Matrizes

Pág. 53

Tarefa de revisão

1.1. Venderam-se em cone com duas bolas 32 gelados.
1.2. Com 3 bolas foram servidos 18 gelados em cone e 20 em copo, fazendo um total de 38 gelados.
1.3. Representa que foram vendidos 20 gelados em copo, com 3 bolas.

2.1. Seja A' o transformado de A numa homotetia de centro O e raio 2.

$A'(4,4)$

2.2. Seja A' o transformado de A pela rotação de centro O e raio $\frac{\pi}{2}$.

$A'(-2,2)$

2.3. Seja A' o transformado de A pela translação associada ao vetor $\vec{v}(-1,2)$.

$A'(1,4)$

3. $360° : 12 = 30°$
Cada setor circular tem amplitude $30°$.

3.1. $E\hat{O}F = 30°$

3.2. **a)** G
b) $[JOI]$

1. Matrizes: conceito

Pág. 54

Tarefa 1

1. No ano de 2024, no curso de engenharia aeroespacial, foram colocados na universidade B 30 estudantes na 1.ª fase. Nesse mesmo ano, no curso de medicina, foram colocados 232 estudantes na universidade C.

2. $N = \begin{bmatrix} 37 & 50 & 150 \\ 40 & 31 & 122 \\ 50 & 135 & 231 \end{bmatrix}$

3. 40 alunos na 1.ª fase em 2024
40 alunos na 1.ª fase em 2025
Total $= 40 + 40 = 80$
Foram colocados 80 alunos na 1.ª fase dos dois anos.

4. $M + N = \begin{bmatrix} 37+37 & 45+50 & 155+150 \\ 40+40 & 30+31 & 122+122 \\ 67+50 & 135+135 & 232+231 \end{bmatrix}$

$M + N = \begin{bmatrix} 74 & 95 & 305 \\ 80 & 61 & 244 \\ 117 & 270 & 463 \end{bmatrix}$

5.

$M - N = \begin{bmatrix} 37-37 & 50-45 & 150-155 \\ 40-40 & 31-30 & 122-122 \\ 50-67 & 135-135 & 231-232 \end{bmatrix}$

$N - M = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -17 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Permite analisar a variação, em número absoluto, de estudantes colocados na 1.ª fase entre 2025 e 2024, nas três universidades.

Pág. 56

Questão 1

1.1.

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ A / B / C

em que a primeira coluna é referente à natação, a segunda coluna ao andebol, a terceira coluna ao futsal e a quarta coluna ao voleibol.

1.2. **a)** $a_{23} = 6$ → Significa que 6 alunos da turma B praticam futsal.

b) $a_{34} = 2$ → Significa que 2 alunos da turma C praticam voleibol.

c) $a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} = 5 + 1 + 6 + 2 = 14$ → Significa que 14 alunos da turma B se inscreveram no desporto escolar, nas diferentes modalidades.

d) $a_{12} + a_{22} + a_{32} = 4 + 1 + 5 = 10$ → Significa que 10 alunos das diferentes turmas, A, B e C, se inscreveram em andebol.

Pág. 59

Questão 2

2.1.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2.2.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.3.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, por exemplo.

MMA12DRAC © Porto Editora

2.4.

$A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, por exemplo.

2.5.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ C.A. $\left| \begin{array}{l} a_{21} = 2+1 = 3 \\ a_{31} = 3+1 = 4 \\ a_{32} = 3+2 = 5 \end{array} \right.$

Pág. 60

Tarefa 2

1. $a_{21} = 3 \rightarrow$ representa que 300 pessoas utilizaram a linha amarela do metro no segundo dia de manhã.
$b_{13} = 8 \rightarrow$ representa que 800 pessoas utilizaram a linha verde do metro no primeiro dia à noite.

2.1. A soma de duas matrizes é uma matriz que resulta da soma dos elementos das duas matrizes que ocupam a mesma posição.

2.2. Houve maior número de passageiros na linha amarela no período da noite.

3.

$$B + A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 4 & 15 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix} = A + B$$

4.1. Não, porque as matrizes A e C não têm a mesma dimensão.

4.3. A soma de matrizes pode ser feita quando estas têm a mesma dimensão.

Pág. 61

Questão 4

4.1. É impossível obter $A + B$ porque as duas matrizes não têm a mesma dimensão. A dimensão de A é 2×2 e a dimensão de B é 3×2.

4.2.

$$B + C = \begin{bmatrix} 5+c & 1+(-2) & b+(-1) \\ 0+0 & a+0 & -2+d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+c & -1 & b-1 \\ 0 & a & -2+d \end{bmatrix}$$

Como $B + C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, então

$5 + c = 2 \wedge b - 1 = 1 \wedge a = -1 \wedge -2 + d = 1$

Ou seja,

$c = -3 \wedge b = 2 \wedge a = -1 \wedge d = 3$

$a = -1, b = 2, c = -3$ e $d = 3$

Pág. 63

Questão 5

5.1. $M + N = \begin{bmatrix} 30+20 & 20+30 & 9+7 & 12+6 \\ 12+15 & 25+19 & 2+4 & 17+8 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 50 & 50 & 16 & 18 \\ 27 & 44 & 6 & 25 \end{bmatrix}$$

Para a loja A, a maçã mais fornecida foi a caixa de tamanho pequeno da Fuji e da Gala. Para a loja B, a maçã que foi mais fornecida foi a caixa de tamanho pequeno da Maçã Gala.

5.2. Loja A, 1.º Dia: $30 + 20 = 50$

2.º Dia: $20 + 30 = 50$

Total: $50 + 50 = 100$

Loja B, 1.º Dia: $12 + 25 = 100$

2.º Dia: $15 + 19 = 34$

Total $= 37 + 34 = 71$

O produtor forneceu 100 caixas de tamanho pequeno à loja A e 71 caixas de tamanho pequeno à loja B.

5.3. Para as lojas A e B, a qualidade mais fornecida foi a Gala.

Pág. 63

Questão 6

6.1. Para que $A + E = 0$, $E = -A$; $E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

6.2. a) $C + D = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B + (C + D) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -10 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -10 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $B + C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -10 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B + C - D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & -10 & -1 \end{bmatrix}$$

Pág. 64

Tarefa 3

1. $0{,}80 \times 200$ € $\rightarrow$ representa o preço em saldo de umas sapatilhas *outdoor* na loja B cujo preço original era de 200 €.

MMA12DRAC © Porto Editora

2. Sapatilhas de futebol:

Loja A: $0{,}80 \times 80 = 64$ €

Loja B: $0{,}80 \times 120 = 96$ €

Loja C: $0{,}80 \times 90 = 72$ €

Loja D: $0{,}80 \times 220 = 176$ €

$\begin{bmatrix} 64 & 96 & 72 & 176 \end{bmatrix}$

3.

$$\begin{bmatrix} 64 & 96 & 72 & 176 \\ 0{,}8\times 90 & 0{,}8\times 180 & 0{,}8\times 75 & 0{,}8\times 190 \\ 0{,}8\times 75 & 0{,}8\times 200 & 0{,}8\times 65 & 0{,}8\times 130 \\ 0{,}8\times 100 & 0{,}8\times 135 & 0{,}8\times 80 & 0{,}8\times 160 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 64 & 96 & 72 & 176 \\ 72 & 144 & 60 & 152 \\ 60 & 160 & 52 & 104 \\ 80 & 108 & 64 & 128 \end{bmatrix}$$

Pág. 65

Questão 7

7.1. a) $2A = \begin{bmatrix} 2\times 1 & 2\times 4 & 2\times(-1) \\ 2\times 0 & 2\times 2 & 2\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

b) $-A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

c) $3A + B - A = 2A + B =$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 8 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

d) É impossível calcular $2C + A$ porque a matriz $2C$ tem 2×2 e a matriz A tem dimensão 2×3.

7.2. $2C + \beta C = (2+\beta)C$

$$= \begin{bmatrix} (2+\beta)\times 2 & 0 \\ (2+\beta)\times(-1) & (2+\beta)\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2\beta & 0 \\ -2-\beta & 6+3\beta \end{bmatrix}$$

$$2C + \beta C = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 15 \end{bmatrix}$$

$4 + 2\beta = 10 \wedge -2 - \beta = -5 \wedge 6 + 3\beta = 15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\beta = 6 \wedge -\beta = -3 \wedge 3\beta = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \beta = 3 \wedge \beta = 3 \wedge \beta = 3$

$\beta = 3$

Pág. 67

Questão 8

8.1. A quantia gasta pela Patrícia na compra da totalidade das árvores é dada pelo produto $A \times B$.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 70 \\ 12 \\ 42 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3\times 70 + 4\times 12 + 2\times 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 342 \end{bmatrix}$$

A quantia gasta pela Patrícia foi 342 €.

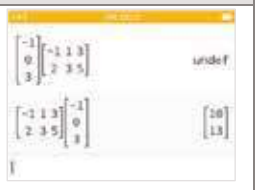
8.2. O novo preço das árvores é dado pelo produto $1{,}1 \times B$.

$$1{,}1 \times B = \begin{bmatrix} 1{,}1\times 70 \\ 1{,}1\times 12 \\ 1{,}1\times 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77 \\ 13{,}2 \\ 46{,}2 \end{bmatrix}$$

O irmão da Patrícia pagou 77 € por cada oliveira, 13,20 € por cada abeto e 46,20 € por cada laranjeira.

Pág. 68

Tarefa 4

Dimensão A	Dimensão B	Produto existe?		Matriz produto e sua dimensão
		$A \times B$	$B \times A$	
3×1	2×3	Não	Sim	 2×1
1×2	2×2	Sim	Não	 1×2
2×2	2×2	Sim	Sim	 2×2

2. A multiplicação de duas matrizes só é possível se o número de coluna da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda matriz.

