MÁXIMO

12.º ano

Matemática A

Maria Augusta Ferreira Neves
Ana Machado
Bruno Roque
Pedro Rocha Almeida
António Pinto Silva
Luís Guerreiro

Propostas de resolução

Temas opcionais

Porto Editora

Primitivas imediatas e integrais definidos

Pág. 7

Tarefa de revisão

1. $f'(x)=\left(e^x+x^2\right)'=\left(e^x\right)'+\left(x^2\right)'=e^x+2x$

$f'(-1)=e^{-1}+2(-1)=\frac{1}{e}-2=\frac{1-2e}{e}$

$g'(x)=\left[\sin(x)-2x^2\right]'=\left(\sin(x)\right)'-2\left(x^2\right)'=$

$=\cos(x)-2\times 2x=\cos(x)-4x$

$g'(0)=\cos 0-4\times 0=1-0=1$

$h'(x)=\left[3\ln(x)\right]'=3\left(\ln(x)\right)'=3\times\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$

$h'(1)=\frac{3\times 1^2+2}{1^3}=\frac{5}{1}=5$

Expressão analítica da função	Expressão analítica da função derivada	Derivada num ponto
$f(x)=e^x+x^2$	$f'(x)=e^x+2x$	$f'(-1)=\frac{1-2e}{e}$
$g(x)=\sin(x)-2x^2$	$g'(x)=\cos(x)-4x$	$g'(0)=1$
$h(x)=3\ln(x)$	$h'(x)=\frac{3}{x}$	$h'(1)=3$

2. AB é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2. Então $m_{AB}=f'(2)$.

$f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=\left(x^{-1}\right)'=-1x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$

$m_{AB}=f'(2)=-\frac{1}{2^2}=-\frac{1}{4}$

$AB:\ y=-\frac{1}{4}x+b$ e $P\left(2,f(2)\right)\in AB$; $f(2)=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\times 2+b\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=b\Leftrightarrow b=1$

$AB:\ y=-\frac{1}{4}x+1$; $A(0,1)$, $B(x,0)$

$-\frac{1}{4}x+1=0\Leftrightarrow\frac{1}{4}x=1\Leftrightarrow x=4$; $B(4,0)$

$\overline{OA}=1$ e $\overline{OB}=4$

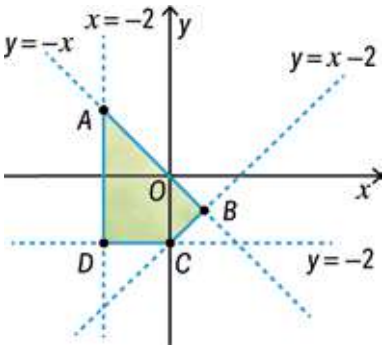
$A_{[AOB]}=\frac{\overline{OB}\times\overline{OA}}{2}=\frac{4\times 1}{2}=2$ u. a.

3. $A:\ \begin{cases}x=-2\\y=-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=2\end{cases}$, $A(-2,2)$;

$B:\ \begin{cases}y=x-2\\y=-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x=x-2\\y=-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$, $B(1,-1)$

$C:\ \begin{cases}y=x-2\\y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2=x-2\\y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=-2\end{cases}$, $C(0,-2)$

$D:\ \begin{cases}x=-2\\y=-2\end{cases}$, $D(-2,-2)$



Os vértices do quadrilátero são os pontos de coordenadas $(-2,2)$, $(1,-1)$, $(0,-2)$ e $(-2,-2)$.

3. Sejam:

- A o ponto de interseção da reta de equação $x=2$ com o eixo Ox;
- B o ponto de interseção de f com a reta de equação $x=2$;
- C o ponto de interseção de f com Oy.

$A(2,0)$; $f(2)=2+2=4$; $B(2,4)$; $C(0,2)$;

$\overline{AB}=4$; $\overline{OC}=2$; $\overline{OA}=2$;

$A_{[OABC]}=\frac{\overline{AB}+\overline{OC}}{2}\times\overline{OA}=\frac{4+2}{2}\times 2=6$ u.a.

Pág. 8

Tarefa 1

1. Não seria possível determinar o local onde o comboio se encontraria ao fim de uma hora porque não sabemos onde começou o movimento. Sabemos apenas que, uma vez que a velocidade é 100 km/h, ao fim de uma hora o comboio percorreu 100 km.

2. $p_1(t)=100t$, $v_1(t)=p_1'(t)=(100t)'=100$

$p_2(t)=100t-2$, $v_2(t)=p_2'(t)=(100t-2)'=100$

$p_3(t)=100t+10$,

$v_3(t)=p_3'(t)=(100t+10)'=100$

3. Por exemplo, $F(x)=100x+40$;

$F'(x)=(100x+40)'=100$

Questão 1

1.1. $F(x)=x$; $f(x)=1$; $F'(x)=(x)'=1=f(x)$

Como $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=f(x)$, F é uma primitiva de f.

1.2. $F(x)=x^2$; $f(x)=2x$; $F'(x)=\left(x^2\right)'=2x=f(x)$

Como $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=f(x)$, F é uma primitiva de f.

1.3. $F(x)=-\cos x$; $f(x)=\sin x$

$F'(x)=(-\cos x)'=-(\cos x)'=$

MMA12DRAC © Porto Editora

$= -(-\sin x) = \sin x = f(x)$

Como $\forall\, x \in \mathbb{R},\ F'(x) = f(x)$, F é uma primitiva de f.

Pág. 9

Questão 2

2. **(A)** $F'(x) = (3x^2 + 2)' = 6x + 0 = 6x \neq f(x)$

(B) $F'(x) = \left(\frac{1}{4}x^4\right)' = \frac{1}{4} \times 4x^3 = x^3 = f(x)$

(C) $F'(x) = \left(\frac{1}{4}x^4 - 1\right)' = x^3 - 0 = x^3 = f(x)$

(D) $F'(x) = \left(\frac{1}{4}x^4 + 10\right)' = x^3 + 0 = x^3 = f(x)$

(E) $F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 1\right)' = \frac{1}{3} \times 3x^2 + 0 = x^2 \neq f(x)$

As funções definidas em (B), (C) e (D) são primitivas de *f*.

Pág. 11

Questão 3

3.1. $\int 3\,dx = 3x + C, C \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}$

3.2. $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}$

3.3. $\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C, C \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}$

3.4. $\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx = 3 \times \frac{x^3}{3} + C = x^3 + C, C \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}$

3.5. $\int -3x^2\,dx = -3\int x^2\,dx =$

$= -3 \times \frac{x^3}{3} + C = -x^3 + C, C \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

3.6. $\int 4x^3\,dx = 4\int x^3\,dx = 4 \times \frac{x^4}{4} + C = x^4 + C, C \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}$

3.7. $\int -4x^3\,dx = -4\int x^3\,dx =$

$= -4 \times \frac{x^4}{4} + C = -x^4 + C, C \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

3.8. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C, C \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}$

3.9. $\int -\cos x\,dx = -\int \cos x\,dx = -\sin x + C, C \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}$

3.10. $\int e^x\,dx = e^x + C, C \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}$

3.11. $\int 5e^x\,dx = 5\int e^x\,dx = 5e^x + C, C \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}$

3.12. $\int -\frac{2}{x}\,dx = -2\int \frac{1}{x}\,dx = -2\ln|x| + C, C \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}$

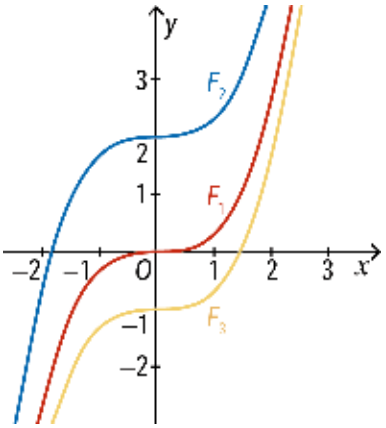
Pág. 12

Tarefa 2

1. Seja $f(x) = x^2$.

$F_1(x) = \frac{x^3}{3}$, $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 2$; $F_3(x) = \frac{x^3}{3} - 1$

2. Os gráficos das três primitivas obtêm-se uns dos outros através de translações verticais.



3. Os gráficos das primitivas de uma função obtêm-se uns dos outros através de translações verticais.

Pág. 13

Questão 4

4.1. $F(x) = \int -1\,dx = -x + C, C \in \mathbb{R}$;

$F(-1) = 0 \Leftrightarrow -(-1) + C = 0 \Leftrightarrow 1 + C = 0 \Leftrightarrow C = -1$

A primitiva pedida é $F(x) = -x - 1$.

4.2. $F(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}$;

$F(0) = -1 \Leftrightarrow \frac{0^2}{2} + C = -1 \Leftrightarrow C = -1$

A primitiva pedida é $F(x) = \frac{x^2}{2} - 1 = \frac{x^2 - 2}{2}$.

4.3. $F(x) = \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C, C \in \mathbb{R}$;

$F(0) = -1 \Leftrightarrow \frac{0^2}{4} + C = -1 \Leftrightarrow C = -1$

A primitiva pedida é $F(x) = \frac{x^4}{4} - 1 = \frac{x^4 - 4}{4}$.

4.4. $F(x) = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C, C \in \mathbb{R}$;

$F(-1) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2 \times (-1)^2} + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$

A primitiva pedida é $F(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2} = \frac{x^2 - 1}{2x^2}$.

MMA12DRAC © Porto Editora

4.5. $F(x)=\int e^x\,dx=e^x+C, C\in\mathbb{R}$;

$F(0)=-1\Leftrightarrow e^0+c=-1\Leftrightarrow 1+C=-1\Leftrightarrow C=-2$

A primitiva pedida é $F(x)=e^x-2$.

4.6. $F(x)=\int\frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C, C\in\mathbb{R}$;

$F(e)=1\Leftrightarrow \ln|e|+C=1\Leftrightarrow 1+C=1\Leftrightarrow C=0$

A primitiva pedida é $F(x)=\ln|x|$.

4.7. $F(x)=\int\sin x\,dx=-\cos x+C, C\in\mathbb{R}$;

$F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1\Leftrightarrow -\cos\frac{\pi}{3}+C=-1\Leftrightarrow -\frac{1}{2}+C=-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C=-\frac{1}{2}$

A primitiva pedida é $F(x)=-\cos x-\frac{1}{2}$.

