MÁXIMO

12.º ano

Matemática A

Maria Augusta Ferreira Neves
Ana Machado
Bruno Roque
Pedro Rocha Almeida
António Pinto Silva
Luís Guerreiro

Propostas de resolução

Probabilidade

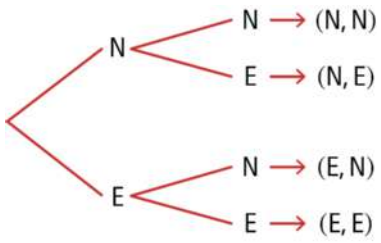
Porto Editora

MMA12DR © Porto Editora

Pág. 9

Tarefa de revisão

1.



$S=\{(N,N),(N,E),(E,N),(E,E)\}$

2. $\frac{1}{3}+0,5+\frac{1}{10}+a=1\Leftrightarrow a=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=\frac{30-10-15-3}{30}\Leftrightarrow a=\frac{2}{30}\Leftrightarrow a=\frac{1}{15}$

3.1.

	1	2	3	4
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)

16 resultados possíveis.

3.2. $A=\{(1,2),(1,4),(2,1),(2,3),$

$(3,2),(3,4),(4,1),(4,3)\}$

$B=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

$A\cap B=\varnothing$. Logo, A e B são disjuntos.

3.3. $A\cap B=\varnothing$

$A\cup B=\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),$

$(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3),(4,4)\}\neq S$

$A\cap B=\varnothing$ e $A\cup B\neq S$

Logo, os acontecimentos A e B não são complementares.

4.1. $\frac{5}{24}+a+a+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=1\Leftrightarrow 2a=1-\frac{5}{24}-\frac{3}{8}-\frac{1}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a=\frac{24-5-9-6}{30}\Leftrightarrow a=\frac{4}{48}\Leftrightarrow a=\frac{1}{12}$

4.2. $P(0)=\frac{5}{24}$; $P(1)=\frac{1}{12}=\frac{2}{24}$

$P(2)=\frac{1}{12}=\frac{2}{24}$; $P(3)=\frac{3}{8}=\frac{9}{24}$; $P(4)=\frac{1}{4}=\frac{6}{24}$

$5+2+2+9+6=24$

24 é o mínimo denominador comum das probabilidades. Então, o número mínimo possível de bolas no saco é 24.

1. Probabilidade. Regra de Laplace

Pág. 10

Tarefa 1

1. A frequência relativa tende a estabilizar no valor 16,67%.

2.1. $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

2.2. $0,1673+0,1659+0,1707+0,1695+$

$+0,1583+0,1683=1$

A soma das frequências relativas dos resultados obtidos é 1.

2.3. $0,1659+0,1695+0,1683=0,5037=50,37\%$

A frequência relativa de sair face com número par é 50,37%.

Pág. 11

Questão 1

1.1. $m=1-(f(A)+f(O)+f(R))=$

$=1-(0,495+0,132+0,115)=1-0,742=0,258$

1.2. **a)** $f(A\cup R)=f(A)+f(R)=0,495+0,115=0,61$

b) $f(A\cup O\cup R)=f(A)+f(O)+f(R)=$

$=0,495+0,132+0,115=0,742$

c) $f(\bar{A})=1-f(A)=1-0,495=0,505$

Pág. 12

Questão 2

2.1. $P(\bar{B})=1-P(B)\Leftrightarrow 0,6=1-P(B)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B)=1-0,6\Leftrightarrow P(B)=0,4$

2.2. $P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-0,2=0,8$

2.3. $P(A\cup B)=0,7\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,7\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A)+0,4-0,2=0,7\Leftrightarrow P(A)=0,7-0,2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A)=0,5$

Pág. 13

Questão 3

A e B são acontecimentos disjuntos $\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$

$P(\bar{A})=0,4\Leftrightarrow 1-P(A)=0,4\Leftrightarrow P(A)=1-0,4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A)=0,6$

$P\left(\overline{A\cup B}\right)=0,1\Leftrightarrow 1-P\left(A\cup B\right)=0,1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(A\cup B\right)=1-0,1\Leftrightarrow P\left(A\cup B\right)=0,9$

$P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,9=0,6+P\left(B\right)-0\Leftrightarrow P\left(B\right)=0,9-0,6\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(B\right)=0,3$

Questão 4

$P\left(\overline{A\cap B}\right)=0,8\Leftrightarrow 1-P\left(A\cap B\right)=0,8\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=1-0,8\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=0,2$