3. A multiplicação de matrizes não é comutativa.

Pág. 70

Questão 9

9.1. $A = \begin{bmatrix} 90 & 80 & 75 & 70 \\ 60 & 70 & 80 & 85 \\ 65 & 80 & 60 & 85 \end{bmatrix}$ Afonso / João / Marta

9.2. $B = \begin{bmatrix} 0{,}20 \\ 0{,}25 \\ 0{,}30 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}$

MMA12DRAC © Porto Editora

9.3. É possível determinar o produto de A por B porque o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B.

9.4. $A \times B = \begin{bmatrix} 90 & 80 & 75 & 70 \\ 60 & 70 & 80 & 85 \\ 65 & 80 & 60 & 85 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}20 \\ 0{,}25 \\ 0{,}30 \\ 0{,}25 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 90 \times 0{,}20 + 80 \times 0{,}25 + 75 \times 0{,}30 + 70 \times 0{,}25 \\ 60 \times 0{,}20 + 70 \times 0{,}25 + 80 \times 0{,}30 + 85 \times 0{,}25 \\ 65 \times 0{,}20 + 80 \times 0{,}25 + 60 \times 0{,}30 + 85 \times 0{,}25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 78 \\ 74{,}75 \\ 72{,}25 \end{bmatrix}$$

A matriz $A \times B$ representa a classificação final obtida pelos três melhores atletas.

9.5. Quem venceu a competição foi o Afonso porque obteve a classificação final mais alta.

Pág. 71

Questão 10

10.1. $A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 0 \times (-1) & 2 \times 0 + 0 \times 0 \\ -1 \times 2 + 0 \times (-1) & -1 \times 0 + 0 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

10.2. $B^2 = B \times B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 0 \times 0 + 1 \times 1 & 0 \times 0 + 1 \times 2 \\ 1 \times 0 + 2 \times 1 & 1 \times 1 + 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

10.3. $A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 0 + 0 \times 1 & 2 \times 1 + 0 \times 2 \\ -1 \times 0 + 0 \times 1 & -1 \times 1 + 0 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

10.4. $A^2 \times B^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 4 \times 1 + 0 \times 2 & 4 \times 2 + 0 \times 5 \\ -2 \times 1 + 0 \times 2 & -2 \times 2 + 0 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

10.5. $(AB)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Questão 11

Por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 0 \times 0 & 1 \times (-1) + 1 \times 1 + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 1 \\ 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 0 \times 0 & 1 \times (-1) + 1 \times 1 + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 1 \\ 0 \times 1 + 0 \times (-1) + 0 \times 0 & 0 \times (-1) + 0 \times 1 + 0 \times 0 & 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{3 \times 3}$$

Pág. 72

Questão 12

12.1. $A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 2 \times 0 & 2 \times 1 + 2 \times 1 \\ 0 \times 2 + 2 \times 0 & 0 \times 1 + 2 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 1 \times 0 & 2 \times 2 + 1 \times 2 \\ 0 \times 2 + 1 \times 0 & 0 \times 2 + 1 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

12.2. a) $A \times I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = A$

$$I_2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = A$$

b) $B \times I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B$

$$I_2 \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B$$

12.3. A matriz identidade com a mesma ordem da matriz A e B é o elemento neutro da multiplicação.

Pág. 73

Questão 13

13.1.

Dimensão da matriz…				
A	B	C	BC	$A(BC)$
2×2	2×2	2×2	2×2	2×2

A matriz $A(BC)$ é uma matriz quadrada de dimensão 2×2

13.2. $B \times C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 0 + 0 \times 2 & 1 \times (-1) + 0 \times 2 \\ 3 \times 0 + 1 \times 2 & 3 \times (-1) + 1 \times 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 0 + 2 \times 2 & 1 \times (-1) + 2 \times (-1) \\ 3 \times 0 + 4 \times 2 & 3 \times (-1) + 4 \times (-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$$

MMA12DRAC © Porto Editora

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}1\times1+2\times3 & 1\times0+2\times1\\ 3\times1+4\times3 & 3\times0+4\times1\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}7 & 2\\ 15 & 4\end{bmatrix}$$
$$(AB)C=\begin{bmatrix}7 & 2\\ 15 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}7\times0+2\times2 & 7\times(-1)+2\times2\\ 15\times0+4\times2 & 15\times(-1)+4\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 8 & -7\end{bmatrix}$$
Logo, $A(BC)=(AB)C=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 8 & -7\end{bmatrix}$

13.3. a) $2\times(3B)=(2\times3)B=6B=6\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 18 & 6\end{bmatrix}$

b) $B^2=B\times B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}=$
$$=\begin{bmatrix}1\times1+0\times3 & 1\times0+0\times1\\ 3\times1+1\times3 & 3\times0+1\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}$$

c) $AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$
$$=\begin{bmatrix}1\times1+2\times3 & 1\times0+2\times1\\ 3\times1+4\times3 & 3\times0+4\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 2\\ 15 & 4\end{bmatrix}$$

d) $AC=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}=$
$$=\begin{bmatrix}1\times0+2\times2 & 1\times(-1)+2\times2\\ 3\times0+4\times2 & 3\times(-1)+4\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 8 & 5\end{bmatrix}$$

e) $A(B+C)=AB+AC=\begin{bmatrix}7 & 2\\ 15 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 3\\ 8 & 5\end{bmatrix}=$
$$=\begin{bmatrix}7+4 & 2+3\\ 15+8 & 4+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 5\\ 23 & 9\end{bmatrix}$$

Questão 14

14.1. $AB=\begin{bmatrix}a & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=$
$$=\begin{bmatrix}a\times1+2\times0 & a\times(-1)+2\times2\\ 0\times1+1\times0 & 0\times(-1)+1\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & -a+4\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$
$$BA=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}1\times a+0\times2 & 1\times2+(-1)\times1\\ 0\times a+2\times0 & 0\times2+2\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$
Para $AB=BA$, $-a+4=1$, ou seja, $a=3$.

14.2. $A^2=A\times A=\begin{bmatrix}a & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=$
$$=\begin{bmatrix}a\times a+2\times0 & a\times2+2\times1\\ 0\times a+1\times0 & 0\times2+1\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2 & 2a+2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$A^2=I_2\Leftrightarrow\begin{bmatrix}a^2 & 2a+2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2=1\wedge2a+2=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(a=-1\vee a=1)\wedge a=-1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a=-1$$

Questão 15

$$BA+2X=A\Leftrightarrow2X=A-BA\Leftrightarrow X=\frac{1}{2}(A-BA)$$
$$BA=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}1\times2+1\times2+3\times1 & 1\times0+1\times1+3\times1 & 1\times0+1\times1+3\times0\\ 0\times2+1\times2+1\times1 & 0\times0+1\times1+1\times1 & 0\times0+1\times1+1\times0\\ 1\times2+1\times2+2\times1 & 1\times0+1\times1+2\times1 & 1\times0+1\times1+2\times0\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}7 & 4 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 6 & 3 & 1\end{bmatrix}$$
$$A-BA=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7 & 4 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 6 & 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-7 & 0-4 & 0-1\\ 2-3 & 1-2 & 1-1\\ 1-6 & 1-3 & 0-1\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}-5 & -4 & -1\\ -1 & -1 & 0\\ -5 & -2 & -1\end{bmatrix}$$
$$\frac{1}{2}(A-BA)=\begin{bmatrix}\frac{-5}{2} & -\frac{4}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{0}{2}\\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-5}{2} & -2 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$
$$X=\begin{bmatrix}\frac{-5}{2} & -2 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

MMA12DRAC © Porto Editora

Pág. 74

Tarefas de consolidação 1

1.1. Pretendemos determinar $12 \times S$:

$$12S = 12 \times \begin{bmatrix} 25 & 30 & 20 & 40 \\ 50 & 45 & 60 & 55 \\ 35 & 20 & 45 & 30 \\ 15 & 25 & 20 & 10 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 300 & 360 & 240 & 480 \\ 600 & 540 & 720 & 660 \\ 420 & 240 & 540 & 360 \\ 180 & 300 & 240 & 120 \end{bmatrix}$$

1.2. Pretendemos determinar $1{,}12S$:

$$1{,}12S = 1{,}12 \times \begin{bmatrix} 25 & 30 & 20 & 40 \\ 50 & 45 & 60 & 55 \\ 35 & 20 & 45 & 30 \\ 15 & 25 & 20 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 34 & 22 & 45 \\ 56 & 50 & 67 & 62 \\ 39 & 22 & 50 & 34 \\ 17 & 28 & 22 & 11 \end{bmatrix}$$

2. O produto não está definido porque o número de colunas da matriz *A*, 3, não é igual ao número de linhas da matriz *B*, 2.

