n}\right) = 0,99 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(z < 0,2\sqrt{n}\right) = 0,995$$

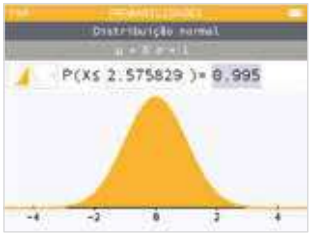


$$\frac{1 - 0,99}{2} = 0,005$$

$0,99 + 0,005 = 0,995$

$$0,2\sqrt{n} = 2,576 \Leftrightarrow \sqrt{n} = \frac{2,576}{0,2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} = 12,88 \Leftrightarrow n = 12,88^2 \Leftrightarrow n \approx 166$$



Pág. 127

Questão 12

$X \sim N(2,50; 0,12)$

$\overline{X} \sim N\left(2,50; \frac{0,12}{\sqrt{n}}\right)$

Pretendemos descobrir o valor de n tal que $P(2,48 < \overline{X} < 2,52) = 0,95$

Vamos começar por estandardizar a variável $\overline{X}$.

$$Z = \frac{\overline{X} - 2,50}{\frac{0,12}{\sqrt{n}}} \Leftrightarrow \frac{0,12}{\sqrt{n}} Z = \overline{X} - 2,50 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{X} = \frac{0,12}{\sqrt{n}} Z + 2,50$$

$Z \sim N(0,1)$

$$P\left(2,48 < \frac{0,12}{\sqrt{n}} Z + 2,50 < 2,52\right) = 0,95 \Leftrightarrow$$

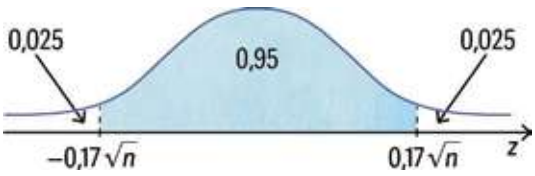
$$\Leftrightarrow P\left(2,48 - 2,50 < \frac{0,12}{\sqrt{n}} Z < 2,52 - 2,50\right) = 0,95 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(-0,02 < \frac{0,12}{\sqrt{n}} Z < 0,02\right) = 0,95 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{-0,02\sqrt{n}}{0,12} < Z < \frac{0,02\sqrt{n}}{0,12}\right) = 0,95 \Leftrightarrow$$

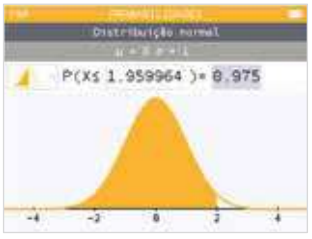
$$\Leftrightarrow P\left(-\frac{\sqrt{n}}{6} < Z < \frac{\sqrt{n}}{6}\right) = 0,95 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z < \frac{\sqrt{n}}{6}\right) = 0,975$$



$$\frac{1 - 0,95}{2} = 0,025$$

$0,95 + 0,025 = 0,975$



$$\frac{\sqrt{n}}{6} = 1,96 \Leftrightarrow \sqrt{n} = 1,96 \times 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} = 11,76 \Leftrightarrow n = 11,76^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 138,2976$$

Devem ser selecionadas 139 peças.

MMA12DRAC © Porto Editora

MMA12DRAC © Porto Editora

Pág. 128

Tarefas de consolidação 1

1. $\mu = \dfrac{(47+50)\times 0+(20+26)\times 1}{195}+$

$+\dfrac{(20+17)\times 2+(5+10)\times 3}{195}=$

$=\dfrac{97\times 0+46\times 1+37\times 2+15\times 3}{195}\approx 0{,}846$

$\text{I}\rightarrow \text{c)}$

Valores da variável: 0, 1, 2, 3

Frequências totais:

$0\rightarrow 97$

$1\rightarrow 46$

$2\rightarrow 37$

$3\rightarrow 15$

$\sigma_X{}^2=\dfrac{97(0-0{,}846)^2+46(1-0{,}846)^2}{195}+$

$+\dfrac{37(2-0{,}846)^2+15(3-0{,}846)^2}{195}\approx$

$\approx\dfrac{189{,}385}{195}\approx 0{,}971$

$\sigma_X=\sqrt{0{,}971}\approx 0{,}985$

$\text{II}\rightarrow \text{b)}$

Número total de rapazes: $50+26+17+10=103$

$\hat{p}=\dfrac{103}{195}\approx 0{,}5282\approx 52{,}8\%$

$\text{III}\rightarrow \text{c)}$

$P=\dfrac{20}{37}\approx 0{,}5405\approx 54{,}05\%>50\%$

$\text{IV}\rightarrow \text{b)}$

2. 195 alunos

$\mu=95$ min ; $\sigma=10$ min

$X\sim N(95,10)$

2.1. Amostra de dimensão 30 , $n=30$.

I: A afirmação é falsa. É possível aplicar o Teorema do Limite Central para $n\geq 30$.

$\overline{X}\sim N\left(95,\sigma_{\overline{X}}\right)$

$\sigma_{\overline{X}}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{10}{\sqrt{30}}=\dfrac{10\sqrt{30}}{30}=\dfrac{\sqrt{30}}{3}\approx 1{,}8257$

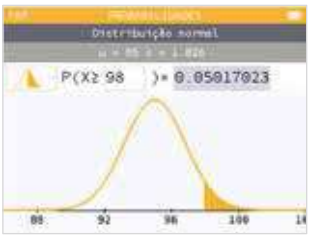
II: A afirmação é verdadeira.

III: A afirmação é verdadeira.

Opção (C)

2.2. Pretendemos saber $P\left(\overline{X}>98\right)$.

$P\left(\overline{X}>98\right)\approx 0{,}0502\approx 5{,}02\%$



Opção (D)

Pág. 129

3. Amostra de 480 alunos.

3.1. A população em estudo são todos os alunos do 11.º ano da disciplina de Matemática A que obtiveram CIF.

3.2. Os parâmetros são o valor médio da CIF dos alunos inscritos em Matemática A e a proporção de níveis inferiores a 10 valores na CIF desses alunos.

3.3. $\overline{X}=13{,}6$ valores

$\hat{p}=14\%$

3.4. $100\%-14\%=86\%$

4. $\mu=157$ cm ; $\sigma=4{,}8$ cm

$X\sim N(157;4{,}8)$

Amostra de dimensão 15 , $n=15$.

4.1. $\overline{X}=157$

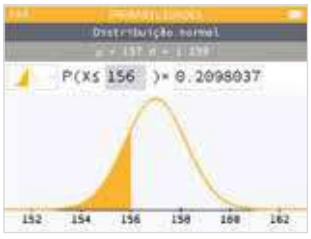
$\sigma_{\overline{X}}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{4{,}8}{\sqrt{15}}$

$\overline{X}\sim N\left(157,\dfrac{4{,}8}{\sqrt{15}}\right)$

4.2.

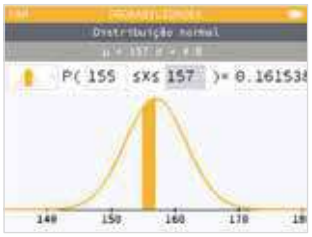
a) Pretendemos determinar $P\left(\overline{X}<156\right)$

$P\left(\overline{X}<156\right)\approx 0{,}2099\approx 20{,}99\%$



b) Pretendemos determinar $P(155 < X < 157)$.

$P(155 < X < 157) \approx 0{,}1615 \approx 16{,}15\%$

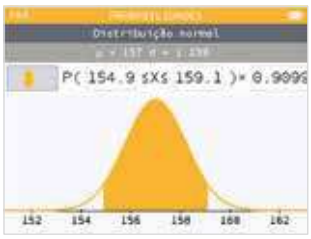


4.3. Pretendemos determinar $P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| < 2{,}1\right)$.

$P\left(\left|\overline{X} - 157\right| < 2{,}1\right) = P\left(-2{,}1 < \overline{X} - 157 < 2{,}1\right) =$

$= P\left(-2{,}1 + 157 < \overline{X} < 2{,}1 + 157\right) =$

$= P\left(154{,}9 < \overline{X} < 159{,}1\right) \approx 0{,}9099 \approx 90{,}99\%$



4.4. $n = ?$

$\overline{X} \sim N\left(157, \frac{4{,}8}{\sqrt{n}}\right)$

Seja Z a variável aleatória, tal que,

$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}$; $Z \sim (0, 1)$

$Z = \frac{\overline{X} - 157}{\frac{4{,}8}{\sqrt{n}}} \Leftrightarrow \frac{4{,}8Z}{\sqrt{n}} = \overline{X} - 157 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{X} = \frac{4{,}8Z}{\sqrt{n}} + 157$

Pretendemos determinar n tal que

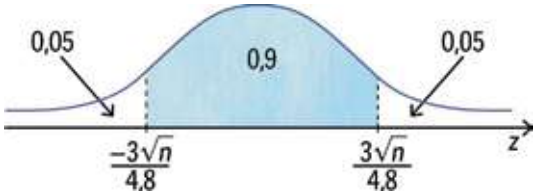
$P\left(154 < \overline{X} < 160\right) = 90\% = 0{,}9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(154 < \frac{4{,}8Z}{\sqrt{n}} + 157 < 160\right) = 0{,}9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(154 - 157 < \frac{4{,}8Z}{\sqrt{n}} < 160 - 157\right) = 0{,}9 \Leftrightarrow$