$P\left(A\cap \overline{B}\right)=0,4\Leftrightarrow P\left(A\right)-P\left(A\cap B\right)=0,4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(A\right)=0,4+0,2\Leftrightarrow P\left(A\right)=0,6$

$P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\times P\left(B\right)\Leftrightarrow 0,2=0,6\times P\left(B\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(B\right)=\frac{0,2}{0,6}\Leftrightarrow P\left(B\right)=\frac{1}{3}$

Questão 5

A e B são equiprováveis $\Leftrightarrow P\left(A\right)=P\left(B\right)$

$P\left(\overline{A\cap B}\right)=\frac{8}{9}\Leftrightarrow 1-P\left(A\cap B\right)=\frac{8}{9}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=1-\frac{8}{9}\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{9}$

$P\left(A\right)\times P\left(B\right)=P\left(A\cap B\right)\underset{(P(A)=P(B))}{\Leftrightarrow} P\left(B\right)\times P\left(B\right)=\frac{1}{9}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[P\left(B\right)\right]^2=\frac{1}{9}\underset{(P(B)\geq 0)}{\Leftrightarrow} P\left(B\right)=\sqrt{\frac{1}{9}}\Leftrightarrow P\left(B\right)=\frac{1}{3}$

Pág. 14

Questão 6

6.1. Número de resultados possíveis: 15
Número de resultados favoráveis: 5
A probabilidade de a mola retirada ser cor-de-rosa é: $P=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

6.2. Número de resultados possíveis: $15-1=14$
Número de resultados favoráveis: 5
A probabilidade de a segunda mola ser cor-de-rosa se a primeira tiver sido azul é:

$P=\frac{5}{14}$

6.3. Seja x o número de molas azuis que é necessário acrescentar à caixa.

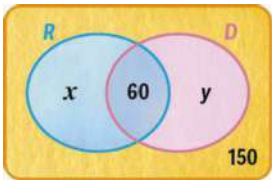
$P=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{10+x}{15+x}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow 40+4x=45+3x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x-3x=45-40\Leftrightarrow x=5$

É necessário acrescentar 5 molas azuis à caixa para que a probabilidade de sair mola azul seja $\frac{3}{4}$.

Pág. 15

Questão 7



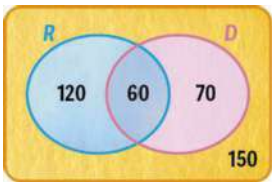
R: "Gostam de robalo."
D: "Gostam de dourada."
Seja:
x: número de pessoas que responderam apenas robalo
y: número de pessoas que responderam apenas dourada

$\frac{1}{3}\left(x+60\right)=60$ (um terço dos que responderam robalo, também respondeu dourada)

$\frac{1}{3}\left(x+60\right)=60\Leftrightarrow\frac{1}{3}x+20=60\Leftrightarrow\frac{1}{3}x=40\Leftrightarrow x=120$

Para $x=120$:

$y=400-120-60-150=70$

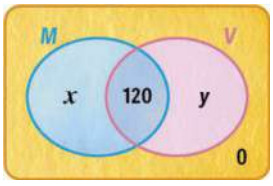


Número de resultados possíveis: 400
Número de resultados favoráveis: 70

$P=\frac{70}{400}=0,175=17,5\%$

Questão 8

M: "Restaurante Mediterrâneo à mesa."
V: "Restaurante Comida Verde."



Seja:
x: número de hóspedes que apenas tinham feito refeições no restaurante Mediterrâneo à mesa
y: número de hóspedes que apenas tinham feito refeições no restaurante Comida Verde

$\frac{1}{4}\left(x+120\right)=120$

(um quarto dos hóspedes que tinham feito refeições no restaurante Mediterrâneo à mesa, também tinham feita refeições no restaurante Comida Verde)

$\frac{1}{4}\left(x+120\right)=120\Leftrightarrow\frac{1}{4}x+30=120\Leftrightarrow$

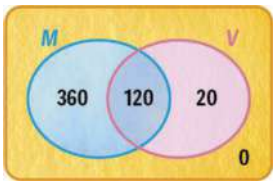
$\frac{1}{4}x=90\Leftrightarrow x=360$

MMA12DR © Porto Editora

Para $x = 360$: $y = 500 - 360 - 120 = 20$

Número de resultados possíveis: 500

Número de resultados favoráveis: 20



$P = \frac{20}{500} = 0{,}04 = 4\%$

Pág. 16

Questão 9

Número de resultados possíveis:

${}^{7}C_{2} = 21$: é o número de maneiras diferentes de selecionar 2 dos 7 vértices do heptágono.