4.8. $F(x)=\int\cos x\,dx=\sin x+C, C\in\mathbb{R}$;

$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{4}+C=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow C=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

A primitiva pedida é $F(x)=\sin x+\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Pág. 15

Questão 5

5.1. $\int(x-1)\,dx=\frac{x^2}{2}-x+C, C\in\mathbb{R}$

5.2. $\int\left(\frac{1}{3}x^3-4x^2\right)dx=\frac{1}{3}\times\frac{x^4}{4}-4\times\frac{x^3}{3}+C=$

$=\frac{x^4}{12}-\frac{4x^3}{3}+C, C\in\mathbb{R}$

5.3. $\int\left(x^7-7x^6-\frac{1}{2}\right)dx=\frac{x^8}{8}-7\times\frac{x^7}{7}-\frac{1}{2}x+C=$

$=\frac{x^8}{8}-x^7-\frac{x}{2}+C, C\in\mathbb{R}$

5.4. $\int\left(-9x^8-\frac{x^5}{6}+x^4+1\right)dx=$

$=-9\times\frac{x^9}{9}-\frac{1}{6}\times\frac{x^6}{6}+\frac{x^5}{5}+x+C=$

$=-x^9-\frac{x^6}{36}+\frac{x^5}{5}+x+C, C\in\mathbb{R}$

5.5. $\int(x-1)^2\,dx=\int(x^2-2x+1)\,dx=$

$=\frac{x^3}{3}-2\times\frac{x^2}{2}+x+C=\frac{x^3}{3}-x^2+x+C,\ C\in\mathbb{R}$

5.6. $\int(2\sin x+3\cos x)\,dx=2(-\cos x)+3\sin x+C=$

$=-2\cos x+3\sin x+C,\ C\in\mathbb{R}$

5.7. $\int(2e^x-3x)\,dx=2e^x-3\times\frac{x^2}{2}+C=$

$=2e^x-\frac{3x^2}{2}+C,\ C\in\mathbb{R}$

5.8. $\int\left(\frac{1-x^2}{x}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x}-x\right)dx=\ln|x|-\frac{x^2}{2}+C,\ C\in\mathbb{R}$

5.9. $\int\left(\frac{e^{2x}-e^x}{e^x}\right)dx=\int\left(\frac{e^{2x}}{e^x}-\frac{e^x}{e^x}\right)dx=\int(e^x-1)\,dx=$

$=e^x-x+C,\ C\in\mathbb{R}$

Questão 6

6. $g(x)=\int(x(x-1))\,dx=\int(x^2-x)\,dx=$

$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+C, C\in\mathbb{R}$;

$g(1)=0\Leftrightarrow\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}+C=0\Leftrightarrow C=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\Leftrightarrow C=\frac{1}{6}$

Logo, $g(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{6}$.

Pág. 16

Questão 7

7.1. $a(t)=30t$ cm/s^2; $p(1)=25$; $p(2)=80$

$v(t)=\int a(t)\,dt=\int 30t\,dt=30\times\frac{t^2}{2}+C=$

$=15t^2+C, C\in\mathbb{R}$

$p(t)=\int v(t)\,dt=\int(15t^2+C)\,dt=$

$=15\times\frac{t^3}{3}+Ct+D=5t^3+Ct+D,\ C, D\in\mathbb{R}$

$\begin{cases}p(1)=25\\p(2)=80\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5\times1^3+C\times1+D=25\\5\times2^3+C\times2+D=80\end{cases}\Leftrightarrow$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}D=20-C\\40+2C+20-C=80\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}D=20-C\\C=20\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}D=20-20\\C=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}D=0\\C=20\end{cases}$

$p(t)=5t^3+20t$

7.2 $v(t)=p'(t)=(5t^3+20t)'=15t^2+20$;

$v(2)=15\times2^2+20=60+20=80$

Para $t=2$, a velocidade do ponto é 80 cm/s.

Questão 8

8.1. $a(t)=v'(t)=0{,}8t+3$

8.2. $p(t)=\int v(t)\,dt=\int(0{,}4t^2+3t)\,dt=$

$=0{,}4\times\frac{t^3}{3}+3\times\frac{t^2}{2}+C,\ C\in\mathbb{R}$

MMA12DRAC © Porto Editora

$p(1) = 0{,}4 \times \frac{1^3}{3} + 3 \times \frac{1^2}{2} + C = \frac{4}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + C =$

$= \frac{4+45}{30} + C = \frac{49}{30} + C$;

$p(4) = 0{,}4 \times \frac{4^3}{3} + 3 \times \frac{4^2}{2} + C =$

$= \frac{4}{10} \times \frac{64}{3} + 3 \times \frac{16}{2} + C = \frac{256+720}{30} + C = \frac{976}{30} + C$

$|p(4) - p(1)| = \left|\frac{976}{30} + C - \frac{49}{30} - C\right| = \left|\frac{927}{30}\right| = 30{,}9$

Entre os instantes $t = 1$ e $t = 4$, o automóvel deslocou-se 30,9 metros.

Pág. 17

Questão 9

9. $v(2) = 5$ m/s; $a(2) = 2$ m/s^2; $a(t)$ é constante

Então, $a(t) = 2$.

$v(t) = \int a(t)\,dt = \int 2\,dt = 2t + C, C \in \mathbb{R}$;

$v(t) = 2t + C,\ C \in \mathbb{R}$

$v(2) = 5 \Leftrightarrow 2 \times 2 + c = 5 \Leftrightarrow c = 1$; $v(t) = 2t + 1$;

$p(t) = \int v(t)\,dt = \int (2t+1)\,dt = 2 \times \frac{t^2}{2} + t + D =$

$= t^2 + t + D, D \in \mathbb{R}$;

$p(0) = 1 \Leftrightarrow 0^2 - 2 \times 0 + d = 1 \Leftrightarrow d = 1$

Então, $p(t) = t^2 + t + 1$.

Questão 10

10. $c_m(x) = 0{,}2x + 20$

Seja $c(x)$ o custo de produção de x peças:

$c(100) = 4000$; $c(x) = \int c_m(x)\,dx =$

$= \int (0{,}2x + 20)\,dx = 0{,}2 \times \frac{x^2}{2} + 20x + C =$

$= 0{,}1x^2 + 20x + C, C \in \mathbb{R}$

$C(100) = 4000 \Leftrightarrow 0{,}1 \times 100^2 + 20 \times 100 + C = 4000 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1000 + 2000 + C = 4000 \Leftrightarrow C = 1000$

Então, $c(x) = 0{,}1x^2 + 20x + 1000$.

$c(250) = 0{,}1 \times 250^2 + 20 \times 250 + 1000 =$

$= 6250 + 5000 + 1000 = 12\,250$

O custo total para produzir 250 peças é 12 250 €.

Pág. 18

Tarefas de consolidação 1

1.1. $f(x) = x \sin x$;

$F(x) = \sin x - x \cos x + 2$

$F'(x) = (\sin x - x \cos x + 2)' =$

$= \cos x - \left[(x)' \cos x + x (\cos x)'\right] + 0 =$

$= \cos x - (\cos x - x \sin x) = \cos x - \cos x + x \sin x =$

$= x \sin x = f(x)$

Logo, F é uma primitiva de f.

1.2. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; $F(x) = \frac{\ln^2 x + 2}{2}$

$F'(x) = \left(\frac{1}{2}(\ln^2 x + 2)\right)' = \frac{1}{2}(\ln^2 x + 2)' =$

$= \frac{1}{2} \times \left(2 \ln x \times (\ln x)'\right) = \frac{1}{2} \times 2 \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x} = f(x)$

Logo, F é uma primitiva de f.

1.3. $f(x) = e^x (x+1)^2$; $F(x) = e^x (x^2 + 1)$

$F'(x) = \left[e^x (x^2+1)\right]' = (e^x)' (x^2+1) + e^x (x^2+1)' =$

$= e^x (x^2+1) + e^x \times 2x = e^x (x^2 + 1 + 2x) =$

$= e^x (x+1)^2 = f(x)$

Logo, F é uma primitiva de f.

2.1. $\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$

2.2. $\int -\sin x\,dx = -\int \sin x\,dx = -(-\cos x) + C = \cos x + C,$
$C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$

2.3. $\int (2 + x)\,dx = \int 2\,dx + \int x\,dx = 2x + \frac{x^2}{2} + C,$
$C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$

2.4. $\int -6x\,dx = -6 \int x\,dx = -6 \times \frac{x^2}{2} + C = -3x^2 + C, C \in \mathbb{R},$
$\forall x \in \mathbb{R}$

2.5. $\int \left(2e^x + \sin x + \frac{1}{x}\right) dx =$

$= 2 \int e^x\,dx + \int \sin x\,dx + \int \frac{1}{2}\,dx =$

$= 2e^x - \cos x + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$

2.6. $\int -\frac{2}{x^2}\,dx = -2 \int x^{-2}\,dx = -2 \times \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{2}{x} + C, C \in \mathbb{R},$
$\forall x \in \mathbb{R}$

2.7. $\int (-5x^4 - 2 \sin x)\,dx = -5 \int x^4\,dx - 2 \times \int \sin x\,dx =$

$= -5 \times \frac{x^5}{5} - 2(\cos x) + C = -x^5 + 2 \cos^x + C, C \in \mathbb{R},$
$\forall x \in \mathbb{R}$

2.8. $\int (2x-1)^2\,dx = \int (4x^2 - 4x + 1)\,dx =$

$= 4 \int x^2\,dx - 4 \int x\,dx + \int 1\,dx = 4 \frac{x^3}{3} - 4 \frac{x^2}{2} + x + C =$

$= \frac{4}{3} x^3 - 2x^2 + x + C,\ C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$

MMA12DRAC © Porto Editora

3. $g(x)=2\cos x-\frac{e^x}{3}$; $G(x)=\int\left(2\cos x-\frac{e^x}{3}\right)dx=$

$=2\int\cos x\,dx-\frac{1}{3}\int e^x\,dx=2\sin x-\frac{1}{3}e^x+C, C\in\mathbb{R}$

$G(0)=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow 2\sin 0-\frac{1}{3}e^0+C=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1}{3}+C=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow C=-\frac{2}{3}$

Então, $G(x)=2\sin x-\frac{e^x}{3}-\frac{2}{3}$

4. $f''(x)=12x^2+e^x$; $f'(0)=1$; $f(0)=0$

$f'(x)=\int f''(x)\,dx=\int\left(12x^2+e^x\right)dx=$

$=12\int x^2\,dx+\int e^x\,dx=12\times\frac{x^3}{3}+e^x+C_1=$

$=4x^4+e^x+C_1, C_1\in\mathbb{R}$

$f'(0)=1\Leftrightarrow 4\times 0^3+e^0+C_1=1\Leftrightarrow 1+C_1=1\Leftrightarrow C_1=0$

$f'(x)=4x^3+e^x$

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(4x^3+e^x\right)dx=4\int x^3\,dx+\int e^x\,dx=$

$=4\times\frac{x^4}{4}+e^x+C_2=x^4+e^x+C_2, C_2\in\mathbb{R}$;

$f(0)=0\Leftrightarrow 0^4+e^0+C_2=0\Leftrightarrow 1+C_2=0\Leftrightarrow C_2=-1$;

$f(x)=x^4+e^x-1$

Pág. 19

5. $F(x)=x^3-\frac{1}{x}, x\in\mathbb{R}^+$; $G(x)=4\sin x, x\in\mathbb{R}^+$

$h(x)=2f(x)-\frac{1}{4}g(x)$

$H(x)=\int h(x)\,dx=\int\left(2f(x)-\frac{1}{4}g(x)\right)dx=$

$=2\int f(x)\,dx-\frac{1}{4}\int g(x)\,dx=2F(x)-\frac{1}{4}G(x)+C, C\in\mathbb{R}$

$H(\pi)=2\pi^3\Leftrightarrow 2F(\pi)-\frac{1}{4}G(\pi)+C=2\pi^3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left(\pi^3-\frac{1}{\pi}\right)-\frac{1}{4}\times 0+C=2\pi^3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\pi^3-\frac{2}{\pi}+C=2\pi^3\Leftrightarrow C=\frac{2}{\pi}$

C.A. $\left|\ F(\pi)=\pi^3-\frac{1}{\pi}\ ;\ G(\pi)=4\sin\pi=0\right.$.