Pág. 75

3. $a_{11} = \cos\left((1+1-2)\pi\right) = \cos 0 = 1$

$a_{12} = \cos\left((1+2-2)\pi\right) = \cos \pi = -1$

$a_{21} = \sin\left((2+1-2)\pi\right) = \sin \pi = 0$

$a_{22} = \cos\left((2+2-2)\pi\right) = \cos(2\pi) = 1$

$a_{31} = \sin\left((3+1-2)\pi\right) = \sin(2\pi) = 0$

$a_{32} = \sin\left((3+2-2)\pi\right) = \sin(3\pi) = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.1.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+0\times0+0\times0 & 1\times0+0\times0+0\times1 & 1\times0+0\times1+0\times0 \\ 0\times1+0\times0+1\times0 & 0\times0+0\times0+1\times1 & 0\times0+0\times1+1\times0 \\ 0\times1+1\times0+0\times0 & 0\times0+1\times0+0\times1 & 0\times0+1\times1+0\times0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

4.2. Comecemos por determinar B^2, $xB + yI_2$.

$$B^2 = B \times B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times2+(-1)\times3 & 2\times(-1)+(-1)\times0 \\ 3\times2+0\times3 & 3\times(-1)+0\times0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$xB + yI_2 = x\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2x & -x \\ 3x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y & -x \\ 3x & y \end{bmatrix}$$

$$B^2 = x + yI_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y & -x \\ 3x & y \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + y = 1 \wedge -x = -2 \wedge 3x = 6 \wedge y = -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\times2 - 3 = 1 \wedge x = 2 \wedge x = 2 \wedge y = -3$$

$$x + y = 2 + (-3) = -1$$

4.3.

$$B^2 = B \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+0\times0+0\times0 & 1\times0+0\times1+0\times0 & 1\times0+0\times0+0\times0 \\ 0\times1+1\times0+0\times0 & 0\times0+1\times1+0\times0 & 0\times0+1\times0+0\times0 \\ 0\times1+0\times0+0\times0 & 0\times0+0\times1+0\times0 & 0\times0+0\times0+0\times0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

$$C^2 = C \times C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+0\times0+0\times0 & 1\times0+0\times0+0\times1 & 1\times0+0\times1+0\times0 \\ 0\times1+0\times0+1\times0 & 0\times0+0\times0+1\times1 & 0\times0+0\times1+1\times0 \\ 0\times1+1\times0+0\times0 & 0\times0+1\times0+0\times1 & 0\times0+1\times1+0\times0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq C$$

B é idempotente porque $B^2 = B$.

C não é idempotente porque $C^2 \neq C$.

4.4.

$$D^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & k \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+1\times2 & 1\times1+1\times k \\ 2\times1+k\times2 & 2\times1+k\times k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & k \\ 2+2k & 2+k^2 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Qualquer que seja k, $D^2 \neq I_2$ logo não existe k de modo que $D^2 = I_2$.

MMA12DRAC © Porto Editora

5.

$$\begin{array}{l|l} b_{11}=a_{51}=1 & b_{21}=a_{41}=1 \\ b_{12}=a_{52}=0 & b_{22}=a_{42}=0 \\ b_{13}=a_{53}=0 & b_{23}=a_{43}=0 \\ b_{14}=a_{54}=0 & b_{24}=a_{44}=0 \\ b_{15}=a_{55}=1 & b_{25}=a_{45}=1 \\ \hline b_{31}=a_{31}=1 & b_{41}=a_{21}=1 \\ b_{32}=a_{32}=1 & b_{42}=a_{22}=0 \\ b_{33}=a_{33}=1 & b_{43}=a_{23}=0 \\ b_{34}=a_{34}=1 & b_{44}=a_{24}=0 \\ b_{35}=a_{35}=1 & b_{45}=a_{25}=1 \end{array}$$

$b_{51}=a_{11}=1$

$b_{52}=a_{12}=0$

$b_{53}=a_{13}=0$

$b_{54}=a_{14}=0$

$b_{55}=a_{15}=0$

A imagem seguinte representa a matriz B:



2. Aplicações às transformações geométricas

Pág. 76

Tarefa 5

1. $A(1,3)\,;\ \vec{u}(1,-2)$

1.1. Seja A' a imagem do ponto A pela translação de vetor $\vec{u}$.

$A'=A+\vec{u}=(1,3)+(1,-2)=(1+1,3-2)=(2,1)$

$A'=(2,1)$

1.2.

$A=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix};\ \vec{u}=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$

1.3.

$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1\\3-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

Representa as coordenadas da translação de A associada ao vetor $\vec{u}$.

Pág. 77

Questão 16

16.1. a) Sejam A' e B' as imagens de A e de B pela translação de vetor $\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$.

$A'=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+3\\-2+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}$

$B'=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+3\\4+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$

Então, $A'(4,-2)$ e $B'(1,4)$.

b) Sejam A'' e B'' as imagens de A e de B pela translação de vetor $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$

$A''=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-1\\-2+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$B''=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2-1\\4+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\6\end{bmatrix}$

Então, $A''(0,0)$ e $B'(-3,6)$.

16.2.

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=B\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x+2\\y-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2=-2\wedge y-1=4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-4\wedge y=5$

Então, $C(-4,5)$

16.3. a) Seja $v_1=\begin{bmatrix}e_1\\f_1\end{bmatrix}$ o vetor associado à translação que transforma A em A'.

$A+v_1=A'\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e_1\\f_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1+e_1\\-2+f_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+e_1=5\wedge -2+f_1=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e_1=4\wedge f_1=3$

Então, $v_1=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$.

b) Seja $v_2=\begin{bmatrix}e_2\\f_2\end{bmatrix}$ o vetor associado à translação que transforma A em A''.

$A+v_2=A''\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e_2\\f_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1+e_2\\-2+f_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\Leftrightarrow 1+e_2=-1\wedge -2+f_2=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e_2=-2\wedge f_2=3$

MMA12DRAC © Porto Editora

Então, $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Pág. 78

Questão 17

17.1. Seja $\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ a matriz coluna que define o vetor da translação.

$$A + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = A' \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2+e \\ 2+f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2+e=1 \wedge 2+f=0 \Leftrightarrow e=-1 \wedge f=-2$$

Então, $\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

17.2. $\begin{bmatrix} x'_B & x'_C & x'_D \\ y'_B & y'_C & y'_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} =$

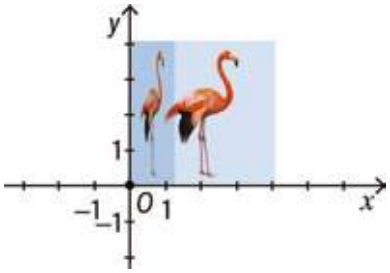
$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então, $B'(3,-1)$, $C'(5,0)$ e $D'(3,1)$.

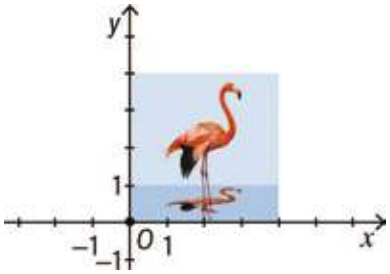
Pág. 80

Tarefa 6

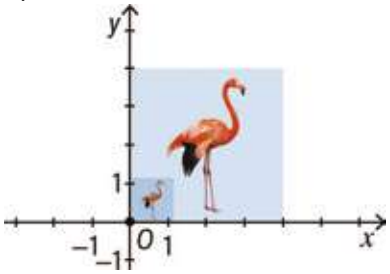
1. Aplicando a matriz S_x:



Aplicando a matriz S_y:

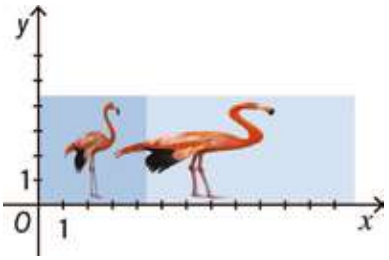


Aplicando a matriz S:



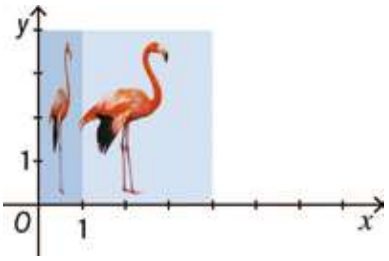
2. Aplicando a matriz S_x:

Para $k > 1$:



Observa-se um alongamento horizontal.

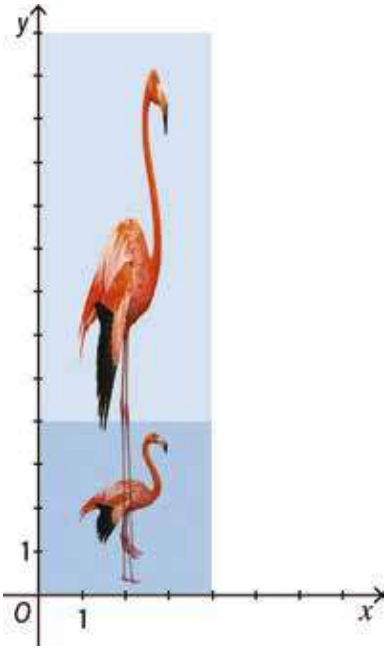
Para $0 < k < 1$:



Observa-se uma contração horizontal.

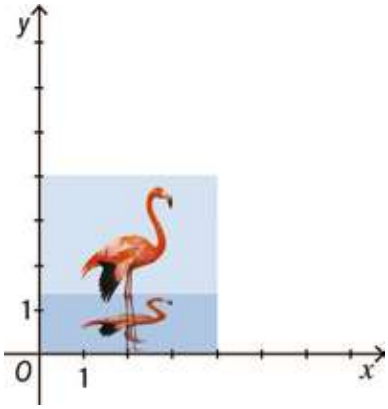
Aplicando a matriz S_y:

Para $k > 1$:



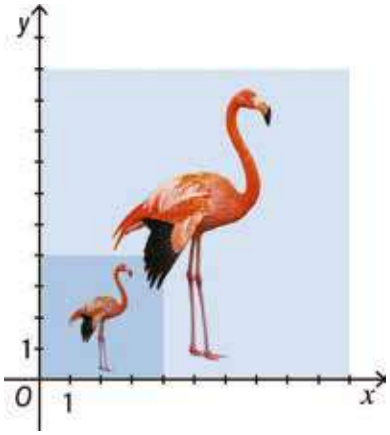
MMA12DRAC © Porto Editora

Observa-se um alongamento vertical.
Para $0 < k < 1$:



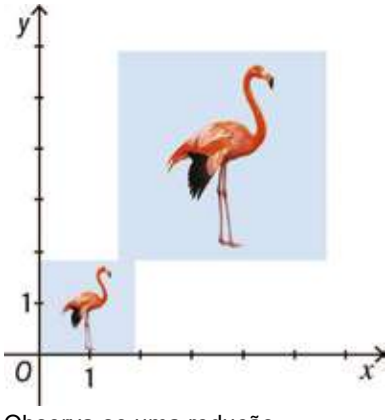
Observa-se uma contração vertical.