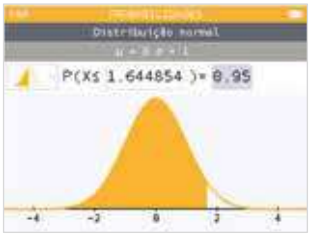
$\Leftrightarrow P\left(-3\sqrt{n} < 4{,}8Z < 3\sqrt{n}\right) = 0{,}9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{-3\sqrt{n}}{4{,}8} < Z < \frac{3\sqrt{n}}{4{,}8}\right) = 0{,}9$



$\frac{1 - 0{,}9}{2} = \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05$

$P\left(Z < \frac{3\sqrt{n}}{4{,}8}\right) = 0{,}9 + 0{,}05 = 0{,}95$



$\frac{3\sqrt{n}}{4{,}8} = 1{,}644\,85 \Leftrightarrow 3\sqrt{n} = 1{,}644\,85 \times 4{,}8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{n} = 7{,}895\,28 \Leftrightarrow \sqrt{n} = 2{,}63176 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = (2{,}63176)^2 \Leftrightarrow n \approx 6{,}926\,17 \Leftrightarrow$

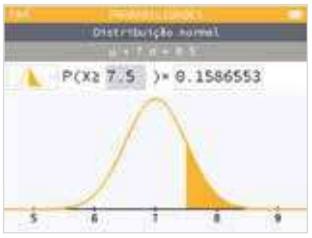
$\Leftrightarrow n \approx 7$

5. $X \sim N(7; 0{,}5)$

5.1. Como venderam 100 rifas, o custo médio de cada rifa, para obter os 750 € deveria ser $\frac{750}{100} = 7{,}5$ €.

Pretendemos determinar $P(X \geq 7{,}5)$.

Recorrendo à calculadora gráfica:



$P(X \geq 7{,}5) \approx 0{,}158\,66 \approx 15{,}87\%$

5.2. Seja n o número de rifas que os alunos teriam de vender para que a probabilidade de obterem uma quantia superior ou igual a 750 € fosse 50%.

O valor médio de cada rifa vendida deve ser igual ao valor médio da população, ou seja, 7 €.

Assim, $\frac{750}{n} = 7 \Leftrightarrow 7n = 750 \Leftrightarrow n \approx 107{,}14$

Os alunos teriam de vender, pelo menos, 108 rifas.

5.3. Por exemplo:

- podem aumentar um pouco o valor de cada rifa, não muito pois deixarão de ter possíveis compradores;
- terão de tentar vender mais rifas, com esses valores teriam de vender cerca de 200 rifas;
- oferecer prémios mais aliciantes para o público-alvo.

MMA12DRAC © Porto Editora

2. Intervalos de confiança

Pág. 131

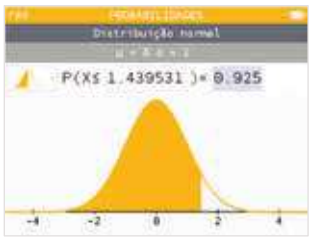
Questão 13

$85\% = 100 \times 0,85\% = 100(1-0,15)\%$

Então, $\alpha = 0,15$ e $z_{1-\frac{0,15}{2}} = z_{1-0,075} = z_{0,925}$

Como $Z \sim N(0,1)$, pretende-se encontrar o valor de z tal que $P(Z \leq z) = 0,925$.





Então, $z_{0,925} \approx 1,440$ e o intervalo de confiança é dado por:

$$\left[\bar{x} - 1,440 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + 1,440 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Pág. 133

Questão 14

$\bar{x} = 25$; $n = 256$

Nível de confiança = 95%. $z = 1,960$

Intervalo de confiança: $[24,39; 25,61]$

Raio do intervalo $= \frac{25,61 - 24,39}{2} = 0,61$

Então,

$$z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,61 \Leftrightarrow 1,960 \times \frac{\sigma}{\sqrt{256}} = 0,61 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma = \frac{0,61 \times \sqrt{256}}{1,960} \approx 4,98$$

Pág. 134

Questão 15

$\bar{x} = 1,70$; $s = 0,40$; $n = 80$

Nível de confiança: 95%. $z = 1,960$

Intervalo de confiança:

$$\left[1,70 - 1,960 \times \frac{0,40}{\sqrt{80}}; 1,70 + 1,960 \times \frac{0,40}{\sqrt{80}}\right] \approx [1,61; 1,79]$$

Como 1,50 € não pertence ao intervalo, conclui-se que o Arlindo não tem razão.

Questão 16

Nível de confiança: 95%. $z = 1,960$

Intervalo de confiança: $[61,94; 63,06]$

$n = 64$; $\bar{x} = 62,5$

$$\bar{x} + z \times \frac{s}{\sqrt{n}} = 63,06 \Leftrightarrow 62,5 + 1,960 \frac{s}{\sqrt{64}} = 63,06 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1,960 \frac{s}{8} = 63,06 - 62,5 \Leftrightarrow 1,960s = 4,48 \Leftrightarrow s \approx 2,3$$

Pág. 135

Questão 17

$n = 50$

Nível de confiança: 99%. $z = 2,576$

Intervalo de confiança: $[25,03; 32,56]$

$$\bar{x} = \frac{25,03 + 32,56}{2} = 28,795$$

Raio do intervalo:

$$\frac{32,56 - 25,03}{2} = 3,765$$

Então,

$$z \times \frac{s}{\sqrt{n}} = 3,765 \Leftrightarrow 2,576 \frac{s}{\sqrt{50}} = 3,765 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{3,765\sqrt{50}}{2,576} \Leftrightarrow s \approx 10,335$$

A média é $\bar{x} = 28,795$ e o desvio-padrão é $s \approx 10,335$.

Pág. 138

Questão 18

$p = 0,20$; $n = 75$

18.1. $n = 75 > 30$

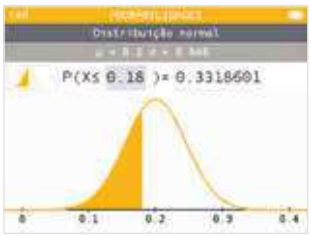
$$s = \sqrt{\frac{0,20(1-0,20)}{75}} \approx 0,046$$

A proporção, $\hat{p}$, segue, aproximadamente, um modelo Normal: $N(0,20; 0,046)$

18.2. Pretende-se determinar $P(\hat{p} < 0,18)$



MMA12DRAC © Porto Editora



$P\left(\hat{p} < 0{,}18\right) \approx 0{,}33$

A probabilidade pedida é, aproximadamente, $0{,}33$, ou seja, 33%.

Pág. 139

Questão 19

$\hat{p} = \frac{125}{250} = 0{,}5$

Nível de confiança: 95%. $z = 1{,}960$

Intervalo de confiança a 95%:

$$\left[\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}}, \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}}\right] =$$

$$= \left[0{,}5 - 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}5\left(1-0{,}5\right)}{250}}; 0{,}5 + 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}5\left(1-0{,}5\right)}{250}}\right] \approx$$

$$\approx \left[0{,}44; 0{,}56\right]$$

Pág. 140

Questão 20

$n = 2000$

$\hat{p} = \frac{620 + 840}{2000} = \frac{1460}{2000} = 0{,}73$

Nível de confiança: 99%. $z = 2{,}576$

Intervalo de confiança a 99%:

$$\left[\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}}; \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}}\right] =$$

$$= \left[0{,}73 - 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}73\left(1-0{,}73\right)}{2000}};\right.$$

$$\left. 0{,}73 + 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}73\left(1-0{,}73\right)}{2000}}\right] \approx \left[0{,}70; 0{,}76\right]$$

Um intervalo de confiança a 99% para a proporção de encomendas cujo atraso não excede 10 minutos é $\left[0{,}70; 0{,}76\right]$

Pág. 141

Questão 21

21.1. $n = 380$

$\hat{p} = \frac{114}{380} = 0{,}3$

Nível de confiança: 99%. $z = 2{,}576$

Intervalo de confiança a 99%:

$$\left[\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}}; \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}}\right] =$$

$$= \left[0{,}3 - 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}3\left(1-0{,}3\right)}{380}};\right.$$

$$\left. 0{,}3 + 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}3\left(1-0{,}3\right)}{380}}\right] \approx \left[0{,}24; 0{,}36\right]$$

Um intervalo de confiança a 99% para proporção de alunos que são adeptos de clube A é $\left[0{,}24; 0{,}36\right]$.

21.2. $n = 456$; $\hat{p} = \frac{114}{456} = 0{,}25$

Nível de confiança: 99%. $z = 2{,}576$

Intervalo de confiança a 99%:

$$\left[\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}}; \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}}\right] =$$

$$= \left[0{,}25 - 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}25\left(1-0{,}25\right)}{456}};\right.$$

$$\left. 0{,}25 + 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}25\left(1-0{,}25\right)}{456}}\right] \approx \left[0{,}20; 0{,}30\right]$$

Um intervalo de confiança a 99% para proporção de alunos que são adeptos do clube A é $\left[0{,}20; 0{,}30\right]$.