Então, $H(x)=2\left(x^3-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{4}\times 4\sin x+\frac{2}{\pi}=$

$=2x^3-\frac{2}{x}-\sin x+\frac{2}{\pi}$

6. $F(x)=5e^x+k\sin x+4$;

$F'(x)=f(x)\Leftrightarrow 5e^x+k\sin x+0=5e^x+2\cos x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k\cos x=2\cos x$

Então, $k=2$.

7. $f(x)=xe^x$; $F(x)=(ax+b)e^x$, $x\in\mathbb{R}$

7.1. $F'(x)=\left[(ax+b)e^x\right]'=$

$=(ax+b)'e^x+(ax+b)\left(e^x\right)'=$

$=ae^x+(ax+b)e^x=(ax+a+b)e^x$

Se F é uma primitiva de f, então:

$f(x)=(ax+a+b)e^x\Leftrightarrow xe^x=(ax+a+b)e^x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=ax+a+b\Leftrightarrow a=1\wedge a+b=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=1\wedge b=-a\Leftrightarrow a=1\wedge b=-1$

Logo, F é uma primitiva de f definida para $a=1\wedge b=-1$.

7.2. $F(x)=\int f(x)\,dx=\int xe^x\,dx=(x-1)e^x+C, C\in\mathbb{R}$

$F(0)=2\Leftrightarrow(0-1)e^0+C=2\Leftrightarrow -1+C=2\Leftrightarrow C=3$

$F(x)=(x-1)e^x+3$

8. $pr=2\pi r$

Seja $a(r)$ a função que define a área do círculo em função do raio r.

Sabemos que $a(r)=\pi r^2$. Seja $A(r)$ a primitiva de $p(r)$:

$A(r)=\int p(r)\,dr=\int(2\pi r)\,dr=2\pi\int r\,dr=$

$=2\pi\times\frac{r^2}{2}+C=\pi r^2+C$

Se $A(0)=0$, $\pi\times 0^2+C=0\Leftrightarrow C=0$

Então, $A(r)=\pi r^2=a(r)$.

9. $x(0)=0$; $v(t)=2t$;

$x(t)=\int v(t)\,dt=\int(2t)\,dt=2\times\frac{t^2}{2}+C=t^2+C, C\in\mathbb{R}$

$x(0)=0\Leftrightarrow 0^2+C=0\Leftrightarrow C=0$; então $x(t)=t^2$.

Ao fim de 10 segundos, o ponto móvel encontra-se a 100 m da origem.

Pág. 20

Tarefa 3

1.1. $A_{\triangle}=\frac{b\times h}{2}=\frac{3\times 3}{2}=\frac{9}{2}$ u. a.

1.2. $A_{\square}=b\times h=(4-1)\times 2=3\times 2=6$ u. a.

2.1. Cada quadrícula tem área 1. A região destacada na figura está limitada pela parábola e pelo eixo Ox. Observando a figura, conseguimos identificar 6 quadrículas completas totalmente contidos na região destacada. Logo, $A>6$. Por outro lado,

MMA12DRAC © Porto Editora

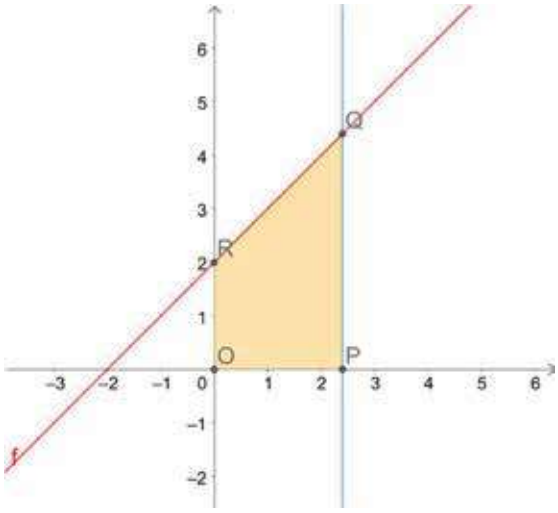
contando as quadrículas (completa e incompletas) da região destacada, verifica-se que existem 14. Assim, $6 < A < 14$.

2.2. Usando, por exemplo, uma malha quadriculada com menor lado.

Pág. 24

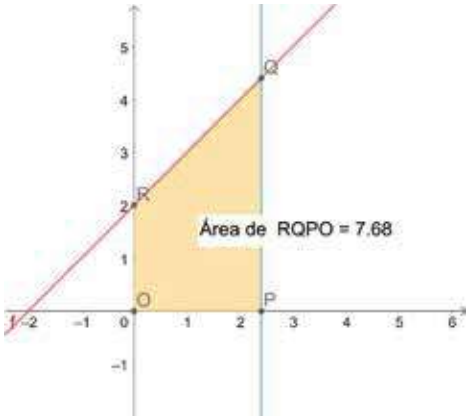
Tarefa 4

1. $f(x) = x + 2$

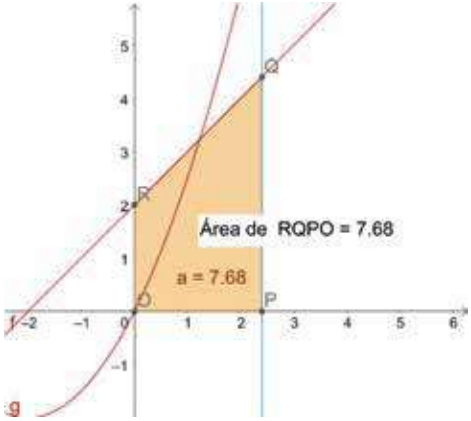


2. $A = \frac{B+b}{2} \times h = \frac{k+2+2}{2} \times k = \frac{k+4}{2} \times k = \frac{k^2+4k}{2}$ u.a.

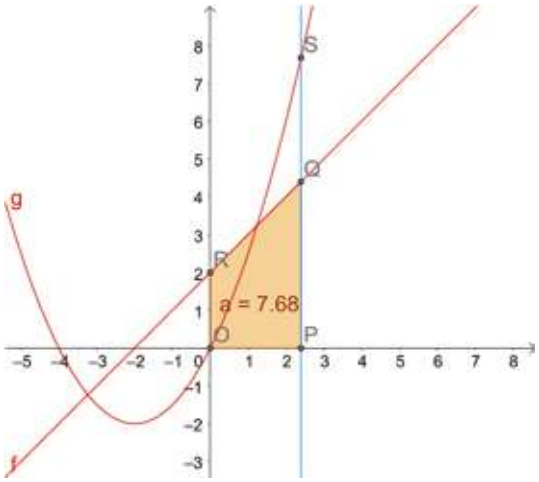
3.



4.



5.



6. A ordenada do ponto *S* é igual ao valor da área do quadrilátero.

7. Ao variar o parâmetro *k*, confirma-se que a área do trapézio é sempre igual a $F(k)$, isto é,

Área $= F(k) - F(0) = F(k) - 0 = F(k)$. A área sob o gráfico de *f* entre 0 e *k* é dada pela primitiva de *f* em *k*.

Pág. 25

Questão 11

11. $g(t) = t$; $A(x) = \int_a^x g(t)\,dt$

11.1. $A(x) = \frac{B+b}{2} \times h = \frac{g(x)+g(a)}{2} \times (x-a) =$

$= \frac{x+a}{2} \times (x-a) = \frac{(x+a)(x-a)}{2} = \frac{x^2-a^2}{2}$

11.2. $G(t) = \int_a^x g(t)\,dt = \int_a^x t\,dt = \frac{t^2}{2}$

$G(x) - G(a) = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{(x^2-a^2)}{2}$

Portanto, $A(x) = G(x) - G(a)$.

Pág. 26

Questão 12

12.1. $A_{\triangle} = \frac{b \times h}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = \frac{16}{2} = 8$ u. a.

A medida da área é 8 u. a.

12.2. Seja *F* a função primitiva.

$\int_0^4 (-x+4)\,dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 4x\right]_0^4 = F(4) - F(0) =$

$= -\frac{4^2}{2} + 4 \times 4 - \left(-\frac{0^2}{2} + 4 \times 0\right) = -8 + 16 = 8$

A medida da área é 8 u.a.

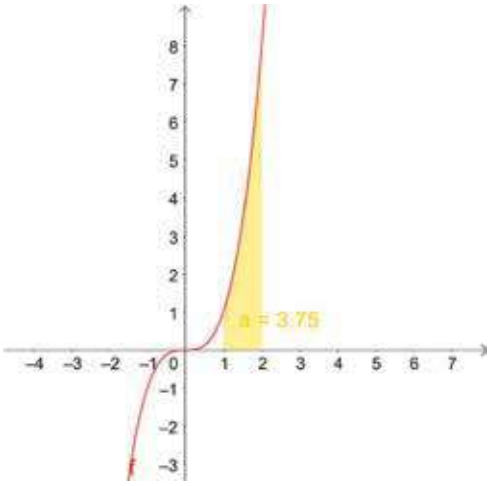
MMA12DRAC © Porto Editora

Pág. 27

Questão 13

13.1. $\int_1^2 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$

Geometricamente, significa que a medida da área delimitada pelo gráfico da função $y = x^3$, o eixo Ox e as retas de equações $x = 1$ e $x = 2$ é igual a $\frac{15}{4}$ u. a.

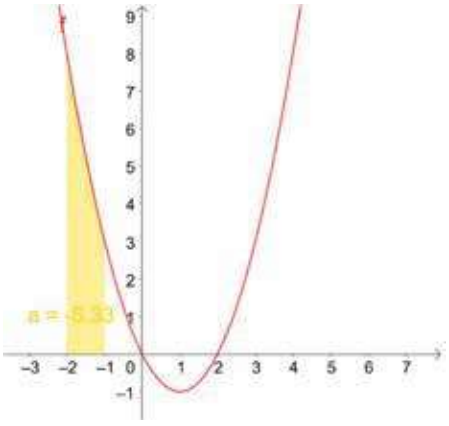


13.2. $\int_{-2}^{-1}\left(x^2 - 2x\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-2}^{-1} =$

$= \frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - \left[\frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2\right] = -\frac{1}{3} - 1 + \frac{8}{3} + 4 =$

$= \frac{16}{3}$

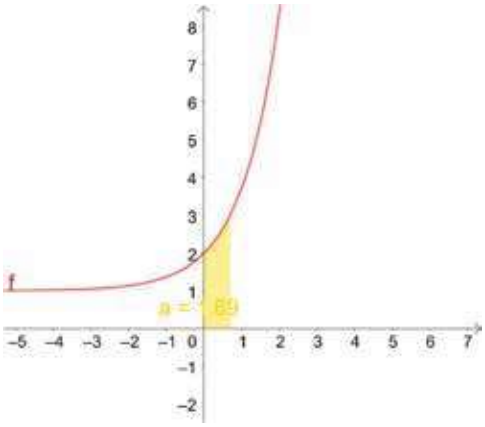
Geometricamente, significa que a medida da área delimitada pelo gráfico da função $y = x^3 - 2x$, o eixo Ox e as retas de equações $x = -2$ e $x = -1$ é igual a $\frac{16}{3}$ u. a.