Aplicando a matriz *S*:
Para $k > 1$:



Observa-se uma ampliação.

Para $0 < k < 1$:



Observa-se uma redução.

3. Trata-se de uma homotetia de centro na origem do referencial. As imagens obtidas são semelhantes.

Pág. 83

Questão 18

18.1. $x' = Ax$

a) A aplicação da matriz *A* resulta num alongamento vertical de fator 5 do triângulo $[ABC]$.

b) A aplicação da matriz *A* resulta numa redução segundo uma homotetia de fator $\frac{3}{4}$ do triângulo $[ABC]$.

c) A aplicação da matriz *A* resulta num alongamento horizontal de fator 4 do triângulo $[ABC]$.

18.2. Imagem de *P*: $P' = (-1,5 \times 3) = (-1,15)$

Imagem de *Q*: $Q' = (2,5 \times 5) = (2,25)$

Imagem de *R*: $R' = (2,-3 \times 5) = (2,-15)$

Questão 19

Na opção (A), a aplicação da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ resulta num alongamento vertical de fator 3. Então, não aumenta de tamanho de forma uniforme.

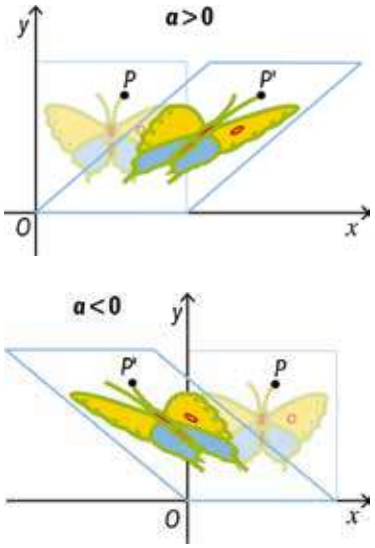
Na opção (B), a aplicação da matriz $\begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{bmatrix}$ resulta numa ampliação segundo uma homotetia de razão 1,5. Então, aumenta de tamanho de forma uniforme.

Logo, a opção (B) é a correta.

Pág. 84

Tarefa 7

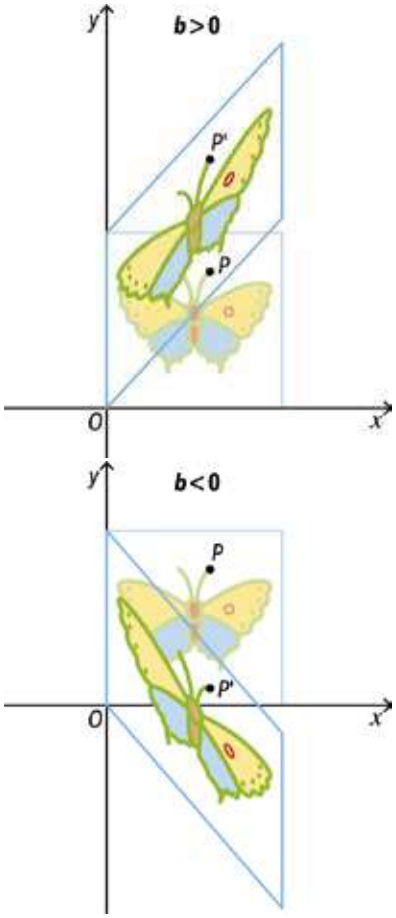
1.1.



Os pontos de um lado do quadrado mantêm-se fixos e todos os outros pontos da figura deslocam-se na horizontal para a direita ou para a esquerda dependendo de *a* ser positivo ou negativo.

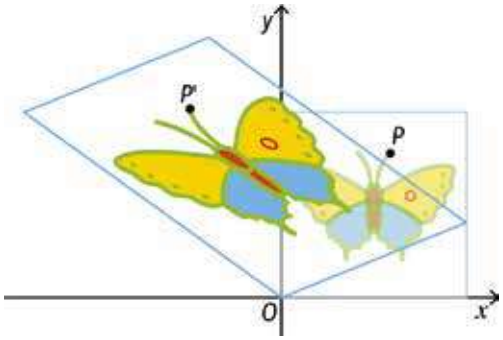
MMA12DRAC © Porto Editora

1.2.

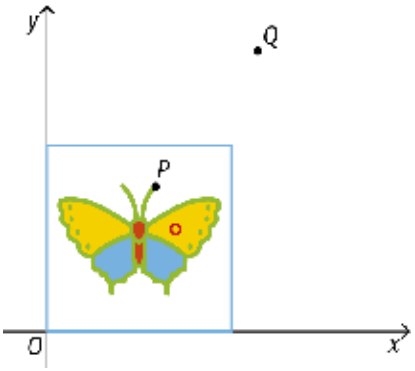


Os pontos de um lado do quadrado mantêm-se fixos e todos os outros pontos da figura deslocam-se na vertical para cima ou para baixo, dependendo de *b* ser positivo ou negativo.

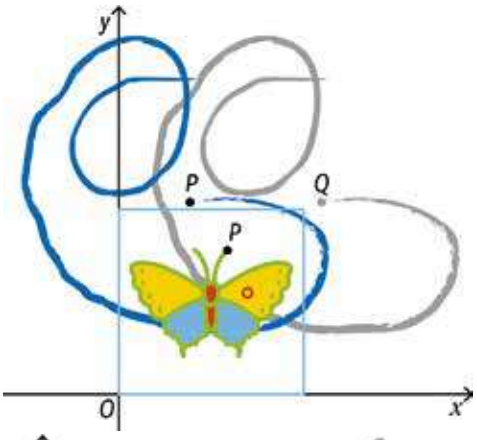
1.3. Os pontos movem-se na horizontal e na vertical e não há um lado fixo.

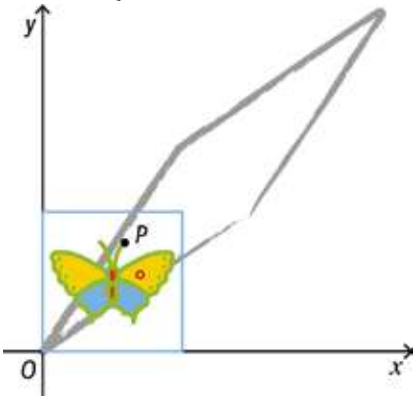


2.

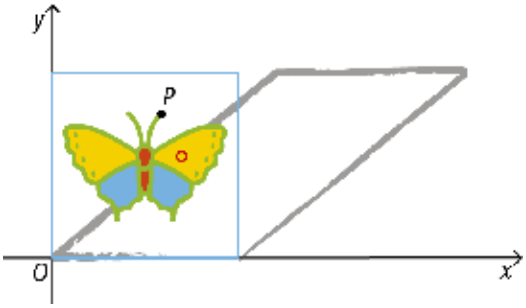


3.

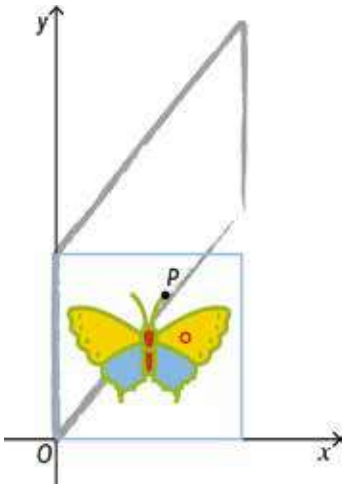




Se o ponto *P* se move sobre uma linha curva o movimento de *Q* também se dá sobre uma linha curva.



MMA12DRAC © Porto Editora



Se o ponto P se desloca sobre os lados do quadrado, o ponto *Q* move-se sobre um paralelogramo.

Pág. 86

Questão 20

20.1. A aplicação da matriz *M* resulta num cisalhamento horizontal.

Sejam $A'(x_1, y_1)$ e $B'(x_2, y_2)$ as imagens dos pontos A e B, respetivamente.

$$A' = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1+2\times 2 \\ 0\times 1+1\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 0+2\times(-2) \\ 0\times 0+1\times(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Então, $A'(5, 2)$ e $B'(-4, -2)$.

20.2. A aplicação da matriz *M* resulta na composição de um cisalhamento horizontal e de um vertical.

Sejam $A'(x_1, y_1)$ e $B'(x_2, y_2)$ as imagens dos pontos *A* e *B*, respetivamente.

$$A' = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1+2\times 2 \\ 3\times 1+1\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

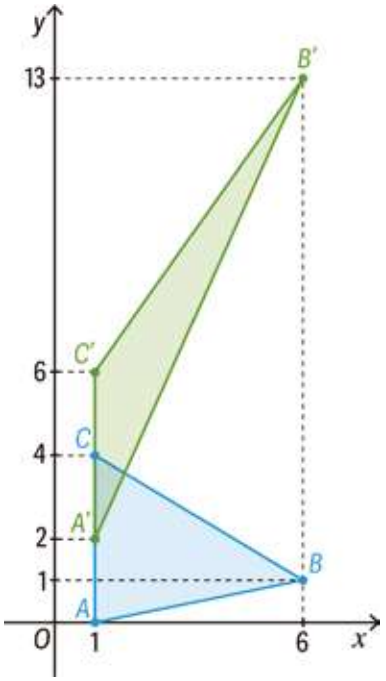
$$B' = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 0+2\times(-2) \\ 3\times 0+1\times(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Então, $A'(5, 5)$ e $B'(-4, -2)$.