21.3. Pode concluir-se que, à medida que a dimensão da amostra aumenta, a amplitude do intervalo diminui.

Questão 22

$\hat{p} = \frac{500}{10\,000} = 0{,}05$

Raio do intervalo $= \frac{0{,}008\,547}{2} = 0{,}004\,273\,5$

$$z \times \sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}} = 0{,}004\,273\,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z \times \sqrt{\frac{0{,}05\left(1-0{,}05\right)}{10\,000}} = 0{,}004\,273\,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{0{,}0475}}{100} z = 0{,}004\,273\,5 \Leftrightarrow z = \frac{0{,}427\,35}{\sqrt{0{,}0475}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z \approx 1{,}960$$

Então, o nível de confiança do intervalo é 95%.

MMA12DRAC © Porto Editora

MMA12DRAC © Porto Editora

Pág. 142

Tarefas de consolidação 2

1. $n = 81$; $\bar{x} = 25$; $s = 5$

Nível de confiança: 99% . $z = 2,576$

Intervalo de confiança a 99% :

$$\left[\bar{x} - z \times \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z \times \frac{s}{\sqrt{n}}\right] =$$

$$= \left[25 - 2,576 \times \frac{5}{\sqrt{81}}; 25 + 2,576 \times \frac{5}{\sqrt{81}}\right] \approx$$

$$\approx [23,57; 26,43]$$

2. $n = 200$; $\bar{x} = 520$; $s = 120$

Nível de confiança: 95% . $z = 1,960$

Intervalo de confiança a 95% :

$$\left[\bar{x} - z \times \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z \times \frac{s}{\sqrt{n}}\right] =$$

$$= \left[520 - 1,960 \times \frac{120}{\sqrt{200}}; 520 + 1,960 \times \frac{120}{\sqrt{200}}\right] \approx$$

$$\approx [503,37; 536,63]$$

$620 \notin [503,37; 536,63]$

Então, o António é um cliente cujos gastos na alimentação não estão dentro do intervalo.

3. $n = 64$

Nível de confiança: 95% . $z = 1,960$

Intervalo de confiança a 95% : $[38,22; 43,78]$

$$\bar{x} = \frac{38,22 + 43,78}{2} = 41$$

$$\bar{x} + z \times \frac{s}{\sqrt{n}} = 43,78 \Leftrightarrow 41 + 1,960 \times \frac{s}{\sqrt{64}} = 43,78 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1,960 \times \frac{s}{8} = 43,78 - 41 \Leftrightarrow s = \frac{8 \times 2,78}{1,960} \Leftrightarrow s \approx 11$$

4. $n = 30$

Amplitude do intervalo $= 7,158$

$s = 10$

$$\text{Raio do intervalo} = \frac{7,158}{2} = 3,579$$

$$z \times \frac{s}{\sqrt{n} = 3,579} \Leftrightarrow z \times \frac{10}{\sqrt{30}} = 3,579 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{3,579\sqrt{30}}{10} \Leftrightarrow z \approx 1,960$$

Então, o intervalo tem 95% de confiança.

Pág.143

5. $150 - 45 = 105$

$$\hat{p} = \frac{105}{150} = 0,7$$

Nível de confiança: 99% . $z = 2,576$

Intervalo de confiança a 99% :

$$\left[\hat{p} - z \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] =$$

$$= \left[0,7 - 2,576 \times \sqrt{\frac{0,7(1-0,7)}{150}}; \right.$$

$$\left. 0,7 + 2,576 \times \sqrt{\frac{0,7(1-0,7)}{150}}\right] \approx$$

$$\approx [0,604; 0,796]$$

6.1. Amplitude do intervalo $= 0,087\,987$

Número total de clientes

$= 216 + 206 + 108 + 108 + 82 = 720$

$$\hat{p} = \frac{216}{720} = 0,3$$

$$\text{Raio do intervalo} = \frac{0,087\,987}{2} = 0,043\,993\,5$$

$$z \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,043\,993\,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z \times \sqrt{\frac{0,3 \times (1-0,3)}{720}} = 0,043\,993\,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,017\,078z \approx 0,043\,993\,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z \approx \frac{0,043\,993\,5}{0,017\,078} \Leftrightarrow z \approx 2,576$$

O nível de confiança desse intervalo é 99% .

6.2. $\hat{p} = \frac{206 + 82}{720} = 0,4$

Nível de confiança: 95% . $z = 1,960$

Intervalo de confiança a 95% :

$$\left[\bar{p} - z\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}; \bar{p} + z\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\right] =$$

$$= \left[0,4 - 1,960 \times \sqrt{\frac{0,4(1-0,4)}{720}}; \right.$$

$$\left. 0,4 + 1,960 \times \sqrt{\frac{0,4(1-0,4)}{720}}\right] \approx [0,36; 0,44]$$

Pág. 145

3. Margem de erro e confiança

Questão 23

$n = 70$; $\bar{x} = 48,5$; $\sigma = 4,3$

23.1. Nível de confiança: 90% . $z = 1,645$

Intervalo de confiança a 90% :

$$\left[\bar{x} - z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] =$$

$$= \left[48,5 - 1,645 \times \frac{4,3}{\sqrt{70}}; 48,5 + 1,645 \times \frac{4,3}{\sqrt{70}}\right] =$$

$$= [47,7; 49,3]$$

$$E = z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645 \times \frac{4,3}{\sqrt{70}} \approx 0,8$$

O intervalo de confiança a 90% é $[47,7; 49,3]$ e a margem de erro é $E \approx 0,8$.

23.2. $E < 0,5$

$$z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,5 \Leftrightarrow 1,645 \times \frac{4,3}{\sqrt{n}} = 0,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} = \frac{1,645 \times 4,3}{0,5}$$

Então, $n = \left(\frac{1,645 \times 4,3}{0,5}\right)^2 \Leftrightarrow n \approx 200,14$

Para que o erro não seja superior a 0,5 , a amostra deverá ter, pelo menos 201 funcionários.

Pág. 146

Questão 24

Nível de confiança: 99% . $z = 2,576$

$E = 2,5\% = 0,025$

$\hat{p} = 15\% = 0,15$

Então, $n = \left(\frac{z}{E}\right)^2 \times 0,15 \times (1 - 0,15) \approx 1353,7$

Para que a margem de erro máxima seja 2,5 pontos percentuais, devem ser inquiridas, pelo menos, 1354 pessoas .

Questão 25

Nível de confiança: 99% . $z = 2,576$

Amplitude do intervalo de confiança: 0,0998 .

$s = 0,143$

$$E = \frac{0,0998}{2} = 0,0499$$

$$n = \left(\frac{z \times s}{E}\right)^2$$

Então, $n = \left(\frac{2,576 \times 0,143}{0,0499}\right)^2 \approx 54,5$

A dimensão da amostra deverá ser 55.

Pág. 147

Questão 26

$\hat{p} = 0,2$

Nível de confiança: 95% . $z = 1,960$

Amplitude do intervalo de confiança $\leq 0,15$

$$E = \frac{0,15}{2} = 0,075$$

$$n = \left(\frac{z}{E}\right)^2 \times \hat{p} \times (1 - \hat{p})$$

Então, $n = \left(\frac{1,960}{0,075}\right)^2 \times 0,2 \times (1 - 0,2) \approx 109,27$

A dimensão mínima da amostra é 110.

Pág. 148

Tarefas de consolidação 3

1. $n = 50$

Intervalo de confiança: $[24,7; 26,2]$

$s = 2,7$

1.1. $E = \frac{26,2 - 24,7}{2} = 0,75$

1.2. $\bar{x} = \frac{24,7 + 26,2}{2} = 25,45°$

1.3. $E = z \times \frac{s}{\sqrt{n}}$

Então, $z \times \frac{2,7}{\sqrt{50}} = 0,75 \Leftrightarrow z = \frac{0,75\sqrt{50}}{2,7} \Leftrightarrow z \approx 1,96$.

1.4. Significa que, com uma confiança de 95% , se estima que o intervalo $[24,7; 26,2]$ contenha o valor médio da temperatura, em graus Celsius, na Riviera Maya.

1.5. Para obter um intervalo com menor amplitude, podemos aumentar a dimensão da amostra ou diminuir o nível de confiança.

2. $n = 200$

2.1. Nível de confiança: 95%.

$z = 1,960$

$\hat{p} = 0,16 + 0,22 + 0,13 = 0,51$

Intervalo de confiança a 95% :

$$\left[\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] =$$

$$= \left[0,51 - 1,960\sqrt{\frac{0,51(1-0,51)}{200}};\right.$$

$$\left. 0,51 + 1,960\sqrt{\frac{0,51(1-0,51)}{200}}\right] \approx [0,44; 0,58]$$

MMA12DRAC © Porto Editora

2.2. $\hat{p} = 0,15$

Nível de confiança: 99% . $z = 2,576$

Intervalo de confiança a 99% :

$$\left[\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}}; \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}}\right] =$$

$$= \left[0,15 - 2,576\sqrt{\frac{0,15\left(1-0,15\right)}{200}};\right.$$

$$\left. 0,15 + 2,576\sqrt{\frac{0,15\left(1-0,15\right)}{200}}\right] \approx$$

$$\approx \left[0,08; 0,22\right]$$

2.3. $\hat{p} = 0,51$

Nível de confiança: 95% . $z = 1,960$

$E \leq 1\% \Leftrightarrow E \leq 0,01$

$$n = \left(\frac{z}{E}\right)^2 \times p \times \left(1-p\right)$$

Então, $n = \left(\frac{1,960}{0,01}\right)^2 \times 0,51 \times \left(1-0,51\right) = 9600,1584$

Para obter uma margem de erro não superior a 1 ponto percentual, terá que se lançar o dado, pelo menos, 9601 vezes.