Número de resultados favoráveis:

${}^{7}C_{2} - 7 = 21 - 7 = 14$

${}^{7}C_{2}$: número de maneiras diferentes de selecionar 2 dos 7 vértices do heptágono.

7: número de lados do heptágono. Subtrai-se porque se selecionarmos dois vértices consecutivos, o segmento de reta por eles formado não é uma diagonal do heptágono.

$P = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$

Questão 10

Número de resultados possíveis:

${}^{25}C_{4} = 12\,650$: é o número de maneiras diferentes de escolher 4 dos 25 alunos da turma.

10.1. Número de resultados favoráveis:

${}^{15}C_{4} + {}^{10}C_{4} = 1365 + 210 = 1575$

${}^{15}C_{4}$: número de maneiras diferentes de escolher 4 das 15 raparigas da turma.

${}^{10}C_{4}$: número de maneiras diferentes de escolher 4 dos 10 rapazes da turma.

$P = \frac{1575}{12\,650} \approx 0{,}125 = 12{,}5\%$

10.2. Número de resultados favoráveis:

${}^{15}C_{2} \times {}^{10}C_{2} = 105 \times 45 = 4725$

${}^{15}C_{2}$: número de maneiras diferentes de escolher 2 das 15 raparigas da turma.

${}^{10}C_{2}$: número de maneiras diferentes de escolher 2 dos 10 rapazes da turma.

$P = \frac{4725}{12\,650} \approx 0{,}374 = 37{,}4\%$

Pág. 17

Questão 11

Cálculo do número de resultados possíveis:

$9! = 362\,880$

$9!$: número de maneiras diferentes de colocar os 9 livros nos 9 lugares disponíveis (todos podem trocar entre si).

Cálculo do número de resultados favoráveis:

$2! \times 7! \times 8 = 80\,640$

$2!$: Número de maneiras de ordenar os 2 livros de preparação para o exame.

$7!$: número de maneiras diferentes de ordenar os restantes 7 livros.

8: Número de maneiras de colocar o bloco de dois livros de preparação para o exame, na sequência, entre os restantes 7. $\uparrow L \uparrow L \uparrow L \uparrow L \uparrow L \uparrow L \uparrow L \uparrow$

Outro processo:

$2 \times 8! = 80\,640$

2: Número de maneiras diferentes de ordenar os 2 livros de preparação para o exame.

$8!$: número de maneiras diferentes de ordenar o bloco de dois livros de preparação para o exame mais os restantes 7.

$P = \frac{80\,640}{362\,880} = \frac{2}{9}$

Questão 12

Cálculo do número de resultados possíveis:

$24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 19 = 96\,909\,120$

24: número de maneiras diferentes de escolher uma cor para a face com o número 1.

23, 22, 21, 20, 19: Para cada uma das restantes faces, pode ser escolhida qualquer cor diferente das anteriores.

Cálculo do número de resultados favoráveis:

$6 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20 \times 19 = 24\,227\,280$

6: número de escolhas possíveis de escolha da face a pintar de preto.

23, 22, 21, 20, 19: Para cada uma das restantes faces, pode ser escolhida qualquer cor diferente das anteriores.

$P = \frac{24\,227\,280}{96\,909\,120} = \frac{1}{4}$

Pág. 18

Questão 13

Número de resultados possíveis:

$\underset{(1)}{2} \times \underset{(2)}{2} + \underset{(3)}{2} + \underset{(4)}{3} \times \underset{(5)}{2} = 12$

2 (1): número de estradas que ligam *A* a *B*.

2 (2): número de estradas que ligam *B* a *D*.

2 (3): número de estradas que ligam diretamente *A* a *D*.

3 (4): número de estradas que ligam *A* a *C*.

2 (5): número de estradas que lingam *C* a *D*.

Número de resultados favoráveis:

$2 \times 2 + 3 \times 2 = 10$

MMA12DR © Porto Editora

2×2 : Número de trajetos de *A* para *D* e que passam por *B*.

3×2 : Número de trajetos de *A* para *D* e que passam por *C*.

$P = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

Questão 14

Número de resultados possíveis:

$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

10: número de possibilidades de seleção da 1.ª bola.