13.3. $\int_0^{\ln 2}\left(e^x + 1\right)dx = \left[e^x + x\right]_0^{\ln 2} = e^{\ln 2} + \ln 2 - \left(e^0 + 0\right) =$

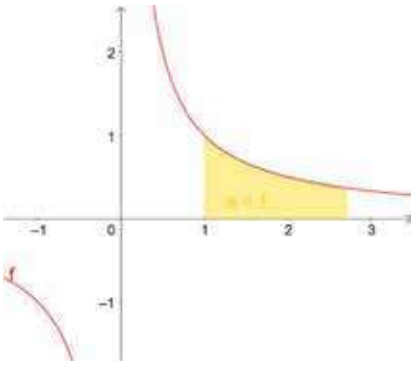
$= 2 + \ln 2 - 1 = 1 + \ln 2$

Geometricamente, significa que a medida da área delimitada pelo gráfico da função $y = e^x + 1$, o eixo Ox e as retas de equações $x = 0$ e $x = \ln 2$ é igual a $\left(1 + \ln 2\right)$ u. a.



13.4. $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln|x|\right]_1^e = \ln|e| - \ln|1| = 1 - 0 = 1$

Geometricamente, significa que a medida da área delimitada pelo gráfico da função $y = \frac{1}{x}$, o eixo Ox e as retas de equações $x = 1$ e $x = e$ é igual a 1 u. a.



14.1. $\int_0^1\left(-x^2 + 4\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_0^1 =$

$= -\frac{1^3}{3} + 4 \times 1 - \left(\frac{0^3}{3} + 4 \times 0\right) = -\frac{1}{3} + 4 = \frac{11}{3}$

A medida da área é $\frac{11}{3}$ u. a.

14.2. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2$

A medida da área é 2 u. a.

Pág. 29

Questão 15

15.1.

$A = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2\left(-x + 2\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2 =$

$= \frac{1}{2} - 0 + \left[-\frac{4}{2} + 4 - \left(-\frac{1}{2} + 2\right)\right] =$

$= \frac{1}{2} + \left(\cancel{-2} \cancel{+4} + \frac{1}{2} \cancel{-2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

A medida da área é 1 u. a.

MMA12DRAC © Porto Editora

15.2.

$$A=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x+\int_1^2(-x+2)\,\mathrm{d}x=$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2=$$
$$=\frac{1}{3}-0+\left[-\frac{4}{2}+4-\left(-\frac{1}{2}+2\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{3}+\left(\cancel{-2}\cancel{+4}+\frac{1}{2}\cancel{-2}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

A medida da área é $\frac{5}{6}$ u. a.

Pág. 30

Questão 16

$f(x)=\cos x\ ;\ \ g(x)=\sin x$

16.1. a) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos x\,\mathrm{d}x=\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=$

$=\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

b) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} g(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,\mathrm{d}x=\left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=$

$=-\cos\frac{\pi}{3}-\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

16.2. A função *f* é contínua e não negativa em $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$.

Vamos aplicar a linearidade do integral definido.

16.2. a) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left[2f(x)\right]\mathrm{d}x=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x=2\times\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\sqrt{3}-1$

b) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left[2f(x)+k\sin x\right]\mathrm{d}x=\sqrt{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x+k\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,\mathrm{d}x=\sqrt{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\times\frac{\sqrt{3}-1}{2}+k\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{\sqrt{3}}-1+k\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)=\cancel{\sqrt{3}}\Leftrightarrow k\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=1\times\frac{2}{\sqrt{3}-1}\Leftrightarrow k=\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\frac{\cancel{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\cancel{2}}\Leftrightarrow k=\sqrt{3}+1$

Pág. 31

Questão 17

17. $v_A(x)=8$ m/s ; $a_B=2$ m/s^2 ;

$s_A(t)-s_A(0)=\int_0^t v_A(x)\,\mathrm{d}x$ e $s_A(0)=9$ (num determinado instante o automóvel *A* encontra-se 9 m à frente do automóvel *B*).

$s_A(t)-s_A(0)=\int_0^t v_A(x)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow s_A(t)-9=\int_0^t 8\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s_A(t)-9=\left[8x\right]_0^t\Leftrightarrow s_A(t)-9=8t\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s_A(t)=8t+9$

$v_B(t)-v_B(0)=\int_0^t a_B(x)\,\mathrm{d}x$ e $v_B(0)=0$

(o automóvel *B* inicia o seu movimento no instante $t=0$).

$v_B(t)-v_B(0)=\int_0^t a_B(x)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow v_B(t)-0=\int_0^t 2\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v_B(t)=\left[2x\right]_0^t\Leftrightarrow v_B(t)=2t$

$s_B(t)-s_B(0)=\int_0^t v_B(x)\,\mathrm{d}x$ e $s_B(0)=0$ (o automóvel *B* inicia o seu movimento no instante $t=0$).

$s_B(t)-s_B(0)=\int_0^t v_B(x)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow s_B(t)-0=\int_0^t(2x)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s_B(t)=\left[\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}\right]_0^t\Leftrightarrow s_B(t)=t^2$

$s_B(t)=s_A(t)\Leftrightarrow t^2=8t+9\Leftrightarrow t^2-8t-9=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\times1\times(-9)}}{2\times1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\frac{8\pm\sqrt{64+36}}{2}\Leftrightarrow t=\frac{8\pm10}{2}\Leftrightarrow t=9\ \vee\ t=-1$

Como $t\geq0$, $t=9$. O automóvel *B* alcança o automóvel *A* ao fim de 9 segundos.

Questão 18

18. $a(t)=6t^2-6$

Se a partícula, no instante $t=0$, se encontra imobilizada na origem, sabe-se que: $s(0)=0$ m e $v(0)=0$ m/s.

18.1. $a(1)=6\times1^2-6=0$ m/s^2

No instante $t=1$, a aceleração da partícula foi 0 m/s^2.

18.2. $v(t)-v(0)=\int_0^t a(x)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v(t)-0=\int_0^t\left(6x^2-6\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow v(t)=\left[6\frac{x^3}{3}-6x\right]_0^t\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v(t)=\left[2x^3-6x\right]_0^t\Leftrightarrow v(t)=2t^3-6t$

$v(1)=2\times1^3-6\times1=-4$ m/s

MMA12DRAC © Porto Editora

No instante $t = 1$, a velocidade da partícula foi -4 m/s.

18.3. $s(t) - s(0) = \int_0^t v(x)\,dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s(t) = \int_0^t (2x^3 - 6x)\,dx \Leftrightarrow s(t) = \left[2\frac{x^4}{4} - \frac{6x^2}{2}\right]_0^t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s(t) = \left[\frac{x^4}{2} - 3x^2\right]_0^t \Leftrightarrow s(t) = \frac{t^4}{2} - 3t^2$

$s(1) = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2} = -2{,}5$

No instante $t = 1$, a partícula encontra-se na parte negativa do eixo onde se desloca a 2,5 m da origem.

Pág. 32

Questão 19

19. $f(x) \geq g(x)$ para $x \in [0, 2]$.

$A = \int_0^2 [f(x) - g(x)]\,dx =$

$= \int_0^2 \left(-x^2 \cancel{+4} - x^2 + 4x \cancel{-4}\right) dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x)\,dx =$

$= \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right]_0^2 = \left[-\frac{2x^3}{3} + 2x^2\right]_0^2 =$

$= -\frac{2 \times 2^3}{3} + 2 \times 2^2 - 0 = -\frac{16}{3} + 8 = \frac{8}{3}$

A medida da área é $\frac{8}{3}$ u. a.

Pág. 33

Questão 20

20.1. Abcissas dos pontos de interseção:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 5x - x^2 = 2x \Leftrightarrow -x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(-x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee -x + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

Os gráficos de *f* e *g* intersetam-se nos pontos de abcissas 0 e 3.

Cálculo da área:

Em $[0, 3]$, $f(x) \geq g(x)$.

$A = \int_0^3 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^3 (5x^2 - x^2 - 2x)\,dx =$

$= \int_0^3 (-x^2 + 3x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 =$

$= -\frac{3^3}{3} + \frac{3 \times 3^2}{2} - 0 = -\frac{27}{3} - \frac{27}{2} = \frac{9}{2}$

A medida da área da região colorida é $\frac{9}{2}$ u. a.

20.2. Em $[0, 2]$, $g(x) \geq f(x)$

$A = \int_0^2 [g(x) - f(x)]\,dx = \int_0^2 (e^3 - e^x)\,dx =$

$= \left[e^3 - e^x\right]_0^2 = 2e^3 - e^2 - (0 - e^0) = 2e^3 - e^2 + 1$

A medida da área da região colorida é $(2e^3 - e^2 + 1)$ u. a.

Pág. 34

Tarefas de consolidação 2

1.1. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (3x^2 + \sin x)\,dx = \left[\frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} - \cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$

$= \pi^3 - \cos\pi - \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \cos\frac{\pi}{2}\right] = \pi^3 + 1 - \frac{\pi^3}{8} + 0 =$

$= \frac{7\pi^3}{8} + 1$

1.2. $\int_1^e \left(\frac{1}{x} + 2e^x\right) dx = \left[\ln|x| + 2e^x\right]_1^e =$

$= \ln|e| + 2e^e - (\ln|1| + 2e^1) = 1 + 2e^e - 0 - 2e =$

$= 1 + 2e^e - 2e$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1$

No intervalo de $[0, \pi]$ a função $\sin x$ é positiva e simétrica em relação à reta $x = \frac{\pi}{2}$. Assim, como

$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$ e

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$, $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 1 + 1 = 2$.

Opção (D)

3. $f(x) = k,\ k > 0$

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b k\,dx = [kx]_a^b = kb - ka = k(b - a)$

Geometricamente, significa que a medida da área delimitada pelo gráfico de *f*, o eixo Ox e as retas de equações $x = a$ e $x = b$ é um retângulo de base $b - a$ e altura *k*.

4. $g(x) = 2e^x$; $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt = \int_0^x 2e^t\,dt = \left[2e^t\right]_0^x =$

$= 2e^x - 2e^0 = 2e^x - 2$

4.1. Pelo teorema fundamental do cálculo,

$G'(x) = g(x) = 2e^x$

4.2. $y = mx + b$; $y = 2x + b$; $y = 2x$

C.A. $G(0) = 2e^0 - 2 = 2 - 2 = 0$; $(0, 0)_b$;

$m = G'(0) = 2e^0 = 2$

5. $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x + 3$;

$A = \int_{-1}^3 f(x)\,dx = \int_{-1}^3 (-x^3 + 3x^2 - x + 3)\,dx =$

MMA12DRAC © Porto Editora

$$=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{3x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-1}^{3}=-\frac{3^4}{4}+\frac{3\times3^3}{3}-\frac{3^2}{2}+3\times3-$$

$$-\left[-\frac{(-1)^4}{4}+\frac{\cancel{3}(-1)^3}{\cancel{3}}-\frac{(-1)^2}{2}+3\times(-1)\right]=$$

$$=-\frac{81}{4}+\frac{81}{3}-\frac{9}{2}+9-\left(-\frac{1}{4}-1-\frac{1}{2}-3\right)=$$

$$=-\frac{81}{4}+\frac{81}{3}-\frac{9}{2}+9+\frac{1}{4}+1+\frac{1}{2}+3=16$$

A medida da área é 16 u. a.