Pág. 149

3. $\hat{p} = 0,61$

Nível de confiança: 95% . $z = 1,960$

Amplitude do intervalo de confiança $\leq 0,25$

$$E = \frac{0,25}{2} = 0,125$$

$$n = \left(\frac{z}{E}\right)^2 \times \hat{p} \times \left(1-\hat{p}\right)$$

Então, $n = \left(\frac{1,960}{0,125}\right)^2 \times 0,61 \times \left(1-0,61\right) \approx 58,49$

Para que o intervalo de confiança a 95% tenha uma amplitude máxima de $0,25$, são necessárias, no mínimo, 59 canas-de-açúcar.

4. $\sigma = 15$ segundos

$n = 67$

$\bar{x} = 25$ segundos

4.1. Nível de confiança: 90% . $z = 1,645$

Intervalo de confiança a 90% :

$$\left[\bar{x} - z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] =$$

$$= \left[25 - 1,645 \times \frac{15}{\sqrt{67}}; 25 + 1,645 \times \frac{15}{\sqrt{67}}\right] \approx$$

$$\approx \left[21,99; 28,01\right]$$

Nível de confiança: 99% . $z = 2,576$

Intervalo de confiança a 99% :

$$\left[\bar{x} - z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] =$$

$$= \left[25 - 2,576 \times \frac{15}{\sqrt{67}}; 25 + 2,576 \times \frac{15}{\sqrt{67}}\right] \approx$$

$$\approx \left[20,28; 29,72\right]$$

4.2. Amplitude do intervalo de confiança a 90% :

$28,01 - 21,99 = 6,02$

Amplitude do intervalo de confiança a 99% :

$29,72 - 20,28 = 9,44$

A amplitude do intervalo de confiança de 99% é $9,44$, ou seja, é mais amplo do que o intervalo de 90% , cuja amplitude é $6,02$. Isto é esperado, pois um nível de confiança maior exige um intervalo maior, para garantir uma maior probabilidade de conter o valor médio populacional.

4.3. Margem de erro do intervalo a $90\% = \frac{6,02}{2} = 3,01$

Margem de erro do intervalo a $99\% = \frac{9,44}{2} = 4,72$

A margem de erro para 99% é maior do que para 90% , refletindo uma maior certeza de conter o valor médio.

4.4. Para diminuir a margem de erro para futuras análises, mantendo o nível de confiança em 90% , a empresa pode aumentar o tamanho da amostra (n) ; a fórmula da margem de erro, $E = z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, mostra que existe uma relação inversa entre a raiz quadrada do tamanho da amostra e a margem de erro. Ao aumentar n , o denominador aumenta, diminuindo o valor da fração e, consequentemente, a margem de erro.

Por exemplo, se a empresa aumentar a amostra para 268 elementos (quatro vezes maior), a margem de erro será reduzida para metade (aproximadamente $1,5$ segundos), pois,

$$1,645 \times \frac{15}{\sqrt{268}} \approx 1,645 \times 0,916 \approx 1,5 \text{ segundos .}$$

5. Opção (C)

MMA12DRAC © Porto Editora

Tarefas complementares

Pág. 152

1.1. População: os jovens entre os 9 e os 17 anos, do distrito de Faro.

1.2. O grupo pretende estudar o tempo médio diário, em horas, que os jovens entre os 9 e os 17 anos, do distrito de Faro, passam nas redes sociais.

1.3. Utilizaram a média amostral $\bar{x}$ e o seu valor é 2,5 horas diárias .

2. 12, 14, 16, 18

$\mu = \frac{12+14+16+18}{4} = 15$

I → a)

$\sigma^2 = \frac{(12-15)^2+(14-15)^2+(16-15)^2+(18-15)^2}{4} =$

$= \frac{20}{4} = 5$

$\sigma = \sqrt{5} \approx 2,2361$

II → b)

Amostras de dois elementos com reposição:

$4^2 = 16$

III → b)

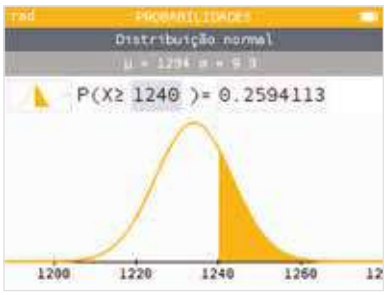
$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \approx 1,5811$

IV → c)

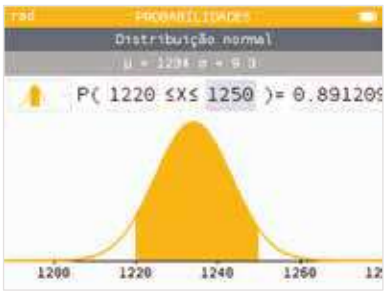
3. $\mu = 1234$; $\sigma = 67$

$\mu_{\bar{X}} = \mu = 1234$; $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{67}{\sqrt{52}} \approx 9,29$

Um ano tem 52 semanas.







	0,89	0,26	0,74	9,29	1234	1,3	0,50
$\mu_{\bar{X}}$							
$\sigma_{\bar{X}}$							
$P(\bar{X} > 1240)$							
$P(\bar{X} < 1234)$							
$P(1220 < \bar{X} < 125$							

Pág. 153

4. $X \sim N(1,79; 0,35)$; amostra de 15 elementos.

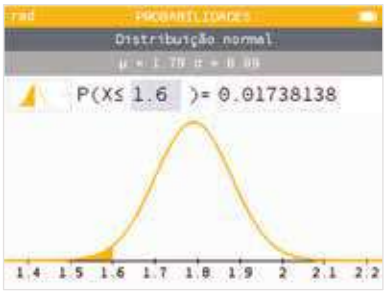
(1) $\mu_{\bar{X}} = \mu = 1,79$

(1) → (E) e (N)

(2) $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,35}{\sqrt{15}} \approx 0,090\,369\,6$

(2) → (D)

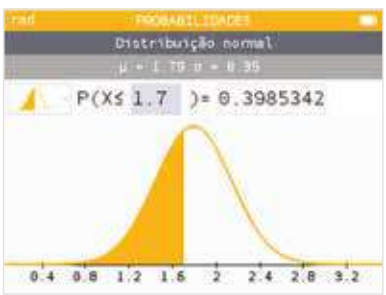
(3)



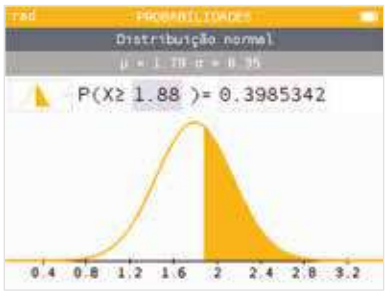
$P(\bar{X} < 1,60) \approx 0,017\,38 \approx 1,7\%$

(3) → (L)

(4)



MMA12DRAC © Porto Editora



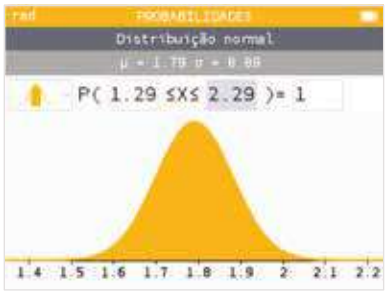
$P(X<1,7)=P(X>1,88)\approx 0,3985\approx 40\%$

$(4)\rightarrow$ (B) e (I)

(5) $\left|\overline{X}-\mu\right|<0,5 \Leftrightarrow \left|\overline{X}-1,79\right|<0,5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0,5<\overline{X}-1,79<0,5 \Leftrightarrow$

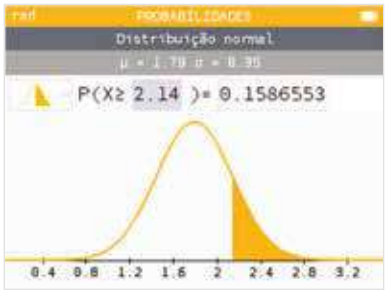
$\Leftrightarrow -0,5+1,79<\overline{X}<0,5+1,79 \Leftrightarrow 1,29<\overline{X}<2,29$



$P\left(1,29<\overline{X}<2,29\right)=1$

$(5)\rightarrow$ (A)

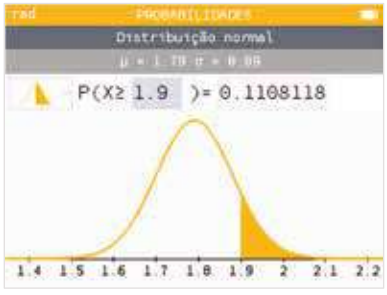
(6)



$P(X>2,14)\approx 0,158\,66\approx 16\%$

$(6)\rightarrow$ (G)

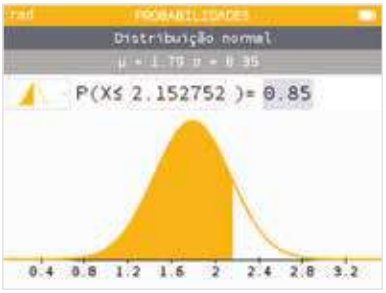
(7)



$P\left(\overline{X}>1,9\right)\approx 0,1108\approx 11\%$

$(7)\rightarrow$ (M)

(8)

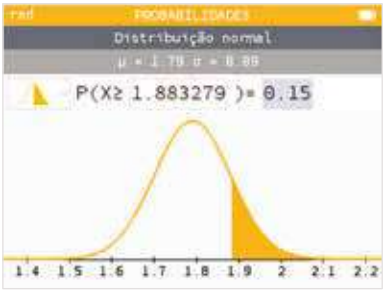


$P(X<2,152\,752)=0,85$

$a\approx 2,15$

$(8)\rightarrow$ (K)

(9)



$P\left(\overline{X}>1,883\,279\right)=0,15$

$b\approx 1,88$

$(9)\rightarrow$ (J)

5. $\mu=4,8$ kg ; $\sigma=0,7$ kg ; $n=49$

5.1. Uma vez que a amostra é suficientemente grande $(n\geq 30)$, pelo Teorema do Limite Central, a distribuição de amostragem da média $\overline{X}$ pode ser aproximadamente Normal com valor médio μ e desvio-padrão $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{0,7}{\sqrt{49}}=0,1$.