9: número de possibilidades de seleção da 2.ª bola entre as restantes 9.

8: número de possibilidades de seleção da 3.ª bola entre as restantes 8.

7: número de possibilidades de seleção da 4.ª bola entre as restantes 7.

Número de resultados favoráveis:

Para que o número formado tenha 4 algarismos, algarismo dos milhares não pode ser 0.

Para que seja múltiplo de 5 tem que o algarismo das unidades ser 0 ou 5.

Se o algarismo das unidades é 0:

$9 \times 8 \times 7 \times 1 = 504$

9: número de formas diferentes de selecionar 1 bola para ocupar o lugar do algarismo dos milhares (não pode ser 0).

8: número de formas diferentes de selecionar o algarismo das centenas entre as restantes 8 bolas.

7: número de formas diferentes de selecionar o algarismo das dezenas entre as 7 restantes bolas.

1: 0 é o algarismo das unidades.

Se o algarismo das unidades é 5:

$8 \times 8 \times 7 \times 1 = 448$

8: número de maneiras de selecionar 1 bola para o algarismo dos milhares (não pode ser 5 porque é o algarismo das unidades e não pode ser 0).

8: número de maneiras de selecionar uma bola entre as restantes 8 para ocupar o lugar do algarismo das centenas.

7: número de maneiras de selecionar a bola para ocupar o lugar do algarismo das dezenas entre as restantes 7.

1: o algarismo das unidades é 5.

Então, o número de resultados favoráveis é:

$504 + 448 = 952$

$P = \frac{952}{5040} = \frac{17}{90}$

Questão 15

Número de resultados possíveis:

$4 \times 4 \times 4 = 64$ (Para que um dos três lançamentos, existem 4 resultados possíveis)

Número de resultados favoráveis:

Para que o produto seja 4, duas situações podem ocorrer: ou sai duas vezes o vértice com o número 1 e uma vez o vértice com o número 4 ou sai duas vezes o vértice com o número 2 e uma vez o vértice com o número 1.

No primeiro caso, $\underset{1.º}{1} \times \underset{2.º}{1} \times \underset{3.º}{1} \times 3 = 3$

1 (1.º): número de vértices com o número 1.

1 (2.º): número de vértices com o número 1.

1 (3.º): número de vértices com o número 4.

3: o vértice com o número 4 pode ser o primeiro, o segundo ou o terceiro.

No segundo caso, $\underset{1.º}{1} \times \underset{2.º}{1} \times \underset{3.º}{1} \times 3 = 3$

1 (1.º): número de vértices com o número 1.

1 (2.º): número de vértices com o número 2.

1 (3.º): número de vértices com o número 2.

3: o vértice com o número 1 pode ser o primeiro, o segundo ou o terceiro.

Assim, o número de resultados favoráveis é:

$3 + 3 = 6$

$P = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$

Pág. 19

Questão 16

Número de resultados possíveis:

${}^{8}A'_{5} = 8^{5} = 32\,768$

${}^{8}A'_{5}$: número de sequências que é possível formar com os algarismos de 1 a 8, distintos ou não.

16.1. Para que o número seja maior que 60 000, o primeiro dado terá que ser 6, 7 ou 8.

Para que seja par, o quinto dado terá de ser 2, 4, 6 ou 8.

Número de resultados favoráveis:

$3 \times {}^{8}A'_{3} \times 4 = 6144$

3: número de possibilidades para o 1.º dado.

${}^{8}A'_{3}$: número de sequências possíveis para os 2.º, 3.º e 4.º dados.

4: número de possibilidades para o 5.º dado.

$P(\text{o número ser par e maior que 60 000}) =$

$= \frac{6144}{32\,768} = \frac{3}{16}$

16.2. Para que o número seja ímpar, no quinto dado terá que sair 1, 3, 5 ou 7.

Para que seja uma capicua, terá que sair o mesmo número no primeiro e no quinto dado e o mesmo número no segundo e no quarto.

Número de resultados favoráveis:

$1 \times 8 \times 8 \times 1 \times 4 = 256$

1: o primeiro dado terá de ser igual ao quinto.

8: número de possibilidades para o segundo dado.

8: número de possibilidades para o terceiro dado.

1: número de possibilidades para o quarto dado (terá que ser igual ao segundo)

4: número de possibilidades para o quinto dado.