Pág. 35

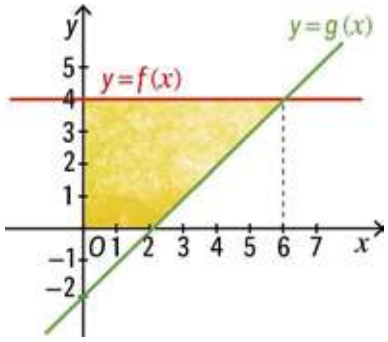
6. $f(x)=4;\ g(x)=x-2$.

C.A. $\left|\ (6,4);\ \underset{b}{(0,-2)};\ m=\frac{-2-4}{0-6}=1;\ y=x-2\right.$

6.1. $\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 4\,dx=[4x]_0^2=4\times2-4\times0=8$

6.2. $\int_2^6 f(x)\,dx=\int_2^6 4\,dx=[4x]_2^6=4\times6-4\times2=16$

6.3. Em $[0,6]$, $f(x)\geq g(x)$.



$$A=\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^6\left[f(x)-g(x)\right]dx=$$

$$=\int_0^2 4\,dx+\int_2^6\left[4-(x-2)\right]dx=$$

$$=[4x]_0^2+\int_2^6[4-x+2]\,dx=$$

$$=4\times2-0+\int_2^6(6-x)\,dx=8+\left[6x-\frac{x^2}{2}\right]_2^6=$$

$$=8+6\times6-\frac{6^2}{2}-\left(6\times2-\frac{2^2}{2}\right)=$$

$$=8+36-\frac{36}{2}-12+2=16$$

A medida da área é 16 u. a.

7. Abcissas dos pontos de interseção dos gráficos:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow\frac{1}{2}x=-x^2+3x\Leftrightarrow2x^2-5x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(2x-5)=0\Leftrightarrow x=0\vee2x-5=0\Leftrightarrow$$

Os gráficos de *f* e *g* intersetam-se nos pontos de abcissas 0 e $\frac{5}{2}$.

Cálculo da área:

Em $\left[0,\frac{5}{2}\right]$, $g(x)\geq f(x)$.

$$A=\int_0^{\frac{5}{2}}\left[g(x)-f(x)\right]dx=\int_0^{\frac{5}{2}}\left[-x^2+3x-\frac{1}{2}x\right]dx=$$

$$=\int_0^{\frac{5}{2}}\left(-x^2+\frac{5}{2}x\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}\times\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{5}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^3+\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}\right)^2-0=$$

$$=-\frac{1}{3}\times\frac{125}{8}+\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{25}{4}=-\frac{125}{24}+\frac{125}{16}=\frac{125}{48}$$

A medida da área é $\frac{125}{48}$ u. a.

8. $\int_1^8 f(x)\,dx=\int_1^5 f(x)\,dx+\int_5^8 f(x)\,dx\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow12=\int_1^5 f(x)\,dx+5\Leftrightarrow\int_1^5 f(x)\,dx=12-5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_1^5 f(x)\,dx=7$$

$$\int_1^5\left[3f(x)-2\right]dx=3\int_1^5 f(x)\,dx-\int_1^5 2\,dx=$$

$$=3\times7-[2x]_1^5=21-(2\times5-2\times1)=21-10+2=13$$

9.1. **a)** $f(x)=3\sin x$, $1=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;

$$m=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\sin x)\,dx=\frac{2}{\pi}\left[-3\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-3\cos\frac{\pi}{2}-(-3\cos0)\right]=\frac{2}{\pi}(-3\times0+3)=\frac{6}{\pi}$$

b) $f(x)=\frac{3}{x}$, $1=\left[\mathrm{e},\mathrm{e}^2\right]$;

$$m=\frac{1}{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}}\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{3}{x}\,dx=\frac{1}{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}}\left[3\ln|x|\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}}\left(3\ln\left|\mathrm{e}^2\right|-3\ln|\mathrm{e}|\right)=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}}(3\times2-3\times1)=\frac{3}{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}}$$

9.2. $h(x)=k$, $m(h)=\frac{1}{b-a}\int_a^b h(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b k\,dx=$

$$=\frac{1}{b-a}[kx]_a^b=\frac{1}{b-a}[kb-ka]=\frac{kb-ka}{b-a}=$$

$$=\frac{k\cancel{(b-a)}}{\cancel{b-a}}\underset{b-a\neq0}{=}k$$

10. $-1\leq x\leq2\ \wedge\ 0\leq y\leq2x^2-2x$

Abcissas dos pontos de interseção da função $y=2x^2-2x$ com o Ox:

$$2x^2-2x=0\Leftrightarrow2x(x-1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0\vee x-1=0\Leftrightarrow x=0\vee x=1$$

As abcissas são 0 e 1.

MMA12DRAC © Porto Editora



$$A=\int_{-1}^{0}\left(2x^2-2x\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}\left(2x^2-2x\right)\mathrm{d}x=$$

$$=2\int_{-1}^{0}\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x+2\int_{1}^{3}\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x=$$

$$=2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{3}=$$

$$=2\times 0-2\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+2\left[\frac{3^3}{3}-\frac{3^2}{2}-\left(\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{2}{3}+1+18-9-\frac{2}{3}+1=11$$

A medida da área é 11 u.a.

Tarefas complementares

Pág. 38

1. **(A)** $F'(x)=\left(x^4+x^2\right)'=4x^3+2x=f(x)$

(B) $F'(x)=\left(12x^2+2\right)'=24x\neq f(x)$

(C) $F'(x)=\left(4x^4+2x^2\right)'=16x^3+4x\neq f(x)$

(D) $F'(x)=\left(4x^3+2x\right)'=12x^2+2\neq f(x)$

(A) é a opção correta.

2. $$F'(x)=\frac{\left(x^2+3x-1\right)'(x-1)-\left(x^2+3x-1\right)(x-1)'}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{(2x+3)(x-1)-\left(x^2+3x-1\right)\times 1}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-2x+3x-3-x^2-3x+1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$$

$$G'(x)=\frac{\left(x^2+7x-5\right)'(x-1)-\left(x^2+7x-5\right)(x-1)'}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{(2x+7)(x-1)-\left(x^2+7x-5\right)\times 1}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-2x+7x-7-x^2-7x+5}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$$

Como $F'(x)=G'(x)$, F e G são duas primitivas da mesma função.

3.1. $f(x)=\dfrac{2\left(x^4-1\right)}{x^3}$; $F(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$

$$F'(x)=\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)'=2x+\left(x^{-2}\right)=2x+(-2)x^{-3}=$$

$$=2x-\frac{2}{x^3}=\frac{2x^4-2}{x^3}=\frac{2\left(x^4-1\right)}{x^3}=f(x)$$

Como $F'(x)=f(x)$, a função F é uma primitiva de f.

3.2. $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$; $F(x)=x-\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)$

$$F'(x)=\left(x-\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)\right)'=1-\frac{\left(1+\mathrm{e}^x\right)'}{1+\mathrm{e}^x}=1-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=$$

$$=\frac{1+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}=f(x)$$

Como $F'(x)=f(x)$, a função F é uma primitiva de f.

3.3. $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$; $F(x)=\ln(\ln x)$

$$F'(x)=\left(\ln(\ln x)\right)'=\frac{(\ln x)'}{\ln x}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\frac{1}{x\ln x}=f(x)$$

Como $F'(x)=f(x)$, a função F é uma primitiva de f.

3.4. $f(x)=\cos x-x\sin x$; $F(x)=x\cos x$

$$F'(x)=(x\cos x)'=(x)'\cos x+x(\cos x)'=$$

$$=1\cos x+x\times(-\sin x)=\cos x-x\sin x=f(x)$$

Como $F'(x)=f(x)$, a função F é uma primitiva de f.

4. **(A)** $\left(G(x)+3\right)'=G'(x)+0=g(x)$

(B) $\left(G(x)-10\right)'=G'(x)-0=g(x)$

(C) $\left(-G(x)+2G(x)\right)'=\left(G(x)\right)'=G'(x)=g(x)$

(D) $\left(-2G(x)+1\right)'=-2G'(x)+0=-2G'(x)=$
$=-2g(x)\neq g(x)$

(D) é a opção correta.

Pág. 39

5.1. $f(x)=\mathrm{e}^2$; $F(x)=\int \mathrm{e}^2\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^2x+C, C\in\mathbb{R}$

5.2. $f(x)=x^2$; $F(x)=\int x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+c, c\in\mathbb{R}$

5.3. $f(x)=(2x)^2=4x^2$; $F(x)=\int(2x)^2\,\mathrm{d}x=4\int x^2\,\mathrm{d}x=$

$$=4\times\frac{x^3}{3}+c=\frac{4x^3}{3}+C, C\in\mathbb{R}$$

5.4. $f(x)=5x^3-\dfrac{x}{2}+3\cos x$;

$$F(x)=\int\left(5x^3-\frac{x}{2}+3\cos x\right)\mathrm{d}x=$$

$$=5\int x^3\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x+3\int\cos x\,\mathrm{d}x=$$

$$=5\times\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2}+3\sin x+C=$$

MMA12DRAC © Porto Editora

$= \frac{5x^4}{4} - \frac{x^2}{4} + 3\sin x + C, C \in \mathbb{R}$

6.1. $\int x^{10}\,dx = \frac{x^{11}}{11} + C, C \in \mathbb{R}$

6.2. $\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}, (x \neq 0)$

6.3. $\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C, C \in \mathbb{R}$

6.4. $\int (2\cos x)\,dx = 2\int \cos x\,dx = 2\sin x + C, C \in \mathbb{R}$

6.5. $\int 2e^x\,dx = 2\int e^x\,dx = 2e^x + C, C \in \mathbb{R}$

6.6. $\int -\sin x\,dx = -\int \sin x\,dx = -(-\cos x) + C =$

$= \cos x + C, C \in \mathbb{R}$

6.7. $\int (x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x + 3)\,dx =$

$= \frac{x^5}{5} - 4 \times \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 4 \times \frac{x^2}{2} + 3x + C =$

$= \frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + C, C \in \mathbb{R}$

6.8. $\int \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\int (x^2 - 2x + 1)\,dx =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - 2 \times \frac{x^2}{2} + x\right) + C = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + C, C \in \mathbb{R}$

6.9. $\int (2\sin x - 3\cos x)\,dx = 2\int \sin x\,dx - 3\int \cos x\,dx =$

$= 2(-\cos x) - 3\sin x + C = -2\cos x - 3\sin x + C, C \in \mathbb{R}$

6.10. $\int [(1-x)(1+x)]\,dx = \int (1 - x^2)\,dx = x - \frac{x^3}{3} + C =$

$= -\frac{x^3}{3} + x + C, C \in \mathbb{R}$

7. $v(t) = 6t + 2$; $p(0) = 4$ cm

$p(t) = \int v(t)\,dt = \int (6t + 2)\,dt = 6 \times \frac{t^2}{2} + 2t + C, C \in \mathbb{R}$

$p(t) = 3t^2 + 2t + C, C \in \mathbb{R}$;

$p(0) = 4 \Leftrightarrow 3 \times 0^2 + 2 \times 0 + C = 4 \Leftrightarrow C = 4$

Então, $p(t) = 3t^2 + 2t + 4$.