Assim, $\overline{X}\sim N(4,8;\,0,1)$.

5.2. **a)** Pretende-se calcular $P\left(\left|\overline{X}-\mu\right|<0,3\right)$

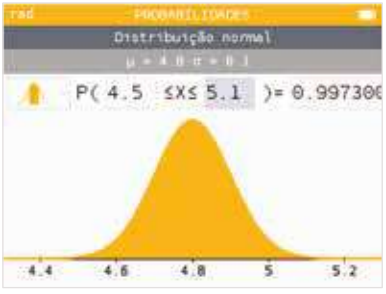
$P\left(\left|\overline{X}-\mu\right|<0,3\right)\Leftrightarrow P\left(-0,3<\overline{X}-\mu<0,3\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(\mu-0,3<\overline{X}<\mu+0,3\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(4,8-0,3<\overline{X}<4,8+0,3\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(4,5<\overline{X}<5,1\right)$

Recorrendo à calculadora gráfica, obtém-se:



MMA12DRAC © Porto Editora

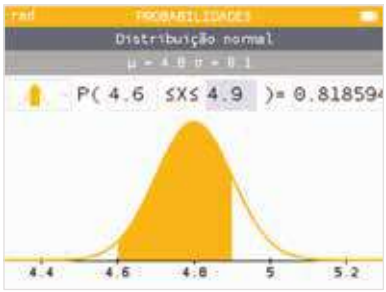
$P\left(4,5 < \overline{X} < 5,1\right) \approx 0,997 = 99,7\% \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| < 0,3\right) \approx 99,7\%$

A probabilidade de a diferença entre a média, $\overline{X}$, e o valor médio, μ, ser inferior a 3 décimas é, aproximadamente, $99,7\%$.

b) $P\left(4,6 \leq \overline{X} \leq 4,9\right) \approx 0,819 = 81,9\%$

A probabilidade de a média estar no intervalo $[4,6;\ 4,9]$ é, aproximadamente, $81,9\%$.



Pág. 155

6. $\mu = 82$; $\sigma = 5$; $n = 15$

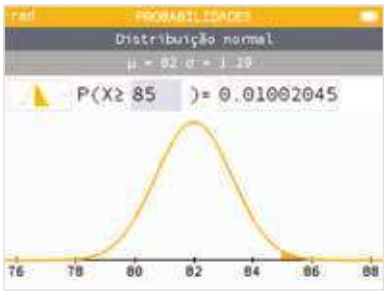
6.1. Pretendemos calcular $P\left(X > 85\right)$.

$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{15}} \approx 1,29$

$\overline{X} \sim N\left(82;\ 1,29\right)$

$P\left(X > 85\right) \approx 0,010\,02 \approx 1\%$



Aproximadamente, 1%.

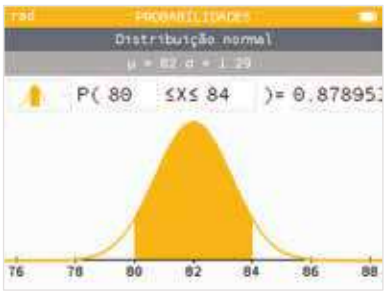
6.2. Pretendemos determinar $P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| < 2\right)$.

$P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| < 2\right) = P\left(\left|\overline{X} - 82\right| < 2\right) =$

$= P\left(-2 < \overline{X} - 82 < 2\right) =$

$= P\left(-2 + 82 < \overline{X} < 2 + 82\right) =$

$= P\left(80 < \overline{X} < 84\right) \approx 0,878\,95 \approx 0,879$



Aproximadamente, 0,879.

7. $\mu = 40$ cm; $\sigma = 7$ cm

Amostra: $n = 65$ plantas

A distribuição de amostragem da média pode ser aproximada por uma distribuição Normal com valor médio 40 cm e desvio-padrão

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{7}{\sqrt{65}} \approx 0,8682 \approx 0,9$ cm

8. Amostra: $n = 40$ microchips

$\mu_{\overline{X}} = \frac{0 \times 12 + 1 \times 10 + 2 \times 8 + 3 \times 6 + 4 \times 4}{40} =$

$= 1,5$ defeitos

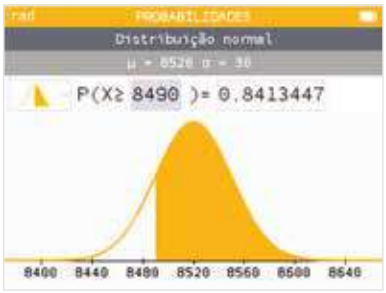
9. $\mu = 8520$

$\sigma = 180$

9.1. $\overline{X} \sim N\left(8520, \frac{180}{\sqrt{36}}\right)$; $\overline{X} \sim N\left(8520, 30\right)$

Espera-se que a distribuição de amostragem da média possa ser aproximada por uma distribuição Normal com valor médio 8520 e desvio-padrão 30.

9.2. Pretendemos calcular $P\left(\overline{X} > 8490\right)$.



$P\left(\overline{X} > 8490\right) \approx 0,84134 \approx 84,13\%$

MMA12DRAC © Porto Editora

MMA12DRAC © Porto Editora

Pág. 158

15.1. Número de parafusos produzidos semanalmente:

$n = 1234$

Média de parafusos com defeito:

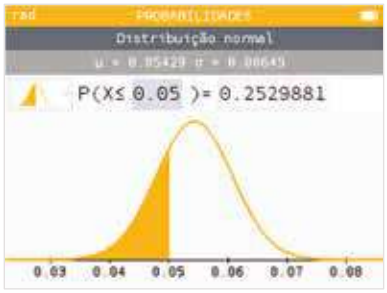
$\hat{p} = \frac{19}{350} \approx 0,054\,29$

$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} =$

$= \sqrt{\frac{0,054\,29(1-0,054\,29)}{1234}} \approx 0,066\,45$

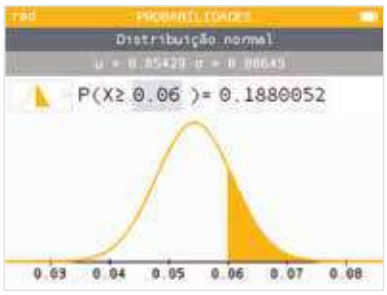
$\hat{p} \sim N(0,054\,29;\ 0,006\,45)$

15.2. a) Pretende-se calcular $P(\hat{p} < 0,05)$.



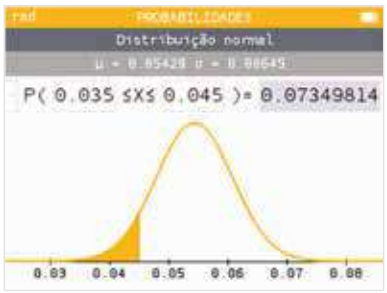
$P(\hat{p} < 0,05) \approx 0,252\,99 \approx 25,299\%$

b) Pretende-se calcular $P(\hat{p} > 0,06)$.



$P(\hat{p} > 0,06) \approx 0,188\,01 \approx 18,801\%$

c) Pretende-se calcular $P(0,035 < \hat{p} < 0,045)$



$P(0,035 < \hat{p} < 0,045) \approx 0,073\,50 \approx 7,350\%$

15.3. $\hat{p} \approx 0,05429$

$\sigma_{\hat{p}} = 0,00645$

$\hat{p} \sim N(0,054\,29;\ 0,006\,45)$

Pretendemos calcular n tal que:

$P(\hat{p} < 3\%) = 0,1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \frac{\hat{p} - 0,054\,29}{\sqrt{\frac{0,054\,29(1-0,054\,29)}{n}}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \frac{\hat{p} - 0,054\,29}{\frac{0,226\,59}{\sqrt{n}}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{0,226\,59}{\sqrt{n}} z = \hat{p} - 0,054\,29 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \hat{p} = \frac{0,226\,59z}{\sqrt{n}} + 0,054\,29$

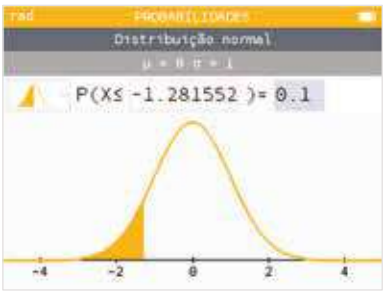
$P(\hat{p} < 0,03) = 0,1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{0,226\,59z}{\sqrt{n}} + 0,054\,29 < 0,03\right) = 0,1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{0,226\,59z}{\sqrt{n}} < -0,024\,29\right) = 0,1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(z < \frac{-0,024\,29\sqrt{n}}{0,226\,59}\right) = 0,1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(z < -0,107\,20\sqrt{n}) = 0,1$



$-0,107\,20\sqrt{n} = -1,28155 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{n} = \frac{-1,28155}{-0,107\,20} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{n} \approx 11,954\,76 \Leftrightarrow n \approx 142,916\,29$

A dimensão da amostra é 143.