$P(\text{ser capicua e ímpar}) = \frac{256}{32\,768} = \frac{1}{128}$

MMA12DR © Porto Editora

Questão 17

Número de resultados possíveis:

$^{5}A'_{6} = 5^{6} = 15\,625$

17.1. Números de resultados favoráveis:

$^{4}A'_{6} = 4^{6} = 4096$ (Para cada um dos seis clientes sai bola branca)

$P(\text{nenhum ter sido contemplado}) =$

$= \dfrac{4096}{15\,625} \approx 26,2\%$

17.2. Número de resultados favoráveis:

$1 \times {}^{4}A'_{5} \times 6 = 6144$

1: O primeiro cliente é contemplado com o prémio.

$^{4}A'_{5}$: Para cada um dos restantes 5 clientes, sai bola branca.

6: Qualquer um dos 6 clientes pode ser contemplado com o brinde.

$P(\text{exatamente um ter sido contemplado com o prémio}) =$

$= \dfrac{6144}{15\,625} \approx 39,3\%$

Pág. 20

Questão 18

Número de resultados possíveis:

$^{10}A'_{4} = 10^{4} = 10\,000$

18.1. Número de resultados favoráveis:

$^{10}A_{4} = 5040$

$^{10}A_{4}$: número de sequências de 4 algarismos diferentes.

$P = \dfrac{5040}{10\,000} = 50,4\%$

18.2. Número de resultados favoráveis:

$10 \times 1 \times {}^{10}A_{2} = 900$

10: número de possibilidades para o primeiro algarismo.

1: o segundo algarismo tem que ser igual ao primeiro.

$^{10}A_{2}$: número de sequências de 2 algarismos diferentes para as 3.ª e 4.ª posições.

$P = \dfrac{900}{10\,000} = 9\%$

Questão 19

Número de resultados possíveis: $^{12}A_{6} = 665\,280$

19.1. Número de resultados favoráveis:

$3 \times {}^{8}A_{6} = 60\,480$

3: número de maneiras de selecionar as 2 linhas que serão ocupadas (*A* e *B* ou *A* e *C* ou *B* e *C*)

$^{8}A_{6}$: número de maneiras diferentes de ordenar as seis fichas em 6 das 8 casas das duas linhas.

$P = \dfrac{60\,480}{665\,280} = \dfrac{1}{11}$

19.2. Número de resultados favoráveis:

$3 \times {}^{4}A_{3} \times {}^{9}A_{3} = 36\,288$

3: número de maneiras de selecionar uma linha para ocupar com as fichas azuis.

$^{4}A_{3}$: número de maneiras de ordenar as 3 fichas azuis numa linha.

$^{9}A_{3}$: número de maneiras de ordenar as 3 fichas verdes em 3 das 9 casas restantes.

$P = \dfrac{36\,288}{665\,280} = \dfrac{3}{55}$

Pág. 21

Questão 20

Número de resultados possíveis:

$10! = 3\,628\,800$ (é o número de maneiras de ordenar os 10 amigos).

20.1. Números de resultados favoráveis:

$2 \times P_{3} \times P_{7} = 2 \times 3! \times 7! = 60\,480$

2: número de lugares para os três amigos brasileiros (no início ou no fim da fila)

P_{3}: número de maneiras de ordenar os três amigos brasileiros.

P_{7}: número de maneiras de ordenar os restantes 7 amigos.

$P = \dfrac{60\,480}{3\,628\,800} = \dfrac{1}{60}$

20.2. Números de resultados favoráveis:

$8 \times P_{3} \times P_{7} = 8 \times 3! \times 7! = 241\,920$

8: Os três amigos brasileiros podem ficar no início, no fim da fila ou entre dois dos restantes amigos $\left(_{\uparrow}a_{\uparrow}a_{\uparrow}a_{\uparrow}a_{\uparrow}a_{\uparrow}a_{\uparrow}a_{\uparrow}a_{\uparrow}\right)$

P_{3}: número de maneiras de ordenar os três amigos brasileiros.

P_{7}: número de maneiras de ordenar os restantes 7 amigos.

$P = \dfrac{241\,920}{3\,628\,800} = \dfrac{1}{15}$

Questão 21

21.1. Números de resultados possíveis:

$9! = 362\,880$ (é o número de ordenar as nove bolas)

Número de resultados favoráveis:

$P_{3} \times P_{3} \times P_{3} \times P_{3} = (3!)^{4} = 1296$

P_{3}: número de maneiras de ordenar as três bolas azuis.