$p(2) = 3 \times 2^2 + 2 \times 2 + 4 = 12 + 4 + 4 = 20$ cm

Ao fim de 2 segundos a posição do ponto é 20 cm.

8. $a(5) = 3$ cm/s^2; $v(1) = 4$ cm/s; $p(0) = 2$ cm

$a(t)$ é constante. Então, $a(t) = 3$.

$v(t) = \int a(t)\,dt = \int 3\,dt = 3t + C, C \in \mathbb{R}$;

$v(1) = 4 \Leftrightarrow 3 \times 1 + C = 4 \Leftrightarrow C = 1$; $v(t) = 3t + 1$

$p(t) = \int v(t)\,dt = \int (3t + 1)\,dt = 3 \times \frac{t^2}{2} + t + C, C \in \mathbb{R}$

$p(t) = 1{,}5t^2 + t + C, C \in \mathbb{R}$;

$p(0) = 2 \Leftrightarrow 1{,}5 \times 0^2 + 0 + C \Leftrightarrow C = 2$

Então, $p(t) = 1{,}5t^2 + t + 2$.

Pág. 40

9. $f''(x) = 6x + \cos x$;

$f'(0) = 0$; $f(0) = 5$

$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int (6x + \cos x)\,dx =$

$= 6\int x\,dx + \int \cos x\,dx = 6 \times \frac{x^2}{2} + \sin x + C =$

$= 3x^2 + \sin x + C, C \in \mathbb{R}$

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow 3 \times 0^2 + \sin 0 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0$

Então, $f'(x) = 3x^2 + \sin x$

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (3x^2 + \sin x)\,dx =$

$= 3\int x^2\,dx + \int \sin x\,dx =$

$= 3 \times \frac{x^3}{3} - \cos x + C = x^3 - \cos x + C, C \in \mathbb{R}$;

$f(0) = 5 \Leftrightarrow 0^3 - \cos 0 + C = 5 \Leftrightarrow -1 + C = 5 \Leftrightarrow C = 6$

Então, $f(x) = x^3 - \cos x + 6$.

10. $g'(x) = 3x^2 + 4$; $y = 7x + 5$ e a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1. Então,

$g'(1) = 7$ e $g(1) = 7 \times 1 + 5 = 12$.

$g(x) = \int g'(x)\,dx = \int (3x^2 + 4)\,dx =$

$= 3 \times \frac{x^3}{3} + 4x + C = x^3 + 4x + C, C \in \mathbb{R}$;

$g(1) = 12 \Leftrightarrow 1^3 + 4 \times 1 + C = 12 \Leftrightarrow C = 12 - 5 \Leftrightarrow C = 7$

Então, $g(x) = x^3 + 4x + 7$

Pág. 41

11. $h'(x) = \frac{(x-2)^2}{x} = \frac{x^2 - 4x + 4}{x} = x - 4 + \frac{4}{x}$

$h(x) = \int h'(x)\,dx = \int \left(x - 4 + \frac{4}{x}\right) dx =$

$= \frac{x^2}{2} - 4x + 4 \times \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$;

$h(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1^2}{2} - 4 \times 1 + 4\ln|1| + C = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - 4 + 0 + c = 0 \Leftrightarrow C = \frac{7}{2}$

Então, $h(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + 4\ln|x| + \frac{7}{2}$

12. $f(x) = \sin x - 2\cos x$; $F(x) = \int (\sin x - 2\cos x)\,dx =$

$= \int \sin x\,dx - 2\int \cos x\,dx = -\cos x - 2\sin x + C$

12.1. $F(0) = 1 \Leftrightarrow -\cos 0 - 2\sin 0 + C = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 - 2 \times 0 + C = 1 \Leftrightarrow C = 2$

MMA12DRAC © Porto Editora

Então, $F(x) = -\cos x - 2\sin x + 2$.

12.2. $F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + C = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0 - 2\times(-1) + C = 0 \Leftrightarrow C = -2$

Então, $F(x) = -\cos x - 2\sin x - 2$.

13. $F(x) = ke^x + 5\sin x + C,\ k, C \in \mathbb{R}$;

$f(x) = 2e^x + 5\cos x$; $F'(x) = ke^x + 5\cos x$

$F'(x) = f(x)$. Então, $k = 2$.

$k = 2$ e $C \in \mathbb{R}$

14. $F(x) = \sin x$; $G(x) = x^4$

$H(x) = \int 2f(x) - \frac{g(x)}{4}\,dx = 2\int f(x)\,dx - \frac{1}{4}\int g(x)\,dx =$

$= 2F(x) - \frac{1}{4}G(x) + C = 2\sin x - \frac{1}{4}x^4 + C$;

$H(0) = 0 \Leftrightarrow 2\times 0 - \frac{1}{4}\times 0^4 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0$

Então, $H(x) = 2\sin x - \frac{x^4}{4}$

15.1. $h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$; $h_0 = 80$ m; $v_0 = 20$ m/s;

$g \approx 9{,}8\ \text{m/s}^2$; $h(t) = 80 + 20t - \frac{1}{2}\times 9{,}8t^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h(t) = -4{,}9t^2 + 20t + 80, t \geq 0$.

15.2. $v(t) = h'(t) = \left(-4{,}9t^2 + 20t + 80\right)' =$

$= -9{,}8t + 20 + 0$

$v(3) = -9{,}8\times 3 + 20 = -29{,}4 + 20 = -9{,}4$

3 s após o lançamento, a velocidade da bola é 9,4 m/s no movimento descendente $(v(3) < 0)$.

15.3. $h(t) = 0 \Leftrightarrow -4{,}9t^2 + 20t + 80 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4\times(-4{,}9)\times 80}}{2\times(-4{,}9)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \frac{-20 \pm \sqrt{1968}}{-9{,}8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t \approx \frac{-20 - 44{,}36}{-9{,}8} \vee t \approx \frac{-20 + 44{,}36}{-9{,}8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t \approx 6{,}6 \vee t \approx -2{,}5$

Como $t \geq 0$, tem-se que $t \approx 6{,}6$. A bola atingiu a água do rio ao fim de cerca de 6,6 segundos.

Pág. 42

16.1. $\int_0^x \cos t\,dt = \left[\sin t\right]_0^x = \sin x - \sin 0 = \sin x$;

$(\sin x)' = \cos x$

16.2. $\int_0^x e^t\,dt = \left[e^t\right]_0^x = e^x - e^0 = e^x - 1$; $\left(e^x - 1\right)' = e^x$

16.3. $\int_0^x 2t^2\,dt = \left[2\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}\times 0^3 = \frac{2}{3}x^3$;

$\left(\frac{2}{3}x^3\right)' = \frac{2}{3}\times 3x^2 = 2x^2$

16.4. $\int_0^2 2t\,dt = \left[2\frac{t^2}{2}\right]_0^2 = \left[t^2\right]_0^2 = 2^2 - 0^2 = 4$; $(4)' = 0$

17. $A\left(0, \underset{b}{4}\right)$; $B(4, 0)$; $m_{AB} = \frac{0-4}{4-0} = -1$; $y = mx + b$

$y = -x + 4$; $f(x) = -x + 4$;

$\int_0^4 (-x + 4)\,dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 4x\right]_0^4 =$

$= -\frac{4^2}{2} + 4\times 4 - \left(-\frac{0^2}{2} + 4\times 0\right) = -\frac{16}{2} + 16 = \frac{16}{2} = 8$

Opção (C)

Outro modo: $\int_0^4 f(x)\,dx = \frac{4\times 4}{2} = 8$

18. f é uma função constante que contém o ponto $(0, b)$.

$f(x) = b$; $\int_0^b b\,dx = \left[bx\right]_0^b = b\times b - b\times 0 = b^2$

Opção (B)

19. $\int_{-2}^1 f(x)\,dx = \int_{-2}^1 \left(x^2 + 1\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-2}^1 =$

$= \frac{1^3}{3} + 1 - \left[\frac{(-2)^3}{3} + (-2)\right] = \frac{1}{3} + 1 - \left(-\frac{8}{3} - 2\right) =$

$= \frac{1}{3} + 1 + \frac{8}{3} + 2 = 6$

A medida da área é 6 u. a.

Pág. 43

20. $\int_{-2}^1 f(x)\,dx = \int_{-2}^1 \left(-x^2 + 4\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^1 =$

$= -\frac{1^3}{3} + 4\times 1 - \left[-\frac{(-2)^3}{3} + 4\times(-2)\right] =$

$= -\frac{1}{3} + 4 - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = -\frac{1}{3} + 4 - \frac{8}{3} + 8 = 9$

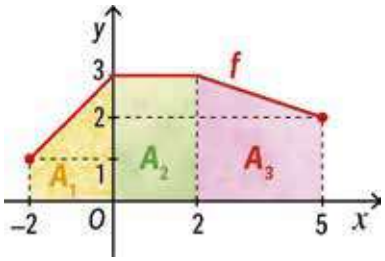
A medida da área é igual a 9 u. a.

21.1. $\int_{-2}^5 f(x)\,dx = A_1 + A_2 + A_3 =$

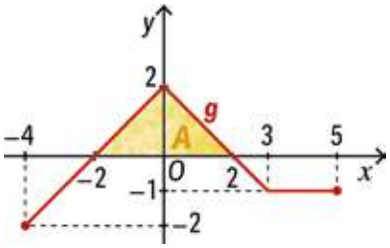
$= \frac{3+1}{2}\times 2 + 2\times 3 + \frac{3+2}{2}\times 3 = 2\times 2 + 6 + \frac{5}{2}\times 3 =$

$= 2\times 2 + 6 + \frac{5}{2}\times 3 = 4 + 6 + \frac{15}{2} = \frac{35}{2}$ u. a.

MMA12DRAC © Porto Editora



21.2. $\int_{-2}^{2} g(x)\,dx = A = \frac{4\times 2}{2} = 4$ u. a.