Pág.156

10. $X \sim N(\mu, 9)$

$n = 20$

10.1. $\bar{x} = \dfrac{100 + 98 \times 2 + 78 \times 2 + 81 + 69 \times 2 + 83}{20} +$

$+ \dfrac{77 + 71 + 86 + 99 + 89 \times 2 + 64 + 82 + 85 + 92 + 96}{20} =$

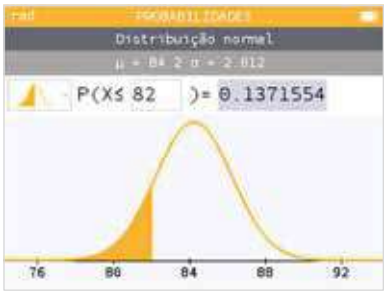
$= 84,2$

10.2. $\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{9}{\sqrt{20}}\right) \Leftrightarrow \overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{9\sqrt{5}}{10}\right)$

10.3. Pretende-se determinar $P\left(\overline{X} < 82\right)$ e sabe-se que

$\overline{X} \sim \left(84,2;\ \dfrac{9\sqrt{5}}{10}\right)$





Então, $P\left(\overline{X} < 82\right) \approx 14\%$.

10.4. Nível de confiança: 90% .

$z = 1,645$

Intervalo de confiança:

$\left[84,2 - 1,645 \times \dfrac{9}{\sqrt{20}};\ 84,2 + 1,645 \times \dfrac{9}{\sqrt{20}}\right] \approx$

$\approx [80,9;\ 87,5]$

10.5. Com confiança de 90% , estima-se que o intervalo $[80,9;\ 87,5]$ contenha o valor médio dos pontos.

11. $n = 40$; $\bar{x} = 17,2$; $s = 7,5$

11.1. Nível de confiança: 90% .

$z = 1,645$

Intervalo de confiança a 90% :

$\left[\bar{x} - z \times \dfrac{s}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z \times \dfrac{s}{\sqrt{n}}\right] =$

$= \left[17,2 - 1,645 \times \dfrac{7,5}{\sqrt{40}};\ 17,2 + 1,645 \times \dfrac{7,5}{\sqrt{40}}\right] \approx$

$\approx [15,2;\ 19,2]$

Nível de confiança: 99% .

$z = 2,576$

Intervalo de confiança a 99% :

$\left[\bar{x} - z \times \dfrac{s}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z \times \dfrac{s}{\sqrt{n}}\right] =$

$= \left[17,2 - 2,576 \times \dfrac{7,5}{\sqrt{40}};\ 17,2 + 2,576 \times \dfrac{7,5}{\sqrt{40}}\right] \approx$

$\approx [14,1;\ 20,3]$

11.2. Amplitude do intervalo a $90\% = 19,2 - 15,2 = 4$

Amplitude do intervalo a $99\% = 20,3 - 14,1 = 6,2$

Ao aumentar o nível de confiança, de 90% para 99% , a amplitude do respetivo intervalo de confiança também aumenta.

Pág. 157

12. $n = 33$; $\bar{x} = 15,7$; $s = 6,5$

12.1. Nível de confiança: 95% . $z = 1,960$.

Intervalo de confiança a 95% :

$\left[\bar{x} - z \times \dfrac{s}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z \times \dfrac{s}{\sqrt{n}}\right] =$

$= \left[15,7 - 1,960 \times \dfrac{6,5}{\sqrt{33}};\ 15,7 + 1,960 \times \dfrac{6,5}{\sqrt{33}}\right] \approx$

$\approx [13,5;\ 17,9]$

Nível de confiança: 99% . $z = 2,576$

Intervalo de confiança a 99% :

$\left[\bar{x} - z \times \dfrac{s}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z \times \dfrac{s}{\sqrt{n}}\right] =$

$= \left[15,7 - 2,576 \times \dfrac{6,5}{\sqrt{33}};\ 15,7 + 2,576 \times \dfrac{6,5}{\sqrt{33}}\right] \approx$

$\approx [12,8;\ 18,6]$

12.2. Amplitude do intervalo a $95\% = 17,9 - 13,5 = 4,4$

Amplitude do intervalo a $99\% = 18,6 - 12,8 = 5,8$

Ao aumentar o nível de confiança de 95% para 99% , a amplitude do intervalo também aumenta.

MMA12DRAC © Porto Editora

13. $n = 55$

Intervalo de confiança a 90% : $[3119,04;\ 3276,96]$

$$\bar{x} = \frac{3119,04 + 3276,96}{2} = 3198$$

Nível de confiança: 90% . $z = 1,645$

$$\bar{x} + z \times \frac{s}{\sqrt{n}} = 3276,96 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3198 + 1,645 \times \frac{s}{\sqrt{55}} = 3276,96 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1,645 \times \frac{s}{\sqrt{55}} = 78,96 \Leftrightarrow s = \frac{78,96 \times \sqrt{55}}{1,645} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s \approx 356$$

Pág. 158

14.1.

Sexo \ Idade	Menos de 18 anos	Entre 18 e 60 anos	Mais de 60 anos	Total
Masculino	25%	15%	15%	55%
Feminino	10%	30%	5%	45%
Total	35%	45%	20%	100%

$100\% - 35\% - 20\% = 45\%$
$100\% - 45\% = 55\%$
$20\% - 15\% = 5\%$
$45\% - 30\% = 15\%$
$45\% - 30\% - 5\% = 10\%$
$35\% - 10\% = 25\%$

14.2. Sejam M e D os acontecimentos assim definidos:

M : "O indivíduo é do sexo masculino."

D : "O indivíduo tem menos de 18 anos."

Pretende-se determinar

$$P(M \mid D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{25\%}{35\%} = \frac{5}{7}$$

14.3. $n = 600$

Nível de confiança: 90% . $z = 1,645$

$\hat{p} = 0,2$

Intervalo de confiança a 90% :

$$\left[\hat{p} - z \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}};\ \hat{p} + z \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] =$$

$$= \left[0,2 - 1,645 \times \sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{600}};\right.$$

$$\left. 0,2 + 1,645 \times \sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{600}}\right] \approx [0,17;\ 0,23]$$

Pág. 158

15.1. Número de parafusos produzidos semanalmente:

$n = 1234$

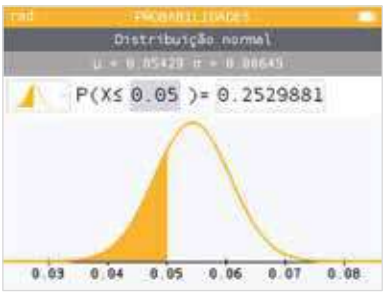
Média de parafusos com defeito:

$$\hat{p} = \frac{19}{350} \approx 0,054\,29$$

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0,054\,29(1-0,054\,29)}{1234}} \approx 0,066\,45$$

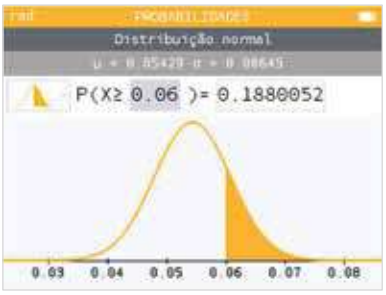
$$\hat{p} \sim N(0,054\,29;\ 0,006\,45)$$

15.2. a) Pretende-se calcular $P(\hat{p} < 0,05)$.



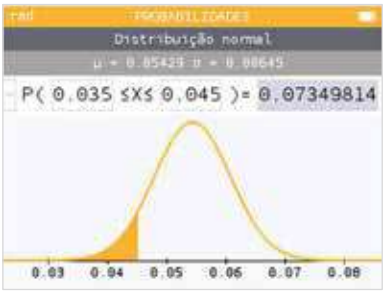
$P(\hat{p} < 0,05) \approx 0,252\,99 \approx 25,299\%$

b) Pretende-se calcular $P(\hat{p} > 0,06)$.



$P(\hat{p} > 0,06) \approx 0,188\,01 \approx 18,801\%$

c) Pretende-se calcular $P(0,035 < \hat{p} < 0,045)$



$P(0,035 < \hat{p} < 0,045) \approx 0,073\,50 \approx 7,350\%$

15.3. $\hat{p} \approx 0,05429$

$\sigma_{\hat{p}} = 0,00645$

$\hat{p} \sim N(0,054\,29;\ 0,006\,45)$

MMA12DRAC © Porto Editora

Pretendemos calcular n tal que:

$P\left(\hat{p} < 3\%\right) = 0,1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{\hat{p} - 0,054\,29}{\sqrt{\dfrac{0,054\,29\left(1 - 0,054\,29\right)}{n}}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{\hat{p} - 0,054\,29}{\dfrac{0,226\,59}{\sqrt{n}}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{0,226\,59}{\sqrt{n}} z = \hat{p} - 0,054\,29 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \hat{p} = \dfrac{0,226\,59z}{\sqrt{n}} + 0,054\,29$

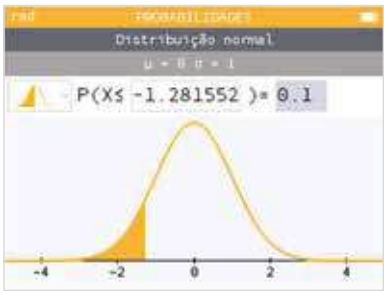
$P\left(\hat{p} < 0,03\right) = 0,1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(\dfrac{0,226\,59z}{\sqrt{n}} + 0,054\,29 < 0,03\right) = 0,1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(\dfrac{0,226\,59z}{\sqrt{n}} < -0,024\,29\right) = 0,1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(z < \dfrac{-0,024\,29\sqrt{n}}{0,226\,59}\right) = 0,1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(z < -0,107\,20\sqrt{n}\right) = 0,1$



$-0,107\,20\sqrt{n} = -1,28155 \Leftrightarrow \sqrt{n} = \dfrac{-1,28155}{-0,107\,20} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{n} \approx 11,954\,76 \Leftrightarrow n \approx 142,916\,29$

A dimensão da amostra é 143.