P_{3}: número de maneiras de ordenar as três bolas verdes.

P_{3}: número de maneiras de ordenar as três bolas amarelas.

MMA12DR © Porto Editora

P_3 : número de maneiras de ordenar as três cores.

$$P = \frac{1296}{3628\,880} = \frac{1}{280}$$

21.2. Número de resultados possíveis:

${}^{9}A_3 = 504$ (é o número de maneiras de selecionar sequências de 3 bolas entre as 9 disponíveis)

Números de resultados favoráveis:

$9 \times (6-2) \times (3-2) = 36$

9: número de maneiras de selecionar a primeira bola.

$(6-2)$: número de maneiras de selecionar a segunda bola (das 6 bolas das duas cores que ainda não saíram, retiram-se as duas bolas cujo número já saiu na primeira bola).

$(3-2)$: número de maneiras de selecionar a terceira bola (das 3 bolas da cor que ainda não saiu, retiram-se as 2 cujo número já saiu nas anteriores).

$$P = \frac{36}{504} = \frac{1}{14}$$

Pág. 22

Questão 22

Número de alunos que frequentam a disciplina de Matemática A: $0{,}6 \times 180 = 108$

Número de resultados possíveis:

${}^{180}C_4 = 42\,296\,805$ (é o número de subconjuntos de 4 elementos que é possível formar entre os 180 alunos da escola, dado que a ordem, no contexto apresentado, não é tida em conta).

Número de resultados favoráveis:

${}^{180}C_4 - {}^{108}C_4 = 42\,296\,805 - 5\,359\,095 = 36\,937\,710$

${}^{180}C_4$: todos os resultados possíveis

${}^{108}C_4$: número de subconjuntos de 4 elementos que é possível formar entre os 108 alunos que frequentam a disciplina de Matemática A.

$$P = \frac{{}^{180}C_4 - {}^{108}C_4}{{}^{180}C_4} = \frac{36\,937\,710}{42\,296\,805} \approx 87{,}3\%$$

Questão 23

Número de resultados possíveis:

${}^{10}C_4 \times 1 = 210$

${}^{10}C_4$: Número de subconjuntos de 4 bolas entre as 10 existentes.

1: Depois de selecionadas as 4 bolas, apenas há uma forma de as colocar por ordem crescente.

23.1. Número de resultados favoráveis:

$1 \times 1 \times {}^{4}C_2 = 6$

1: A primeira bola tem o número 3.

1: A segunda bola tem o número 5.

${}^{4}C_2$: número de subconjuntos de 2 bolas entre as bolas com números 6, 7, 8 e 9.

$$P = \frac{6}{210} = \frac{1}{35}$$

23.2. Número de casos favoráveis:

Se o último número da fila é o 7, os outros 3 terão de ser inferiores a 7.

${}^{7}C_3 \times 1 = 35$

${}^{7}C_3$: número de subconjunto de 3 bolas entre as bolas com números 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

1: o último número da fila é 7.

$$P = \frac{{}^{7}C_3}{{}^{10}C_4} = \frac{35}{210} = \frac{1}{6}$$

Pág. 23

Questão 24

Número de resultados possíveis:

${}^{120}C_4 = 8\,214\,570$ (é o número de maneiras de selecionar 4 dos 120 trabalhadores)

Número de trabalhadores que residem fora de Braga: $0{,}6 \times 120 = 72$

Número de trabalhadores que residem em Braga: $120 - 72 = 48$

24.1. Número de resultados favoráveis:

${}^{72}C_2 \times {}^{48}C_2 = 2556 \times 1128 = 2\,883\,168$

${}^{72}C_2$: número de maneiras de selecionar 2 dos 72 trabalhadores que residem fora de Braga.

${}^{48}C_2$: número de maneiras de selecionar 2 dos 48 trabalhadores que residem em Braga.

$$P = \frac{{}^{72}C_2 \times {}^{42}C_2}{{}^{120}C_4} = \frac{2\,883\,168}{8\,214\,570} \approx 35{,}1\%$$

24.2. Número de resultados favoráveis:

${}^{120}C_4 - {}^{48}C_4 = 8\,214\,570 - 194\,580 = 8\,019\,990$

${}^{120}C_4$: número de todos os resultados possíveis.