22. $\int_a^b f(x)\,dx = 5$; $\int_a^b g(x)\,dx = 10$;

$\int_a^b [3f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b 3f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx =$

$= 3\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = 3\times 5 - 10 = 5$

Opção (C)

23.1. $\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} (2\sin x)\,dx = 2\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2[-\cos x]_0^{\pi} =$

$= 2[-\cos\pi - (-\cos 0)] = 2[-(-1) - (-1)] = 2(1+1) = 4$

23.2. $\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{\pi}\right) dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin x\,dx + \int_0^{\pi} \frac{1}{\pi}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_0^{\pi} \frac{1}{\pi}\,dx = \frac{1}{2}[-\cos x]_0^{\pi} + \left[\frac{x}{\pi}\right]_0^{\pi} =$

$= \frac{1}{2}[-\cos\pi - (-\cos 0)] + \frac{\pi}{\pi} - \frac{0}{\pi} =$

$= \frac{1}{2}(-(-1) - (-1)) + 1 = \frac{1}{2}(1+1) + 1 = 2$

Pág. 44

24.1. $\int_1^5 2\,dx = [2x]_1^5 = 2\times 5 - 2\times 1 = 8$

24.2. $\int_0^1 (4x^3 - 2x + 1)\,dx = \left[\frac{4x^4}{4} - \frac{2x^2}{2} + x\right]_0^1 =$

$= [x^4 - x^2 + x]_0^1 = 1^4 - 1^2 + 1 - 0 = 1$

24.3. $\int_1^e \frac{2}{x}\,dx = 2\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = 2[\ln|x|]_1^e = 2(\ln|e| - \ln|1|) =$

$= 2(\ln e - \ln 1) = 2(1-0) = 2$

24.4. $\int_{-\pi}^{0} -2\sin x\,dx = -2\int_{-\pi}^{0} \sin x\,dx = -2[-\cos x]_{-\pi}^{0} =$

$= -2[-\cos 0 - (-\cos(-\pi))] = -2(-1-1) = 4$

25.1. $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

25.2. $\int_{-1}^{3} g(x)\,dx = \int_{-1}^{0} g(x)\,dx + \int_0^3 g(x)\,dx =$

$= \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_0^3 x\,dx = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 =$

$= -\left(\frac{0}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{9}{2} - 0\right) = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = \frac{10}{2} = 5$

26. $f(x) \geq g(x)$ para $x \in [0, \pi]$.

$A = \int_0^{\pi} [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^{\pi} (3\sin x - \sin x)\,dx =$

$= \int_0^{\pi} (2\sin x)\,dx = [-2\cos x]_0^{\pi} = -2\times(-1) - (-2)\times 1 =$

$= 2 + 2 = 4$

A medida da área é 4 u. a.

27. $f(x) \geq g(x)$ para $x \in [0, 1]$.

$A = \int_0^1 [f(x) - g(x)]\,dx =$

$= \int_0^1 [-2x^2 + 4 - (x^2 - 2x + 1)]\,dx =$

$= \int_0^1 [-2x^2 + 4 - x^2 + 2x - 1]\,dx =$

$= \int_0^1 (-3x^2 + 2x + 3)\,dx = \left[\frac{-3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 3x\right]_0^1 =$

$= [-x^3 + x^2 + 3x]_0^1 = -1^3 + 1^2 + 3 - 0 = -1 + 1 + 3 = 3$

A medida da área é 3 u. a.

Pág. 46

28. $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$; $g(x) = 0{,}08x^2 + k$

28.1. As funções *f* e *g* são pares, logo, os seus gráficos são simétricos relativamente ao eixo *Oy*. Os gráficos de *f* e *g* são tangentes em dois pontos de coordenadas (x_0, x_0) e $(-x_0, -x_0)$. Analisemos a situação para $x > 0$: $g'(x) = 0{,}16x$;

$g'(x_0) = 0{,}16x_0$; $f'(x) = 1$; $f'(x_0) = 1$

Sabemos que:

$\begin{cases} g'(x_0) = f'(x_0) \\ g(x_0) = f(x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}16x_0 = 1 \\ 0{,}08x_0^2 + k = x_0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{0{,}16} \\ 0{,}08x_0^2 + k = x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 6{,}25 \\ 0{,}08\times 6{,}25^2 + k = 6{,}25 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 6{,}25 \\ 3{,}125 + k = 6{,}25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 6{,}25 \\ k = 3{,}125 \end{cases}$

$k = 3{,}125 = \frac{25}{8}$

28.2. $g(x) \geq f(x)$ para $x \in [-6{,}25; 6{,}25]$

$A = \int_{-6{,}25}^{6{,}25} [g(x) - f(x)]\,dx =$

$= \int_{-6{,}25}^{0} [g(x) - f(x)]\,dx + \int_0^{6{,}25} [g(x) - f(x)]\,dx =$

$= \int_{-6{,}25}^{0} \left[0{,}08x^2 + \frac{25}{8} - (-x)\right] dx +$

MMA12DRAC © Porto Editora

$$+\int_0^{6,25}\left[0,08x^2+\frac{25}{8}-x\right]\mathrm{d}x=$$

$$=\left[\frac{0,08x^3}{3}+\frac{25}{8}x+\frac{x^2}{2}\right]_{-6,25}^{0}+$$

$$+\left[\frac{0,08x^3}{3}+\frac{25}{8}x-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{6,25}=$$

$$=0-\left[\frac{0,08\times(-6,25)^3}{3}+\frac{25}{8}\times(-6,25)+\frac{(-6,25)^2}{2}\right]+$$

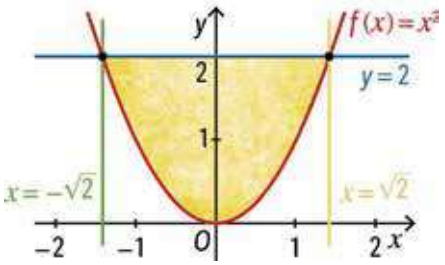
$$+\left[\frac{0,08\times 6,25^3}{3}+\frac{25}{8}\times 6,25-\frac{6,25^2}{2}\right]-0=$$

$$=\frac{625}{96}+\frac{625}{32}-\frac{625}{32}+\frac{625}{96}+\frac{625}{32}-\frac{625}{32}=\frac{1250}{96}=$$

$$=\frac{625}{48}$$

A medida da área da região colorida é $\frac{625}{48}$ u. a.

29.1. $f(x)=x^2$; $y=2$



Abcissas dos pontos de interseção do gráfico de *f* com a reta $y=2$:

$f(x)=2\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=-\sqrt{2}\vee x=\sqrt{2}$

Cálculo da área: $y=2\geq f(x)$ para $x\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

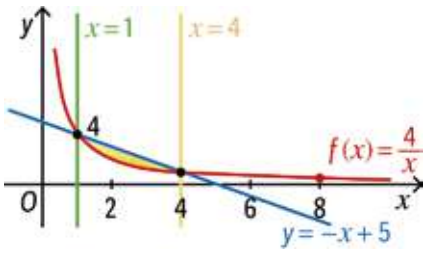
$$A=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left[2-f(x)\right]\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(2-x^2\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\left[2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}^3}{3}-\left(2\left(-\sqrt{2}\right)-\frac{\left(-\sqrt{2}\right)^3}{3}\right)=$$

$$=2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}+2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}-\frac{4}{3}\sqrt{2}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

A medida da área da região é $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ u. a.

29.2. $f(x)=\frac{4}{x}$; $y=-x+5$



Abcissas dos pontos de interseção do gráfico de *f* com a reta $y=-x+5$:

$$f(x)=-x+5\Leftrightarrow\frac{4}{x}=-x+5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4=-x^2+5x\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times4}}{2\times1}\Leftrightarrow x=\frac{5\pm3}{2}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x=4\vee x=1$

Cálculo da área: $-x+5\geq f(x)$ para $x\in[1,4]$

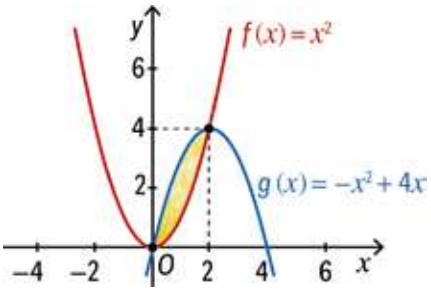
$$A=\int_1^4\left(-x+5-\frac{4}{x}\right)\mathrm{d}x=\left[-\frac{x^2}{2}+5x-4\ln|x|\right]_1^4=$$

$$=-8+20-4\ln|4|-\left(-\frac{1}{2}+5-4\ln|1|\right)=$$

$$=12-4\ln|4|+\frac{1}{2}-5=\frac{15}{2}-4\ln4$$

A medida da área da região é $\left(\frac{15}{2}-4\ln4\right)$ u. a.

29.3. $f(x)=x^2$; $g(x)=-x^2+4x$



Abcissas dos pontos de interseção dos gráficos de *f* e *g*:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2=-x^2+4x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-4x=0\Leftrightarrow 2x(x-2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=0\vee x-2=0\Leftrightarrow x=0\vee x=2$$

Cálculo da área: $g(x)\geq f(x)$ para $x\in[0,2]$

$$A=\int_0^2\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^2\left(-x^2+4x-x^2\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^2\left(-2x^2+4x\right)\mathrm{d}x=\left[-\frac{2x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}\right]_0^2=$$

$$=\left[\frac{-2x^3}{3}+2x^2\right]_0^2=-\frac{16}{3}+8-0=\frac{8}{3}$$

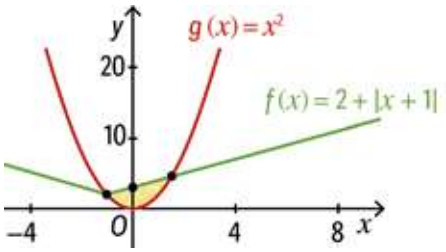
A medida da área da região é $\frac{8}{3}$ u. a.

29.4. $f(x)=2+|x+1|=\begin{cases}2+x+1 \text{ se } x+1\geq0\\2-x-1 \text{ se } x+1<0\end{cases}=$

$$=\begin{cases}x+3 \text{ se } x\geq-1\\-x+1 \text{ se } x<-1\end{cases}$$

$g(x)=2x^2$

MMA12DRAC © Porto Editora



Abcissas dos pontos de interseção dos gráficos de f e g: $f(x)=g(x)$.

Para $x \geq -1$:

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x+3=2x^2 \Leftrightarrow 2x^2-x-3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 2\times(-3)}}{2\times 2} \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm 5}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2} \vee x=-1$

Para $x < -1$:

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow -x+1=2x^2 \Leftrightarrow 2x^2+x-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times 2\times(-1)}}{2\times 2} \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm 3}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=\dfrac{1}{2}$

Como $x < -1$, a equação $f(x)=g(x)$ é impossível. Cálculo da área: $f(x)\geq g(x)$ para $x\in\left[-1,\dfrac{3}{2}\right]=[-1;1,5]$.

$A=\int_{-1}^{1,5}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1,5}\left(x+3-2x^2\right)\mathrm{d}x=$

$=\left[-\dfrac{x^2}{2}+3x-\dfrac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1,5}=\dfrac{1,5^2}{2}+3\times 1,5-\dfrac{2\times 1,5^3}{3}-$

$-\left[\dfrac{(-1)^2}{2}+3\times(-1)-\dfrac{2\times(-1)^3}{3}\right]=$

$=1,125+4,5-2,25-\dfrac{1}{2}+3-\dfrac{2}{3}=\dfrac{125}{24}$

A medida da área da região é $\dfrac{125}{24}$ u. a.

30. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x=$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x=$

$=\left[\sin x-(-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[-\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=$

$=\left[\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[-\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=$

$=\sin\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{4}-(\sin 0+\cos 0)+$

$+\left[-\cos\dfrac{\pi}{2}-\sin\dfrac{\pi}{2}-\left(-\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right]=$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-(0+1)+\left[0-1-\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=$

$=\dfrac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}}+-1-1-\left(-\dfrac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right)=\sqrt{2}-2+\sqrt{2}=2\sqrt{2}-2$

A medida da área da região colorida é $\left(2\sqrt{2}-2\right)$ u. a.

Pág. 47

31. $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=xf(x),\ \forall\, x\in\mathbb{R}$

$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=xf(x);\ F(x)=xf(x)$

Por outro lado, $F'(x)=f(x)$ e

$F'(x)=x'f(x)+xf'(x)=f(x)+xf'(x)$.