Pág. 87

Questão 21

21.1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (Cisalhamento vertical)



$x'_A = x_A \wedge y'_A = y_A + 2x_A \Leftrightarrow x'_A = 1 \wedge y'_A = 0 + 2\times 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x'_A = 1 \wedge y'_A = 2$

$x'_B = x_B \wedge y'_B = y_B + 2x_B \Leftrightarrow x'_B = 6 \wedge y'_B = 1 + 2\times 6 \Leftrightarrow$

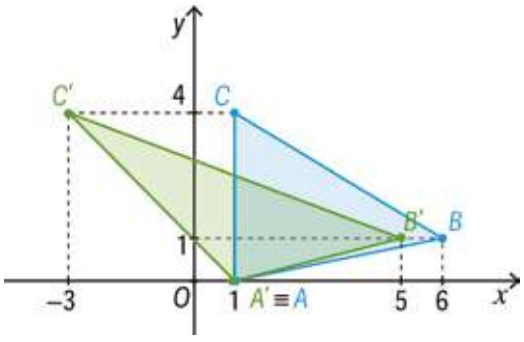
$\Leftrightarrow x'_B = 6 \wedge y'_B = 13$

$x'_C = x_C \wedge y'_C = y_C + 2x_C \Leftrightarrow x'_C = 1 \wedge y'_C = 4 + 2\times 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x'_C = 1 \wedge y'_C = 6$

$A'(1, 2)$ $B'(6, 13)$ $C'(1, 6)$

21.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (Cisalhamento horizontal)



$x'_A = x_A - y_A \wedge y'_A = y_A \Leftrightarrow x'_A = 1 - 0 \wedge y'_A = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x'_A = 1 \wedge y'_A = 0$

$x'_B = x_B - y_B \wedge y'_B = y_B \Leftrightarrow x'_B = 6 - 1 \wedge y'_B = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x'_B = 5 \wedge y'_B = 1$

$x'_C = x_C - y_C \wedge y'_C = y_C \Leftrightarrow x'_C = 1 - 4 \wedge y'_C = 4 \Leftrightarrow$

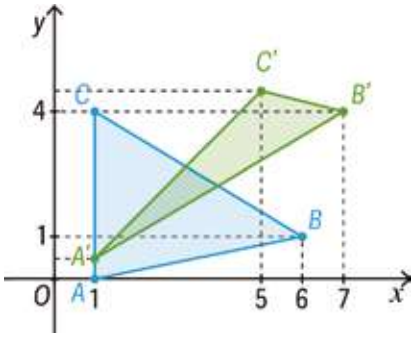
$\Leftrightarrow x'_C = -3 \wedge y'_C = 4$

$A'(1, 0)$ $B'(5, 1)$ $C'(-3, 4)$

MMA12DRAC © Porto Editora

21.3.

$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0{,}5 & 1\end{bmatrix}$ (Cisalhamento horizontal e vertical)



$x'_A = x_A + y_A \wedge y'_A = 0{,}5x_A + y_A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x'_A = 1+0 \wedge y'_A = 0{,}5\times 1+0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x'_A = 1 \wedge y'_A = 0{,}5$

$x'_B = x_B + y_B \wedge y'_B = 0{,}5x_B + y_B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x'_B = 6+1 \wedge y'_B = 0{,}5\times 6+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x'_B = 7 \wedge y'_B = 4$

$x'_C = x_C + y_C \wedge y'_C = 0{,}5x_C + y_C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x'_C = 1+4 \wedge y'_C = 0{,}5\times 1+4 \Leftrightarrow$

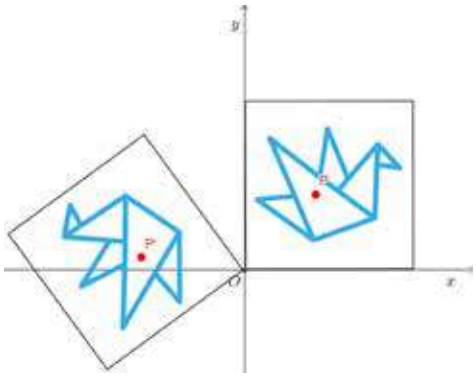
$\Leftrightarrow x'_C = 5 \wedge y'_C = 4{,}5$

$A'(1;0{,}5);\ B'(7,4);\ C'(5;4{,}5)$

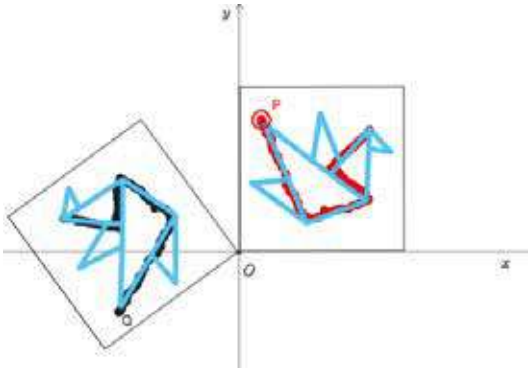
Pág. 88

Tarefa 8

1. A imagem obtida é uma rotação da imagem original de centro na origem e amplitude α.



3. Fixando o valor de α e movendo o ponto P, verificamos que o ponto Q é uma rotação de P de centro na origem e amplitude α.



Pág. 90

Questão 22

22.1. Seja R a matriz da rotação

$$R=\begin{bmatrix}\cos 30^\circ & -\sin 30^\circ\\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

22.2. Seja S' a imagem de S pela rotação

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3-\frac{1}{2}\times 4\\ \frac{1}{2}\times 3+\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3\sqrt{3}}{2}-2\\ \frac{3}{2}+2\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

$$S'\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-2,\frac{3}{2}+2\sqrt{3}\right)=S'\left(\frac{-4+3\sqrt{3}}{2},\frac{3+4\sqrt{3}}{2}\right)$$

Questão 23

23.1. $A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}$

Trata-se de uma rotação de centro na origem do referencial e ângulo $\frac{\pi}{4}$.

23.2. Seja P' a imagem de P pela rotação.

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\times 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\times(-1)\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\times 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\times(-1)\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix}$$

Logo, $P'(\sqrt{2},0)$.

MMA12DRAC © Porto Editora

Pág. 91

Questão 24

24.1. $AB=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$

24.2. Trata-se de uma homotetia de centro na origem do referencial e razão 2 seguida de uma rotação de centro na origem do referencial e ângulo de amplitude $-\frac{\pi}{2}$ rad.

24.3. Seja $P'(x', y')$ a imagem de P pela transformação referida em 23.2.

$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}$

Logo, $P'(2, 4)$.

Pág. 92

Tarefas de consolidação 2

1.1. $\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\ 12\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}3k\\ 4k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\ 12\end{bmatrix}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3k=9\wedge 4k=12\Leftrightarrow k=3\wedge k=3$

Logo, $k=3$.

1.2. $\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ 3\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1+3k\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ 3\end{bmatrix}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+3k=7\Leftrightarrow 3k=6\Leftrightarrow k=2$

Logo, $k=2$.

1.3. $\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ -5\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-2\\ -2k+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ -5\end{bmatrix}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2=-2\wedge -2k+1=-5\Leftrightarrow k=3$

Logo, $k=3$.

1.4. $\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & -k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -6\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2k\\ -3k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -6\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow 2k=4\wedge -3k=-6\Leftrightarrow k=2\wedge k=2$

Logo, $k=2$.

2. A transformação geométrica é uma rotação de centro na origem e amplitude $270°$.

Sejam A', B' e C' os transformados de A, B e C.

$\begin{bmatrix}x'_A & x'_B & x'_C\\ y'_A & y' & y'_C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -2\end{bmatrix}$

$A'(0, 0)$, $B'(0, -2)$ e $C'(1, -2)$.

3. M tem dimensão $2\times n$.

R tem dimensão 2×2.

Então, só existe produto $M\times R$ se $n=2$.

A afirmação do aluno é falsa.

A matriz das novas coordenadas dos vértices é $M'=R\times M$ e não $M'=M\times R$.

4.

$M=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}=2\times\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ\\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{bmatrix}$

M é a composta de uma homotetia de centro na origem e razão 2 com uma rotação de centro na origem e ângulo de amplitude $45°$.

Pág. 93

5.1. Transformação 1: Cisalhamento horizontal

Matriz associada: $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Transformação 2: Rotação de centro na origem e amplitude $90°$

Matriz associada: $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

Transformação 3: Cisalhamento vertical

Matriz associada: $\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$

Transformação 4: Homotetia de razão 2

Matriz associada: $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

5.2. Transformação 1:

$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}$; $P'(3, 2)$

Transformação 2:

$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$; $P'(-2, 1)$

Transformação 3:

$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ \frac{5}{2}\end{bmatrix}$; $P'\left(1, \frac{5}{2}\right)$

Transformação 4:

$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}$; $P'(2, 4)$

MMA12DRAC © Porto Editora

Tarefas complementares

Pág. 96

1.1. Matriz de dimensão 2×3

1.2. Matriz de dimensão 1×4

1.3. Matriz de dimensão 4×2

1.4. Matriz de dimensão 4×1

2.1. $a_{13} = 7$

2.2. $a_{22} = 3$

2.3. $a_{31} = 5$

2.4. $a_{23} = 2$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

C.A.

$a_{11} = 2 \times 1 - 1 = 1$ $\quad a_{12} = 1 + 2 = 3$ $\quad a_{13} = 1 + 3 = 4$

$a_{21} = 0$ $\quad a_{22} = 2 \times 2 - 2 = 2$ $\quad a_{23} = 2 + 3 = 5$

$a_{31} = 0$ $\quad a_{32} = 0$ $\quad a_{33} = 2 \times 3 - 3 = 3$

4.1.