${}^{48}C_4$: número de maneiras de selecionar 4 dos 48 trabalhadores que residem em Braga.

$$P = \frac{{}^{120}C_4 - {}^{48}C_4}{{}^{120}C_4} = \frac{8\,019\,990}{8\,214\,570} \approx 97{,}6\%$$

Questão 25

Número de resultados possíveis: ${}^{15}C_9 = 5005$

(É o número de maneiras de escolher 9 das 15 posições para colocar as bolas vermelhas.
As azuis ficam nas posições que sobram.)

25.1. Número de resultados favoráveis: 10

(As bolas azuis ficam no início, no fim da fila ou entre 2 bolas vermelhas.)

$|\bullet|\bullet|\bullet|\bullet|\bullet|\bullet|\bullet|\bullet|\bullet|\bullet|$

$$P = \frac{10}{{}^{15}C_9} = \frac{10}{5005} \approx 0{,}002$$

MMA12DR © Porto Editora

25.2. Número de resultados favoráveis: ${}^{10}C_6 = 210$

As bolas azuis ocuparão 6 das 10 posições possíveis (no início, no fim da fila ou entre duas bolas vermelhas).

|●|●|●|●|●|●|●|●|●|●|

$$P = \frac{{}^{10}C_6}{{}^{15}C_9} = \frac{210}{5005} \approx 0,042$$

Pág. 24

Questão 26

26.1. Número de resultados possíveis:

${}^{7}C_2 = 21$ (é o número de maneiras diferentes de selecionar 2 dos 7 vértices do sólido).

Número de resultados favoráveis:

${}^{3}C_2 = 3$ (é o número de maneiras diferentes de selecionar 2 dos 3 vértices que pertencem, simultaneamente, ao prisma e à pirâmide (A, B e C)).

$$P = \frac{{}^{3}C_2}{{}^{7}C_2} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

26.2. Número de resultados possíveis:

${}^{8}A'_7 = 8^7 = 2\,097\,152$

(Para cada uma das sete faces existem 8 cores disponíveis).

Número de resultados favoráveis:

${}^{7}A_3 \times {}^{5}A_4 = 210 \times 120 = 25\,200$

${}^{7}A_3$: número de maneiras diferentes de selecionar ordenadamente 3 das 7 faces do sólido para pintar de azul, verde e branco.

${}^{5}A_4$: número de maneiras diferentes de selecionar ordenadamente 4 das restantes 5 cores para pintar as restantes 4 faces.

$$P = \frac{{}^{7}A_3 \times {}^{5}A_4}{{}^{8}A'_7} = \frac{25\,200}{2\,097\,152} \approx 1,20\%$$

Pág. 25

Questão 27

27.1. Número de resultados possíveis:

${}^{5}C_3 = 10$ (é o número de maneiras diferentes de selecionar 3 dos 5 vértices da pirâmide).

Número de resultados favoráveis: 2 (planos *ACV* e *BDV*).

$$P = \frac{2}{{}^{5}C_3} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

27.2. Número de resultados possíveis: ${}^{6}A'_5 = 6^5 = 7776$

(Para cada uma das cinco faces existem 6 cores disponíveis.)

a) Número de resultados favoráveis:

${}^{5}C_2 \times {}^{5}A_3 = 10 \times 60 = 600$

${}^{5}C_2$: número de maneiras diferentes de selecionar 2 das 5 faces da pirâmide para pintar de amarelo.

${}^{5}A_3$: número de maneiras diferentes de selecionar ordenadamente 3 das restantes 5 cores para pintar as restantes 3 faces da pirâmide.

$$P = \frac{{}^{3}C_2 \times {}^{5}A_3}{{}^{6}A'_5} = \frac{600}{7776} \approx 7,72\%$$

b) Número de resultados favoráveis:

$4 \times {}^{5}A_3 = 4 \times 60 = 240$

4: número de maneiras de escolher uma das 4 faces laterais para colorir de amarelo.

${}^{5}A_3$: número de maneiras diferentes de selecionar ordenadamente 3 das restantes 5 cores para pintar as restantes 3 faces da pirâmide.

$$P = \frac{4 \times {}^{5}A_3}{{}^{6}A'_5} = \frac{240}{7776} \approx 3,09\%$$

Pág. 26

Questão 28

Número de resultados possíveis: ${}^{10}C_4 = 210$

(é o número de maneiras diferentes de selecionar 4 das 10 bolas da caixa).

28.1. Número de resultados favoráveis:

${}^{6}C_4 + {}^{4}C_4 = 15 + 1 = 16$

${}^{6}C_4$: número de maneiras de selecionar 4 das 6 bolas azuis.