Pág. 159

16. $n = 40$

Intervalo de confiança: $[7,04;\ 7,56]$

$s = 1,0$ kg

16.1. $E = \dfrac{7,56 - 7,04}{2} = \dfrac{0,52}{2} = 0,26$

16.2. $\bar{x} = \dfrac{7,56 + 7,04}{2} = \dfrac{14,6}{2} = 7,3$ kg

16.3. $\bar{x} + z \times \dfrac{s}{\sqrt{n}} = 7,56 \Leftrightarrow 7,3 + z \times \dfrac{1,0}{\sqrt{40}} = 7,56 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z \times \dfrac{1,0}{\sqrt{40}} = 0,26 \Leftrightarrow z = \dfrac{0,26\sqrt{40}}{1,0} \approx 1,644$

Como $z \approx 1,644$, o nível de confiança é aproximadamente 90%.

16.4. Com uma confiança muito próxima de 90%, o peso das mochilas dos alunos, está entre 7,04 kg e 7,56 kg.

16.5. Para se obter um intervalo com menor amplitude, pode diminuir-se o nível de confiança ou aumentar a dimensão da amostra.

17. $n = 289$

Intervalo de confiança a $99\% = [45, 57]$

Amplitude do intervalo de confiança $= 57 - 45 = 12$

$\text{I} \rightarrow \text{c)}$

Margem de erro $= \dfrac{12}{2} = 6$

$\text{II} \rightarrow \text{a)}$

$\bar{x} = \dfrac{45 + 57}{2} = 51$

$\text{III} \rightarrow \text{b)}$

Nível de confiança: 99%. $z = 2,576$

$x + z \times \dfrac{s}{\sqrt{n}} = 57 \Leftrightarrow 51 + 2,576 \times \dfrac{s}{\sqrt{289}} = 57 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2,576 \times \dfrac{s}{17} = 57 - 51 \Leftrightarrow s = \dfrac{6 \times 17}{2,576} \Leftrightarrow s \approx 39,596$

$\text{IV} \rightarrow \text{a)}$

18.1. Se selecionarmos aleatoriamente várias amostras com a mesma dimensão e construirmos os intervalos de confiança respetivos, cerca de 99% desses intervalos irão conter o parâmetro a estimar (o restante 1% não o conterá). O intervalo $[0,28;\ 0,40]$ é um intervalo de confiança de 99% para a proporção de empresários que considera que a estabilidade do emprego no setor se manteve no último ano.

O que se espera é que este intervalo seja um dos 99% que contém a proporção que se pretende estimar.

18.2. $E = \dfrac{40 - 28}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

A margem de erro é 6 pontos percentuais.

Pág. 160

19. $n = 100$

Intervalo de confiança: $[1,4902;\ 1,5098]$

$\sigma = 0,05$

$E = \dfrac{1,5098 - 1,4902}{2} = \dfrac{0,0196}{2} = 0,0098$

$\bar{x} = \dfrac{1,4902 + 1,5098}{2} = \dfrac{3}{2} = 1,5$

$\bar{x} + z \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,5098 \Leftrightarrow 1,5 + z \times \dfrac{0,05}{\sqrt{100}} = 1,5098 \Leftrightarrow$

MMA12DRAC © Porto Editora

$\Leftrightarrow z \times \frac{0,05}{10} = 0,0098 \Leftrightarrow z = \frac{0,0098 \times 10}{0,05} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 1,96$ Nível de confiança: 95%

A margem de erro do intervalo de confiança é igual a $0,0098$ metro (quatro casas decimais).

A média amostral é $1,5$ metro (uma casa decimal).

O nível de confiança utilizado para construir este intervalo é 95% .

20.1. Mantendo o nível de confiança, se a dimensão da amostra aumenta, a margem de erro diminui.

20.2. Mantendo a dimensão da amostra, se o nível de confiança aumenta, a margem de erro também aumenta.

20.3. Se o desvio-padrão aumenta, a margem de erro também aumenta.

Pág. 161

21. $X \sim N(\mu; 0,05)$;

$n = 14$;

$\bar{x} = 2,26$

21.1. Nível de confiança: 95%.

$z = 1,960$

Intervalo de confiança a 95%:

$\left[\bar{x} - z \times \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z \times \frac{s}{\sqrt{n}}\right] =$

$= \left[2,26 - 1,960 \times \frac{0,05}{\sqrt{14}}; 2,26 + 1,960 \times \frac{0,05}{\sqrt{14}}\right] \approx$

$\approx [2,23; 2,29]$

Isto significa que, com uma confiança de 95%, estima-se que o intervalo $[2,23; 2,29]$ contenha o valor médio dos tempos, em minutos, de todas as atletas da classe S10.

21.2. $E = z \times \frac{s}{\sqrt{n}}$

Nível de confiança: 99%. $z = 2,576$

$E < 0,1 \Leftrightarrow 2,576 \times \frac{0,05}{\sqrt{n}} < 0,1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,1288 < 0,1\sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{0,1288}{0,1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{n} > 1,288 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n > 1,658\,944$

Para que o erro associado seja inferior a $0,1$, a amostra terá de ter um mínimo de 2 atletas.

21.3. Um tamanho amostral de 2 atletas é extremamente baixo e não recomendável para estudos estatísticos, pois pode não representar adequadamente a população. Mesmo que o cálculo indique 2, um tamanho amostral maior seria mais apropriado para garantir a fiabilidade da estimativa.

22. $\sigma = 0,8$; $n = 100$; $\bar{x} = 15,2$

22.1. $\overline{X} \sim N\left(\bar{x}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Leftrightarrow \overline{X} \sim N\left(15,2; \frac{0,8}{\sqrt{100}}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{X} \sim N(15,2; 0,08)$

22.2. Nível de confiança: 99% . $z = 2,576$

Intervalo de confiança a 99% :

$\left[\bar{x} - z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] =$

$= \left[15,2 - 2,576 \times \frac{0,8}{\sqrt{100}}; 15,2 + 2,576 \times \frac{0,8}{\sqrt{100}}\right] \approx$

$\approx [14,99; 15,41]$

$E = \frac{15,41 - 14,99}{2} = \frac{0,42}{2} = 0,21$ °C

O intervalo de confiança a 99% é $[14,99; 15,41]$ e a margem de erro é $0,21$ °C .

22.3. Aumentando a dimensão da amostra, diminui a margem de erro.

Sejam E_1 e E_2 as margens de erro de dois intervalos com o mesmo nível de confiança.

Pretende-se que $E_2 = \frac{E_1}{2}$:

$E_1 = z \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$

$E_2 = \frac{E_1}{2} \Leftrightarrow z \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}} = \frac{z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{2} \Leftrightarrow \frac{z\sigma}{\sqrt{n_2}} = \frac{z\sigma}{2\sqrt{n_1}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{n_2} = 2\sqrt{n_1} \underset{(n_1, n_2 > 0)}{\Leftrightarrow} \left(\sqrt{n_2}\right)^2 = \left(2\sqrt{n_1}\right)^2 \Leftrightarrow$

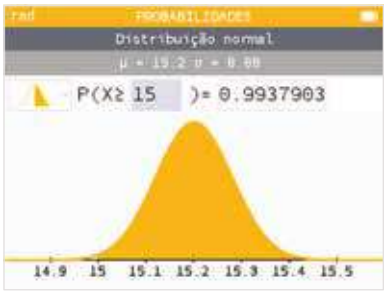
$\Leftrightarrow n_2 = 4n_1$

Se quisermos reduzir a margem de erro para metade, podemos aumentar a dimensão da amostra para o quádruplo.

22.4. Pretende-se determinar $P\left(\overline{X} > 15\right)$



MMA12DRAC © Porto Editora



$P\left(\overline{X} > 15\right) \approx 0,9938 = 99,38\%$

23. $n = 196$;

$\overline{x} = 42$;

$s = 8,4$

Nível de confiança: 95% . $z = 1,960$

$E = z \times \frac{s}{\sqrt{n}} = 1,960 \times \frac{8,4}{\sqrt{196}} = 1,176 \approx 1,18$

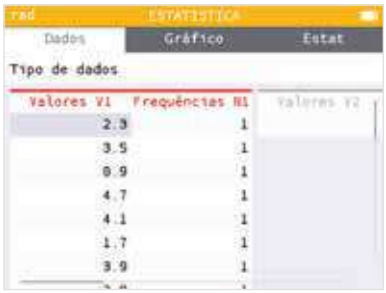
A margem de erro de um intervalo de confiança de 95% para o tempo médio diário de deslocação dos estudantes que utilizam transportes públicos é 1,18 minutos .