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

C.A. $\quad a_{33} = a_{13} = 0$

$a_{44} = a_{11} - a_{22} = 2 - (-1) = 3$

4.3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.4.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.4.

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Pág. 97

5.1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5.2. $a_{23} = 1$ → Representa que o caranguejo se alimenta do peixe pequeno.

5.3. Significa que a alga não se alimenta de nenhuma das outras espécies.

Pág. 98

6. $\begin{cases} a_{12} + a_{23} = a_{11} + a_{13} \\ 2a_{12} = a_{23} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 + 2 \\ 2 \times a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 2a = b \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2a = 3 \\ 2a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 3 \\ 2a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \times 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

$a = 1$ e $b = 2$

7.1. $T = \begin{bmatrix} 70\% & 20\% & 10\% \\ 10\% & 50\% & 40\% \\ 40\% & 0\% & 60\% \end{bmatrix}$

7.2. $t_{32} = 0\%$ → Representa a percentagem de clientes que, estando no cinema, ao fim de uma hora se deslocaram para os restaurantes.

7.3. É uma matriz quadrada de ordem 3, isto é, uma matriz quadrada de dimensão 3×3.

8. Para que as matrizes *A* e *B* sejam iguais,

$2x - 1 = 3 \wedge y + 3 = 7 \wedge 2z = 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 4 \wedge y = 4 \wedge z = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2 \wedge y = 4 \wedge z = 5$

$x = 2$, $y = 4$ e $z = 5$

9. Matriz *A*: matriz linha e retangular.
Matriz *B*: matriz coluna e retangular.
Matriz *C*: matriz quadrada e diagonal.
Matriz *D*: matriz quadrada, diagonal e identidade.
Matriz *E*: matriz retangular.
Matriz *F*: matriz quadrada.

Pág. 99

10.1. $A + B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 2+1 & -1+0 & 3+(-2) \\ 0+3 & 4+(-1) & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

10.2. $A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 2-1 & -1-0 & 3-(-2) \\ 0-3 & 4-(-1) & 5-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

10.3. $3A = 3\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 2 & 3 \times (-1) & 3 \times 3 \\ 3 \times 0 & 3 \times 4 & 3 \times 5 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 0 & 12 & 15 \end{bmatrix}$

10.4. $B \times v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 0 \times (-1) + (-2) \times 4 \\ 3 \times 2 + (-1) \times (-1) + 1 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 8 \\ 6 + 1 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 11 \end{bmatrix}$

10.5. $A \times B$ não está definida porque o número de colunas da matriz *A*, 3, não é igual ao número de linhas da matriz *B*, 2.

MMA12DRAC © Porto Editora

10.6. $B \times A$ não está definida porque o número de colunas da matriz B, 3, não é igual ao número de linhas da matriz A, 2.

11.1. $Q = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix} 1{,}20 \\ 4{,}50 \\ 0{,}90 \\ 3{,}80 \end{bmatrix}$

11.2. O produto de Q por P dá o valor total a pagar.

12.1. $A \times B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 4\times 3 + (-1)\times 1 & 4\times 2 + (-1)\times 0 \\ 2\times 3 + 5\times 1 & 2\times 2 + 5\times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12-1 & 8 \\ 6+5 & 4 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$

12.2. $B \times A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 3\times 4 + 2\times 2 & 3\times(-1) + 2\times 5 \\ 1\times 4 + 0\times 2 & 1\times(-1) + 0\times 5 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 12+4 & -3+10 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 7 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

$A \times B \neq B \times A$, logo as matrizes A e B não são comutáveis.

Pág. 100

13.1. $A = \begin{bmatrix} 14 & 15 & 13 & 16 \\ 12 & 11 & 14 & 15 \\ 10 & 13 & 12 & 14 \\ 16 & 15 & 17 & 18 \end{bmatrix}$

13.2. $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

13.3. $A \times P = \begin{bmatrix} 14 & 15 & 13 & 16 \\ 12 & 11 & 14 & 15 \\ 10 & 13 & 12 & 14 \\ 16 & 15 & 17 & 18 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 14\times\frac{1}{4} + 15\times\frac{1}{4} + 13\times\frac{1}{4} + 16\times\frac{1}{4} \\ 12\times\frac{1}{4} + 11\times\frac{1}{4} + 14\times\frac{1}{4} + 15\times\frac{1}{4} \\ 10\times\frac{1}{4} + 13\times\frac{1}{4} + 12\times\frac{1}{4} + 14\times\frac{1}{4} \\ 16\times\frac{1}{4} + 15\times\frac{1}{4} + 17\times\frac{1}{4} + 18\times\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14{,}5 \\ 13 \\ 12{,}25 \\ 16{,}5 \end{bmatrix}$

Representa a média anual do António em cada disciplina, calculada com todos os testes ponderados igualmente.

14. $A^2 = A^3 = A$

15.1. $\begin{bmatrix} x & -1 \\ y-x & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & -1 \\ y-x & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2 \wedge y - x = 1 \Leftrightarrow x = 2 \wedge y - 2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2 \wedge y = 3$

$x = 2$ e $y = 3$

15.2. $\begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x\times x & x\times 1 + 1\times y \\ 0\times x + y\times 0 & 0\times 1 + y\times y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2 & x+y \\ 0 & y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 1 \wedge x + y = 3 \wedge y^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm 1 \wedge x + y = 3 \wedge y = \pm 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \wedge 1 + 2 = 3 \wedge y = 2$

$x = 1$ e $y = 2$

15.3. $\begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2 - 4 \\ 3x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 6 - 2y = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ -6 - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \end{cases}$

$x = 2$ e $y = 5$ ou $x = -2$ e $y = -5$.

Pág. 101

16. $A_{m\times n}$; $B_{2\times p}$; $C_{m\times 5}$

Se $A + B$ está definida, então $m = 2$ e $n = p$;

Se $B + C$ não está definida, então $m \neq 2 \vee p \neq 5$;

Pela primeira condição sabemos que $m = 2$, logo $p \neq 5$.

Opção (A)

17. Comecemos por determinar M^2; aM e bI_2:

$M^2 = M \times M = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1\times 1 + 4\times 2 & 1\times 4 + 4\times 3 \\ 2\times 1 + 3\times 2 & 2\times 4 + 3\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 16 \\ 8 & 17 \end{bmatrix}$

$aM = \begin{bmatrix} a & 4a \\ 2a & 3a \end{bmatrix}$; $bI_2 = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$

$M^2 + aM + bI_2 = 0_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 9 & 16 \\ 8 & 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 4a \\ 2a & 3a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

MMA12DRAC © Porto Editora

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 9+a+b & 16+4a+0 \\ 8+2a+0 & 17+3a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 9+a+b & 16+4a \\ 8+2a & 17+3a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9+a+b=0 \wedge 16+4a=0 \wedge 8+2a=0 \wedge 17+3a+b=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9+a+b=0 \wedge 4a=-16 \wedge 2a=-8 \wedge 17+3a+b=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9-4+b=0 \wedge a=-4 \wedge a=-4 \wedge 17+3\times(-4)+b=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b=-5 \wedge a=-4 \wedge 17+3\times(-4)-5=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b=-5 \wedge a=-4 \wedge 0=0$$

$a=-4$ e $b=-5$

18.

$$A\times C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1\times 10 & + & 2\times 20 & + & 3\times 30 \\ 4\times 10 & + & 5\times 20 & + & 6\times 30 \\ 0 & + & 0 & + & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 140 \\ 255 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O vetor é $\begin{bmatrix} 140 \\ 255 \\ 0 \end{bmatrix}$.

19.

$$A-2I_2=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A-2I_2)^2=(A-2I_2)\times(A-2I_2)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0\times 0+0\times 1 & 0\times 0+0\times 0 \\ 1\times 0+0\times 1 & 1\times 0+0\times 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=0_2$$

Pág. 102

20.1.

$$MM=\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -4\times(-4)+6\times(-2) & -4\times 6+6\times 3 \\ -2\times(-4)+3\times(-2) & -2\times 6+3\times 3 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 16-12 & -24+18 \\ 8-6 & -12+9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}=-M$$

20.2.

$$MMMMM=-M(-M)M=(MM)M=-MM$$

$$=-(-M)=M$$

21. Seja $A=\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} x^2+0 & x\times 0+0\times y \\ 0\times x+y\times 0 & 0\times 0+y^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{bmatrix}$$

$$A^2=A\Leftrightarrow\begin{bmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=x \wedge y^2=y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-x=0 \wedge y^2-y=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)=0 \wedge y(y-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x=0 \vee x=1) \wedge (y=0 \vee y=1)$$

$x\in\{0,1\}$ e $y\in\{0,1\}$

Número de possibilidades: $2\times 2=4$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

22.1. Seja $A=\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$.

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^3 & 0 \\ 0 & y^3 \end{bmatrix}$$

$$A^3=A\Leftrightarrow\begin{bmatrix} x^3 & 0 \\ 0 & y^3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3=x \wedge y^3=y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3-x=0 \wedge y^3-y=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \wedge y(y^2-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x=0 \vee x^2=1) \wedge (y=0 \vee y^2=1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x=0 \vee x=1 \vee x=-1) \wedge (y=0 \vee y=1 \vee y=-1)$$

$x\in\{-1,0,1\}$ e $y\in\{-1,0,1\}$

Número de possibilidades: $3\times 3=9$

Existem 9 matrizes.

22.2. Seja $A=\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$

$$A^4=A^2\times A^2=\begin{bmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^4 & 0 \\ 0 & y^4 \end{bmatrix}$$

$$A^4=A\Leftrightarrow\begin{bmatrix} x^4 & 0 \\ 0 & y^4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4=x \wedge y^4=y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4-x=0 \wedge y^4-y=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x^3-1)=0 \wedge y(y^3-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x=0 \vee x^3=1) \wedge (y=0 \vee y^3=1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x=0 \vee x=1) \wedge (y=0 \vee y=1)$$

$x\in\{0,1\}$ e $y\in\{0,1\}$

MMA12DRAC © Porto Editora

Número de possibilidades: $2 \times 2 = 4$
Existem 4 matrizes.