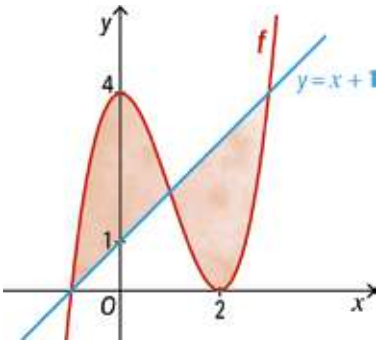
Logo, $\cancel{f(x)}=\cancel{f(x)}+xf'(x) \Leftrightarrow xf'(x)=0$

Se $x=0$, $F(x)=0\times f(x)\Leftrightarrow F(x)=0$;

$F'(x)=f(x)\Leftrightarrow 0=f(x)$; f é constante.

Se $x\neq 0$, com $xf'(x)=0$, $f'(x)=0$; f é constante.

32. $f(x)=x^3-3x^2+4;\ y=x+1$



Abcissas dos pontos de interseção do gráfico de f com a reta $y=x+1$:

$f(x)=x^3-3x^2+4 \Leftrightarrow x^3-3x^2+4=x+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3-3x^2-x+3=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-4x+3)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+1=0 \vee x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{16-12}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=\dfrac{4\pm 2}{2} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=3 \vee x=1$

C.A. Divisores inteiros de 3: $-1, 1, -3, 3$

	1	−3	−1	3
−1		−1	4	−3
	1	−4	3	0

$x^3-3x^2-x+3=(x+1)(x^2-4x+3)$

$f(x)\geq x+1$ para $x\in[-1,1]$

$x+1\geq f(x)$ para $x\in[1,3]$

MMA12DRAC © Porto Editora

$$A=\int_{-1}^{1}\left[x^3-3x^2+4-(x+1)\right]\mathrm{d}x+$$
$$+\int_{1}^{3}\left[x+1-\left(x^3-3x^2+4\right)\right]\mathrm{d}x=$$
$$=\int_{-1}^{1}\left[x^3-3x^2+4-x-1\right]\mathrm{d}x+$$
$$+\int_{1}^{3}\left[x+1-x^3+3x^2-4\right]\mathrm{d}x=$$
$$=\int_{-1}^{1}\left[x^3-3x^2-x+3\right]\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}\left[-x^3+3x^2+x-3\right]\mathrm{d}x=$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}}-\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-1}^{1}+$$
$$+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}}+\frac{x^2}{2}-3x\right]_{1}^{3}=$$
$$=\frac{1}{4}-1-\frac{1}{2}+3-\left(\frac{1}{4}+1-\frac{1}{2}-3\right)+$$
$$+\left[-\frac{81}{4}+27+\frac{9}{2}-9-\left(-\frac{1}{4}+1+\frac{1}{2}-3\right)\right]=$$
$$=\frac{7}{4}-\left(-\frac{9}{4}\right)+\frac{9}{4}+\frac{7}{4}=\frac{7}{4}+\frac{9}{4}+\frac{9}{4}+\frac{7}{4}=\frac{32}{4}=8$$

A medida da área é 8 u. a.

33.1. $f(x)=g(x)\Leftrightarrow -x^3\cancel{-x^2}+2x\cancel{+4}=\cancel{-x^2}-2x\cancel{+4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x^3+4x=0\Leftrightarrow x\left(-x^2+4\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee -x^2+4=0\Leftrightarrow x=0\vee x^2=4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee x=-2\vee x=2$

$g(-2)=-(-2)^2-2(-2)+4=-4+4+4=4$

$g(0)=-0^2-2\times 0+4=4$

Pontos: $(-2,4)$ e $(0,4)$

33.2. $g(x)\geq f(x)$ para $x\in[-2,0]$

$$A=\int_{-2}^{0}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x=$$
$$=\int_{-2}^{0}\left[-x^2-2x+4-\left(-x^3-x^2+2x+4\right)\right]\mathrm{d}x=$$
$$=\int_{-2}^{0}\left(\cancel{-x^2}-2x\cancel{+4}+x^3\cancel{+x^2}-2x\cancel{-4}\right)\mathrm{d}x=$$
$$=\int_{-2}^{0}\left(x^3-4x\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4x^2}{2}\right]_{-2}^{0}=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{0}=$$
$$=0-\left[\frac{(-2)^4}{4}-2\times(-2)^2\right]=-(4-8)=4$$

A medida da área da região colorida é 4 u. a.

Avaliação global

MMA12DRAC © Porto Editora

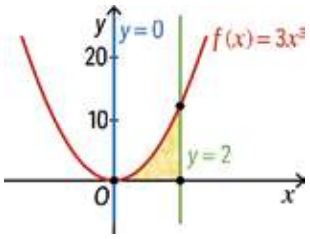
Pág. 48

1. $F(x)=5\ln(x+1)+3$; $F'(x)=f(x)$

$$F'(x)=5\times\frac{(x+1)'}{(x+1)}+3'=5\times\frac{1}{x+1}+0=\frac{1}{x+1}$$

Opção (C)

2. $f(x)=3x^3$; eixo das abcissas: $y=0$

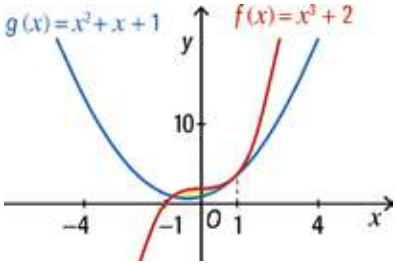


$f(x)\geq 0$ em $[0,2]$

$$A=\int_0^2\left(3x^3-0\right)\mathrm{d}x=\int_0^2 3x^3\,\mathrm{d}x=\left[\frac{3x^4}{4}\right]_0^2=12$$

Opção (B)

3. $f(x)=x^3+2$; $g(x)=x^2+x+1$



Abcissas dos pontos de interseção dos gráficos de f e g:

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^3+2=x^2+x+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3-x^2-x+1=0\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-2x+1\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+1=0\vee x^2-2x+1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1\vee (x-1)^2=0\Leftrightarrow x=-1\vee x-1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1\vee x=1$

C.A. $(-1,1)$ é ponto de interseção dos dois gráficos

	1	−1	−1	1
−1		−1	2	−1
	1	−2	1	0

$(x+1)\left(x^2-2x+1\right)$

Cálculo da área: $f(x)\geq g(x)$ para $x\in[-1,1]$

$$A=\int_{-1}^{1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left[x^3+2-\left(x^2+x+1\right)\right]\mathrm{d}x=$$
$$=\int_{-1}^{1}\left(x^3+2-x^2-x-1\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(x^3-x^2-x+1\right)\mathrm{d}x=$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1}=$$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1\right) =$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$

Opção (A)

4. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } -3 \leq x \leq 0 \\ -2x+3 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$

C.A. $\left| \begin{array}{l} (0, \underset{b}{3}); \ (1,1); \ m = \frac{1-3}{1-0} = -2; \ y = -2x+3 \end{array} \right.$

$\int_{-3}^{4} f(x)\,dx = \int_{-3}^{0} 3\,dx + \int_{0}^{1} (-2x+3)\,dx + \int_{1}^{4} 1\,dx =$

$= [3x]_{-3}^{0} + \left[-\frac{2x^2}{2} + 3x\right]_{0}^{1} + [x]_{1}^{4} =$

$= 3\times 0 - 3\times(-3) - 1 + 3 + 4 - 1 = 9 + 5 = 14$

Opção (C)

5. $f'(x) = 3e^x - 5x$; $y = 3x + 2$

$f(x) = \int (3e^x - 5x)\,dx \Leftrightarrow f(x) = 3e^x - \frac{5x^2}{2} + C$

$f'(0) = 3$ e $f(0) = 2$

$f(0) = 2 \Leftrightarrow 3e^0 - 0 + C = 2 \Leftrightarrow 3 + C = 2 \Leftrightarrow C = -1$

Logo, $f(x) = 3e^x - \frac{5x^2}{2} - 1$

Pág. 49

6. $f(x) = 3x^2$; $k \in]1, +\infty[$

$\int_{1}^{k} f(x)\,dx = 26 \Leftrightarrow \int_{1}^{k} 3x^2\,dx = 26 \Leftrightarrow \left[3\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{k} = 26$

$k^3 - 1 = 26 \Leftrightarrow k^3 = 27 \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow k = 3$

7. $f(x) = 4x + 1$; $F'(x) = 4x + 1$; $F'(1) = 4\times 1 + 1 = 5$

A equação da reta tangente é $y = 5x + b$.

$P(0, \underset{b}{3})$; $y = 5x + 3$; $F(1) = 5\times 1 + 3 = 8$

$F(x) = \frac{4x^2}{2} + x + C \Leftrightarrow F(x) = 2x^2 + x + C$

$F(1) = 2\times 1^2 + 1 + C = 3 + C$; $3 + C = 8 \Leftrightarrow C = 5$;

$F(x) = 2x^2 + x + 5$

8. $g(x) = \frac{2x^3 - x}{x^2} = 2x - \frac{1}{x}$

$A = \int_{1}^{e} \left(2x - \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{2x^2}{2} - \ln|x|\right]_{1}^{e} = e^2 - \ln|e| - (1 - \ln|1|) =$

$= e^2 - \ln e - 1 + 0 = e^2 - 1 - 1 = e^2 - 2$

A medida da área é $(e^2 - 2)$ u. a.

9.1. $f(x) = -x^2 + 6x$; $y = -2x + 16$; $f'(x) = -2x + 6$

$m = f'(4) = -2\times 4 + 6 = -2$

$f(4) = -4^2 + 6\times 4 = -16 + 24 = 8$; $P(4,8)$

$y = mx + b$

$y = -2x + b \Leftrightarrow 8 = -2\times 4 + b \Leftrightarrow 8 + 8 = b \Leftrightarrow b = 16$

$y = -2x + 16$

Logo, a reta *r* é tangente ao gráfico de *f* no ponto $P(4, 8)$.

9.2. Interseção da reta *r* com o eixo Ox:

$-2x + 16 = 0 \Leftrightarrow 2x = 16 \Leftrightarrow x = 8$

Cálculo da área: $y = -2x + 16 \geq f(x)$ para

$x \in [0, 8]$

$A = \int_{0}^{6} \left[-2x + 16 - (-x^2 + 6x)\right] dx + \int_{6}^{8} (-2x + 16)\,dx =$

$\int_{0}^{6} \left[-2x + 16 + x^2 - 6x\right] dx + \left[-\frac{2x^2}{2} + 16x\right]_{6}^{8} =$

$\int_{0}^{6} (x^2 - 8x + 16)\,dx + \left[-x^2 + 16x\right]_{6}^{8} =$

$\left[\frac{x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} + 16x\right]_{0}^{6} + (-8^2 + 16\times 8 - (-36 + 96)) =$

$\left[\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 16x\right]_{0}^{6} + (-64 + 128 + 36 - 96) =$

$= \frac{6^3}{3} - 4\times 6^2 + 16\times 6 - 0 + 4 = \frac{216}{3} - 144 + 96 + 4 =$

$= 28$ u. a.

MMA12DRAC © Porto Editora