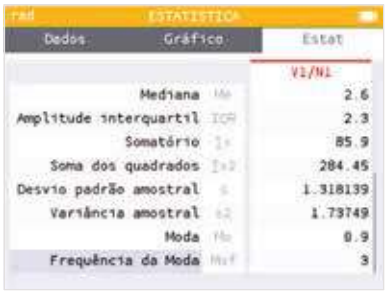
Avaliação global

Pág. 162

1.1. I → b)

II → a)





III → b)



$\overline{x} \approx 2,6844$

$0,6844 \times 60 \approx 41$ min

$x = 2$ h 41 min

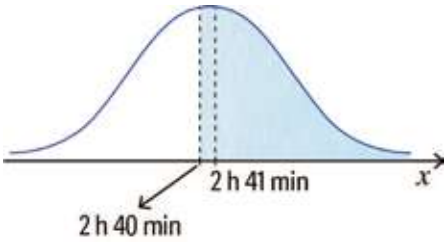
IV → c)

1.2. $\overline{X} \sim N\left(\overline{x}, \frac{s}{\sqrt{n}}\right) \Leftrightarrow \overline{X} \sim \left(2,7; \frac{1,3}{\sqrt{32}}\right)$

Opção (B)

1.3. $P\left(X > 2 \text{ h } 40 \text{ min}\right) > P\left(X > \mu\right)$

A probabilidade de o aluno usar as redes sociais mais de 2 h 40 min é muito próxima da probabilidade de as usar mais de 2 h 40 min (μ), mas é superior a esta.



Opção (C)

Pág. 163

2. $p = 0,17$

$n = 478$

2.1. Valor médio: $p = 0,17$

Desvio-padrão: $\sqrt{\frac{0,17\left(1-0,17\right)}{478}} \approx 0,0172$

$\hat{p} \sim N\left(0,17; 0,0172\right)$

2.2. Nível de confiança: 95% . $z = 1,960$

Intervalo de confiança a 95% :

$$\left[\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}}; \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}}\right] =$$

$$= \left[0,17 - 1,960\sqrt{\frac{0,17\left(1-0,17\right)}{478}};\right.$$

MMA12DRAC © Porto Editora

MMA12DRAC © Porto Editora

$$0,17+1,960\sqrt{\frac{0,17(1-0,17)}{478}}\Bigg]\approx$$

$$\approx[0,136;\ 0,204]=[13,6\%;\ 20,4\%]$$

2.3. Significa, se repetíssemos o processo de amostragem (selecionando escolas semelhantes) muitas vezes e calculássemos o intervalo de confiança para cada amostra, 95% desses intervalos conteriam a verdadeira proporção de alunos praticantes de desporto competitivo na escola.

2.4. $E=\frac{20,4-13,6}{2}=\frac{6,8}{2}=3,4$

Significa que a estimativa da proporção de alunos praticantes de desporto competitivo na escola tem uma precisão de $\pm 3,4\%$.

3. $n=1200$

$\hat{p}=\frac{480}{1200}$

3.1. Nível de confiança: 95% . $z=1,960$

$\hat{p}=0,4$

Intervalo de confiança a 95% :

$$\left[\hat{p}-z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}};\ \hat{p}+z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\overline{p})}{n}}\right]=$$

$$=\left[0,4-1,960\sqrt{\frac{0,4(1-0,4)}{1200}};\right.$$

$$\left.0,4+1,960\sqrt{\frac{0,4(1-0,4)}{1200}}\right]\approx$$

$$\approx[0,372;\ 0,428]$$

3.2. $E=\frac{0,054122}{2}=0,027061=2,7061\%$

4. $n=40$

Intervalo de confiança a 95% : $[432,120;\ 447,880]$

$\overline{x}=\frac{432,120+447,880}{2}=440\ €$

$z=1,960$

$$\overline{x}+z\times\frac{s}{\sqrt{n}}=447,880\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 440+1,960\times\frac{s}{\sqrt{40}}=447,880\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1,960\times\frac{s}{\sqrt{40}}=7,880\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s=\frac{7,880\sqrt{40}}{1,960}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow s\approx 25\ €$

A média é 440 € e o desvio-padrão é, aproximadamente, 25 €.

Máximo On

Pág. 164

Tarefa 1 – Aproximação de um integral definido com recurso ao Python

1. O programa usa, em cada subintervalo, o ponto

$x_k = a + k \times dt + \frac{dt}{2}$

ou seja, o ponto médio de cada subintervalo.
No esquema da Beatriz, os retângulos têm a altura calculada no extremo direito de cada subintervalo e não no ponto médio.
A Beatriz usou retângulos com a altura no extremo direito, não no ponto médio.

2. O valor aproximado é $37,33$.

```
Com N = 4 o integral aproximado dá: 37.32615495599513
```

3.

```
Com N = 40 o integral aproximado dá: 38.28026612079315
Com N = 80 o integral aproximado dá: 38.28768416149091
Com N = 160 o integral aproximado dá: 38.28953916220591
Com N = 320 o integral aproximado dá: 38.29000294308914
Com N = 640 o integral aproximado dá: 38.29011889022974
Com N = 1280 o integral aproximado dá: 38.290147877134864
Com N = 2560 o integral aproximado dá: 38.290155123868644
Com N = 5120 o integral aproximado dá: 38.29015693555258
Com N = 10240 o integral aproximado dá: 38.29015738847346
Com N = 20480 o integral aproximado dá: 38.29015750170366
```

À medida que o número de subintervalos aumenta, o valor obtido aproxima-se do valor real do integral em estudo, que é aproximadamente $38,290\,158$.

Pág. 165

Tarefa 2 – Intervalos de confiança com simulação em Python

1. A variável num_amostras representa o número de amostras que vão ser geradas e usadas para construir intervalos de confiança.
A variável dim_amostra representa o número de valores de cada amostra, ou seja, o tamanho de cada amostra gerada da distribuição normal $N(0, 1)$.

2. O parâmetro que se pretende estimar é a média verdadeira da população de onde provêm os dados.
Como os valores são gerados segundo uma distribuição normal $N(0, 1)$, a média real é $\mu = 0$.

4. Como cada intervalo de confiança é construído com 95% de confiança, não é garantido que todos contenham o valor real $\mu = 0$.
Ao executar o programa, verifica-se normalmente que a maioria dos intervalos contém o 0, mas nem todos, o que é coerente com o nível de confiança de 95%.

MMA12DRAC © Porto Editora

MMA12DRAC © Porto Editora

5.1. Por exemplo:

```
import random
import statistics
import math

num_amostras = 100
dim_amostra = 20
conta = 0

for i in range(num_amostras):
    amostra = [random.normalvariate(0, 1) for k in range(dim_amostra)]
    vmedio = statistics.mean(amostra)
    desvio_padrao = statistics.stdev(amostra)
    d = 1.96 * desvio_padrao / math.sqrt(dim_amostra)
    print('O intervalo de 95% de confiança para o valor médio é [', vmedio - d, ',', vmedio + d, ']')
    if vmedio - d<= 0 <= vmedio + d:
      conta = conta+1

print("A proporção de intervalos é",conta/num_amostras)
```

...

```
O intervalo de 95% de confiança para o valor médio é [ -0.30814142642122305 , 0.674380347891161 ]
O intervalo de 95% de confiança para o valor médio é [ -0.7500873001505581 , 0.3183262130928881 ]
A proporção de intervalos é 0.92
```

5.2. Por exemplo:

...

```
O intervalo de 95% de confiança para o valor médio é [ -0.42930816990074516 , 0.5846440170261299 ]
O intervalo de 95% de confiança para o valor médio é [ -0.06708943175515109 , 0.63939841567125 ]
A proporção de intervalos é 0.9326
```

Aumentando num_amostras para 5000 , a proporção obtida aproxima-se muito mais do valor teórico esperado que é $0{,}95$.

5.3. Se o nível de confiança aumentar para 99% , o intervalo de confiança fica mais largo.
Quanto mais largo for o intervalo, maior é a probabilidade de conter o valor real.
Por isso, espera-se que a nova proporção obtida esteja próxima de $0{,}99$.
Ao modificar o programa para usar o valor crítico correspondente a 99% ($2{,}576$) e executá-lo, obtém-se, por exemplo:

```
import random
import statistics
import math

num_amostras = 5000
dim_amostra = 20
conta = 0

for i in range(num_amostras):
    amostra = [random.normalvariate(0, 1) for k in range(dim_amostra)]
    vmedio = statistics.mean(amostra)
    desvio_padrao = statistics.stdev(amostra)
    d = 2.576 * desvio_padrao / math.sqrt(dim_amostra)
    print('O intervalo de 99% de confiança para o valor médio é [', vmedio - d, ',', vmedio + d, ']')
    if vmedio - d<= 0 <= vmedio + d:
      conta = conta+1

print("A proporção de intervalos é",conta/num_amostras)
```

...

```
O intervalo de 99% de confiança para o valor médio é [ -0.9328944029343001 , 0.2671795017197024 ]
O intervalo de 99% de confiança para o valor médio é [ -0.6155778547352713 , 0.9640385559717615 ]
A proporção de intervalos é 0.98
```

confirmando a conjetura.