Pág. 103

23. $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax - by & -ay - bx \\ bx + ay & -by + ax \end{bmatrix}$

$a^2 + b^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 1$

$\begin{bmatrix} ax - by & -(ay + bx) \\ ay + bx & ax - by \end{bmatrix}$

$(ax - by)^2 + (ay + bx)^2$

$= a^2 (x^2 + y^2) + b^2 (x^2 + y^2) = a^2 \times 1 + b^2 \times 1 =$

$= a^2 + b^2 = 1$

Multiplicando duas matrizes de *M* obtém-se outra matriz do conjunto *M*, isto é, obtém-se uma matriz com os elementos da diagonal principal iguais e os elementos da diagonal secundária simétricos e a soma dos quadrados do primeiro elemento da linha 1 com o primeiro elemento da linha 2 é igual a 1.

24.1. Linha 1: $0 + (-1) + 1 = 0$

Linha 2: $-1 + 1 + 0 = 0$

Linha 3: $1 + 0 + (-1) = 0$

Coluna 1: $0 + (-1) + 1 = 0$

Coluna 2: $-1 + 1 + 0 = 0$

Coluna 3: $1 + 0 + (-1) = 0$

24.2. Por exemplo:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

	Matriz A	Matriz B
Linha 1	$1+1+1=3$	$3+0+1=4$
Linha 2	$1+1+1=3$	$1+1+2=4$
Linha 3	$1+1+1=3$	$0+3+1=4$
Coluna 1	$1+1+1=3$	$3+1+0=4$
Coluna 2	$1+1+1=3$	$0+1+3=4$
Coluna 3	$1+1+1=3$	$0+3+1=4$

24.3. A proposição 1 é verdadeira. Seja S_A a soma dos elementos de cada linha e de cada coluna da matriz mágica *A*.

Seja S_B a soma dos elementos de cada linha e de cada coluna da matriz mágica B.

Todas as linhas e colunas da matriz $A + B$ têm soma $S_A + S_B$.

A proposição 2 é verdadeira.

Sejam *A* e *B* duas matrizes mágicas, cujas somas das linhas e das colunas são S_A e S_B, respetivamente.

Seja $C = AB$.

O elemento da linha *i* e da coluna *j* do produto AB é:

$c_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \ldots + a_{in} \times b_{nj}$

A soma de todos os elementos da linha *i* de *C* é:

$a_{i1}(b_{1j} + b_{2j} + \ldots + b_{nj}) + a_{i2}(b_{1j} + b_{2j} + \ldots + b_{nj}) + \ldots$

$\ldots + a_{in}(b_{1j} + b_{2j} + \ldots + b_{nj}) =$

$= a_{i1} S_B + a_{i2} S_B + \ldots + a_{in} S_B =$

$= (a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in}) S_B =$

$= S_A \times S_B$

De modo análogo, prova-se que a soma dos elementos de cada coluna também é igual a $S_A \times S_B$.

25. Por exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1\times0+0\times1 & 1\times0+0\times0 \\ 0\times0+0\times1 & 0\times0+0\times0 \end{bmatrix} = = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0\times1+0\times0 & 0\times0+0\times0 \\ 1\times1+0\times0 & 1\times0+0\times0 \end{bmatrix} = = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$

26.1. $A - B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$(A - B)^2 = (A - B)(A - B) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1\times1+(-3)\times(-2) & 1\times(-3)+(-3)\times3 \\ -2\times1+3\times(-2) & -2\times(-3)+3\times3 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 7 & -12 \\ -8 & 15 \end{bmatrix}$

$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 2\times2+1\times0 & 2\times1+1\times3 \\ 0\times2+3\times0 & 0\times1+3\times3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2\times1+1\times2 & 2\times4+1\times0 \\ 0\times1+3\times2 & 0\times4+3\times0 \end{bmatrix} = = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

$2AB = 2\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 16 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$

MMA12DRAC © Porto Editora

$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1\times1+4\times2 & 1\times4+4\times0 \\ 2\times1+0\times2 & 2\times4+0\times0 \end{bmatrix} = = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

$A^2 - 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 16 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 4-8+9 & 5-16+4 \\ 0-12+2 & 9-0+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -10 & 17 \end{bmatrix} \neq (A-B)^2$

Não se verifica.

26.2. Não é válida para matrizes, porque, em geral, duas matrizes não comutam $(AB \neq BA)$

26.3. $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

As matrizes C e D são matrizes diagonais e as matrizes diagonais comutam, isto é, $CD = DC$

Vamos verificar:

$CD = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times3+0\times0 & 1\times0+0\times4 \\ 0\times3+2\times0 & 0\times0+2\times4 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

$DC = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times1+0\times0 & 3\times0+0\times2 \\ 0\times1+4\times0 & 0\times0+4\times2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

Logo, $CD = DC$

$(C-D)^2 = (C-D)(C-D) = C^2 - CD - DC + D^2$

Como $CD = DC$,

$C^2 - CD - DC + D^2 = C^2 - 2CD + D^2$

A igualdade é verdadeira porque C e D comutam, e isso acontece porque são matrizes diagonais.

Pág. 104

Aplicações às transformações geométricas

27.1. $u = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

Seja A' a imagem de A pela translação associada a. u.

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$

Então, $A'(6,-4)$.

27.2. $v = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Seja A' a imagem de A pela translação associada a v.

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Então, $A'(0,2)$.

27.3. $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

Seja A' a imagem de A pela translação associada a w.

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Então, $A'(2,0)$.

28.1. $B(-1,4)$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x+3 \\ y-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+3 = -1 \wedge y-2 = 4 \Leftrightarrow x = -4 \wedge y = 6$

Então, $A(-4,6)$.

28.2. $C(2,5)$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x+3 \\ y-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+3 = 2 \wedge y-2 = 5 \Leftrightarrow x = -1 \wedge y = 7$

Então, $A(-1,7)$.

28.3. $D(-6,1)$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x+3 \\ y-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+3 = -6 \wedge y-2 = 1 \Leftrightarrow x = -9 \wedge y = 3$

Então, $A(-9,3)$.

29. Seja $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ o vetor que transforma A em A'.

$\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3+u_1 \\ -4+u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3+u_1 = 8 \wedge -4+u_2 = 2 \Leftrightarrow u_1 = 5 \wedge u_2 = 6$

Logo, $u = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$.

30.1. A componente horizontal é reduzida a metade e a componente vertical mantém-se. É uma contração horizontal de razão $\frac{1}{2}$.

30.2. A componente horizontal mantém-se e a componente vertical duplica. É uma dilatação vertical de razão 2.

30.3. A componente horizontal é multiplicada por 3 e a componente vertical mantém-se. É uma dilatação horizontal de razão 3.

30.4. A componente horizontal mantém-se e a componente vertical é reduzida a um quarto. É uma contração vertical de razão $\frac{1}{4}$.

MMA12DRAC © Porto Editora

31.1. A matriz que representa uma homotetia é da forma $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ em que k é a razão.

Então, uma vez que a razão é 2, a matriz que representa a homotetia é $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

31.2. Seja A' a imagem de A pela homotetia.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Logo, $A'(6,4)$.

Pág. 105

32.1. Seja $B(x,y)$ e $B'(x',y')$ a imagem de B pela aplicação da matriz A.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$$

$B'(kx, ky)$

Ou seja, as duas coordenadas são multiplicadas pelo mesmo valor k, o que caracteriza uma homotetia de centro na origem.

32.2. a)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4k \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4k = 10 \Leftrightarrow k = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Verificação:

$$\begin{bmatrix} 2{,}5 & 0 \\ 0 & 2{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

A imagem de $P(1,-2)$ é $(2{,}5;-5)$.

b) Seja R' a imagem de R

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}5 & 0 \\ 0 & 2{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7{,}5 \\ 2{,}5 \end{bmatrix}$$

Logo, $R'(-7{,}5;2{,}5)$.

c)

$$\begin{bmatrix} 7{,}5 \\ -12{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}5 & 0 \\ 0 & 2{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -7{,}5 \\ 2{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}5x \\ 2{,}5y \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7{,}5 = 2{,}5x \wedge -12{,}5 = 2{,}5y \Leftrightarrow x = 3 \wedge y = -5$$

Logo, $S(3,-5)$.

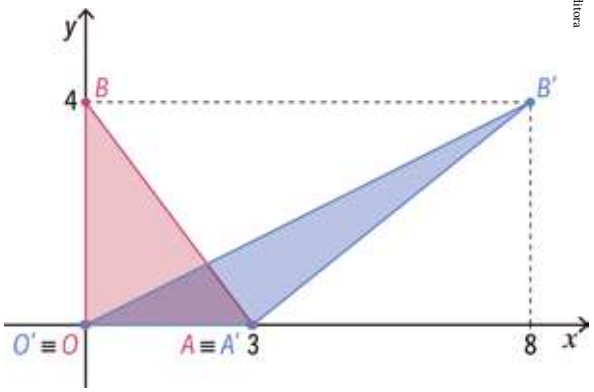
33.1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tipo de transformação: Cisalhamento horizontal

$$\begin{bmatrix} x'_0 & x'_A & x'_B \\ y'_0 & y'_A & y'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Então, $O'(0,0)$, $A'(3,0)$ e $B'(8,4)$.



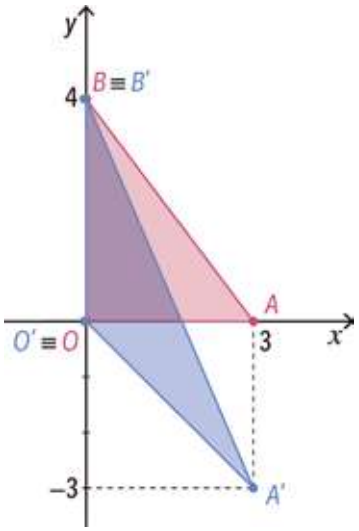
33.2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tipo de transformação: Cisalhamento vertical

$$\begin{bmatrix} x'_0 & x'_A & x'_B \\ y'_0 & y'_A & y'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Então, $O'(0,0)$, $A'(3,-3)$ e $B'(0,4)$.



33.3.

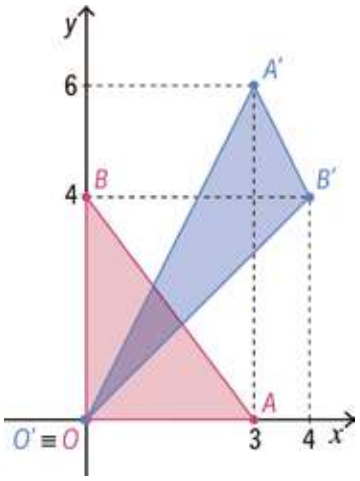
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Tipo de transformação: Cisalhamento horizontal e vertical

$$\begin{bmatrix} x'_0 & x'_A & x'_B \\ y'_0 & y'_A & y'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Então, $O'(0,0)$, $A'(3,6)$ e $B'(4,4)$.

MMA12DRAC © Porto Editora



34.1.

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{bmatrix}$$

A matriz representa uma rotação de centro na origem do referencial e ângulo de amplitude $-\frac{\pi}{6}$ rad.

34.2. Seja P' a imagem do ponto $P\left(\sqrt{3},1\right)$.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$P'(2,0)$

Pág. 106

35. $A(1,2)$; $B(3,1)$; $S = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$C(4,1)$; $R(1,0) = (0,1)$

Seja t o vetor associado à translação T.

$$C = A + t \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+t_1 \\ 2+t_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 = 1 + t_1 \wedge 1 = 2 + t_2 \Leftrightarrow t_1 = 3 \wedge t_2 = -1$$

Então, $t = (3,-1)$.

Seja $R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ a matriz associada à rotação R.

$$R\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Então, $R = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Por $T \circ R$:

Sejam A' e B' as imagens de A e B.

$$R \times S + t\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$A'(1,0)$ e $B'(2,2)$

Sejam A'' e B'' as imagens de A e B por $R \circ T$

$$R \times \left(s + t\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$A''(-1,4)$ e $B''(0,6)$

Por $T \circ R$: $A'(1,0)$ e $B'(2,2)$

Por $R \circ T$: $A''(-1,4)$ e $B''(0,6)$

Então, T e R não são comutativas.

Pág. 107

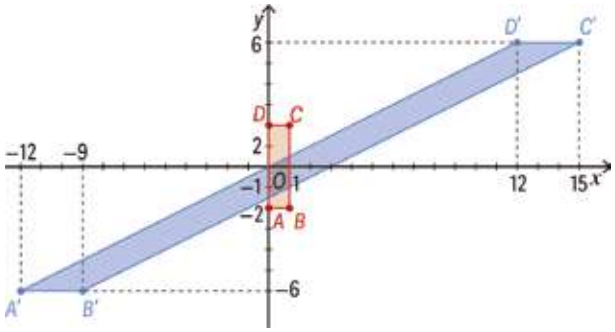
36. $A(0,-2)$; $B(1,-2)$; $C(1,2)$; $D(0,2)$

Sejam A', B', C'' e D' as imagens dos pontos A, B, C e D, por $B \circ A$

$$\begin{bmatrix} x'_A & x'_B & x'_C & x'_D \\ y'_A & y'_B & y'_C & y'_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -4 & -3 & 5 & 4 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -12 & -9 & 15 & 12 \\ -6 & -6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$A'(-12,-6)$; $B'(-9,-6)$; $C'(15,6)$; $D'(12,6)$



$A_{[ABCD]} = \overline{AB} \times \overline{BC} = 1 \times 4 = 4$ u. a.

$A_{[A'B'C'D']} = \overline{A'B'} \times \left|y_{C'} - y_{D'}\right| = 3 \times 12 = 36$ u. a.

$$\frac{A_{[A'B'C'D']}}{A_{[ABCD]}} = \frac{36}{4} = 9$$

MMA12DRAC © Porto Editora

37.1.

$$TM=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_{11}&m_{12}&m_{13}&m_{14}&m_{15}\\m_{21}&m_{22}&m_{23}&m_{24}&m_{25}\\m_{31}&m_{32}&m_{33}&m_{34}&m_{35}\\m_{41}&m_{42}&m_{43}&m_{44}&m_{45}\\m_{51}&m_{52}&m_{53}&m_{54}&m_{55}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}m_{21}&m_{22}&m_{23}&m_{24}&m_{25}\\m_{11}&m_{12}&m_{13}&m_{14}&m_{15}\\m_{41}&m_{42}&m_{43}&m_{44}&m_{45}\\m_{31}&m_{32}&m_{33}&m_{34}&m_{35}\\m_{51}&m_{52}&m_{53}&m_{54}&m_{55}\end{bmatrix}$$

Troca entre si as linhas 1 e 2, as linhas 3 e 4 e deixa a 5.ª linha fixa.

37.2.

$$MT=\begin{bmatrix}m_{11}&m_{12}&m_{13}&m_{14}&m_{15}\\m_{21}&m_{22}&m_{23}&m_{24}&m_{25}\\m_{31}&m_{32}&m_{33}&m_{34}&m_{35}\\m_{41}&m_{42}&m_{43}&m_{44}&m_{45}\\m_{51}&m_{52}&m_{53}&m_{54}&m_{55}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}m_{12}&m_{11}&m_{14}&m_{13}&m_{15}\\m_{22}&m_{21}&m_{24}&m_{23}&m_{25}\\m_{32}&m_{31}&m_{34}&m_{33}&m_{35}\\m_{42}&m_{41}&m_{44}&m_{43}&m_{45}\\m_{52}&m_{51}&m_{54}&m_{53}&m_{55}\end{bmatrix}$$

Troca entre si as colunas 1 e 2, as colunas 3 e 4, e deixa a 5.ª coluna fixa.

37.3.

$$M=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&1&0&1\\1&1&1&1&1\\1&0&0&0&1\\1&0&1&1&1\end{bmatrix}$$

a) T^2 troca entre si as linhas 1 e 2, as linhas 3 e 4 e deixa 5.ª linha fixa da matriz T.

Então, $T^3=T$, $T^4=T^2$ e $T^5=T$.

$T^5M=TM$ → Troca entre si as linhas 1 e 2, as linhas 3 e 4 e deixa a 5.ª linha fixa da matriz M.

Então,

$$T^5M=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\1&1&1&1&1\\1&0&0&0&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

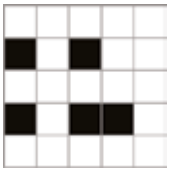


b) $T^3=T$

$MT^3=MT$ → Troca entre si as colunas 1 e 2, as colunas 3 e 4, e deixa a 5.ª coluna fixa da matriz M.

Então,

$$MT^3=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&1&1\\1&1&1&1&1\\0&1&0&0&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$



c)

$$T^2MT^2=M=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&1&0&1\\1&1&1&1&1\\1&0&0&0&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$



MMA12DRAC © Porto Editora

Avaliação global

Pág. 108

1. O produto de A por B está definido apenas quando o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.
Opção (A)

2.

$$Cv = \begin{bmatrix} 1{,}2 & 1{,}1 \\ 1 & 1{,}5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}2 \times 2 + 1{,}1 \times 3 \\ 1 \times 2 + 1{,}5 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}7 \\ 6{,}5 \end{bmatrix}$$

$(5{,}7;\ 6{,}5)$.

Opção (B)

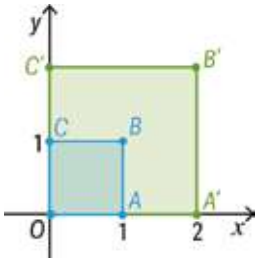
3. Matriz da rotação:

$$\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -(-\sin\theta) \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Opção (D)

4. A matriz H representa uma homotetia centrada na origem de razão 2. Então, a área do quadrado após a transformação é $2^2 = 4$ u.a.



Opção (D)

Pág. 109

5.

$$A = \begin{bmatrix} 2x + y & \ln e \\ 0 & 3x - y \end{bmatrix};\quad B = \begin{bmatrix} 5 & \pi^0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x + y & 1 \\ 0 & 3x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 1 = 1 \\ 0 = 0 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \\ 3x - (5 - 2x) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \\ 5x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 2 \times \dfrac{12}{5} \\ x = \dfrac{12}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{5} \\ x = \dfrac{12}{5} \end{cases}$$

$x = \dfrac{12}{5}$ e $y = \dfrac{1}{5}$

6.1. Por exemplo
Quadrado azul: rotação de $45°$ em torno de O.
Quadrado verde: translação associada ao vetor definido pela matriz coluna $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Quadrado cinzento: rotação de $45°$ em torno de O, seguida de translação associada ao vetor definido pela matriz coluna $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Quadrado amarelo: translação associada ao vetor definido pela matriz coluna $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ seguida de uma rotação de $45°$ em torno de O.

6.2. Matriz da rotação de $45°$ em torno de O.

$$\begin{bmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Por exemplo:
Quadrado azul:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \times Q$$

Quadrado verde:

$$Q + \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Quadrado cinzento:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \times Q + \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Quadrado amarelo:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \times \left(Q + \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

MMA12DRAC © Porto Editora