${}^{4}C_4$: número de maneiras de selecionar as 4 bolas verdes.

$$P = \frac{{}^{6}C_4 + {}^{4}C_4}{{}^{10}C_4} = \frac{16}{210} = \frac{8}{105}$$

28.2. Número de resultados favoráveis:

${}^{6}C_2 \times {}^{4}C_2 = 15 \times 6 = 90$

${}^{6}C_2$: número de maneiras de selecionar 2 das 6 bolas azuis.

${}^{4}C_2$: número de maneiras de selecionar 2 das 4 bolas verdes.

$$P = \frac{{}^{6}C_2 \times {}^{4}C_2}{{}^{10}C_4} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$$

28.3. Número de resultados favoráveis:

${}^{6}C_3 \times {}^{4}C_1 + {}^{6}C_4 \times {}^{4}C_0 = 20 \times 4 + 15 \times 1 = 95$

${}^{6}C_3 \times {}^{4}C_1$: número de maneiras de selecionar 3 bolas azuis e 1 bola verde.

${}^{6}C_4 \times {}^{4}C_0$: número de maneiras de selecionar 4 bolas azuis.

$$P = \frac{{}^{6}C_3 \times {}^{4}C_1 + {}^{6}C_4 \times {}^{4}C_0}{{}^{10}C_4} = \frac{95}{210} = \frac{19}{42}$$

MMA12DR © Porto Editora

Questão 29

Número de resultados possíveis: ${}^{9}C_{4} = 126$

(é o número de maneiras diferentes de escolher 4 das 9 pessoas do grupo).

29.1. Número de resultados favoráveis:

${}^{5}C_{2} \times {}^{4}C_{2} = 10 \times 6 = 60$

${}^{5}C_{2}$: número de maneiras de escolher 2 dos 5 homens.

${}^{4}C_{2}$: número de maneiras de escolher 2 das 4 mulheres.

$$P = \frac{{}^{5}C_{2} \times {}^{4}C_{2}}{{}^{9}C_{4}} = \frac{60}{126} = \frac{10}{21}$$

29.2. Número de resultados favoráveis:

${}^{5}C_{3} \times {}^{4}C_{1} + {}^{5}C_{4} \times {}^{4}C_{0} = 10 \times 4 + 5 \times 1 = 45$

${}^{5}C_{3} \times {}^{4}C_{1}$: número de maneiras de escolher 3 homens e 2 mulheres.

${}^{5}C_{4} \times {}^{4}C_{0}$: número de maneiras de escolher 4 homens.

$$P = \frac{{}^{5}C_{3} \times {}^{4}C_{1} + {}^{5}C_{4} \times {}^{4}C_{0}}{{}^{9}C_{4}} = \frac{45}{126} = \frac{5}{14}$$

29.3. Número de resultados favoráveis:

${}^{2}C_{2} \times {}^{7}C_{2} = 1 \times 21 = 21$

${}^{2}C_{2}$: número de maneiras de escolher os 2 irmãos.

${}^{7}C_{2}$: número de maneiras de escolher 2 das restantes 7 pessoas.

$$P = \frac{{}^{2}C_{2} \times {}^{7}C_{2}}{{}^{9}C_{4}} = \frac{21}{126} = \frac{1}{6}$$

29.4. Número de resultados favoráveis:

${}^{2}C_{1} \times {}^{3}C_{1} \times {}^{4}C_{2} + {}^{3}C_{2} \times {}^{4}C_{2} = 2 \times 3 \times 6 + 3 \times 6 = 54$

${}^{2}C_{1} \times {}^{3}C_{1} \times {}^{4}C_{2}$: número de maneiras de escolher 1 dos 2 irmãos, 1 dos restantes 3 homens e 2 das 4 mulheres.

${}^{3}C_{2} \times {}^{4}C_{2}$: número de maneiras de escolher 2 dos restantes 3 homens (excluindo os 2 irmãos) e 2 das 4 mulheres.

$$P = \frac{{}^{2}C_{1} \times {}^{3}C_{1} \times {}^{4}C_{2} + {}^{3}C_{2} \times {}^{4}C_{2}}{{}^{9}C_{4}} = \frac{54}{126} = \frac{3}{7}$$

Pág. 27

Questão 30

Número de resultados possíveis: $9! = 362\,880$

(número de maneiras de ordenar os nove livros)

30.1. Número de resultados favoráveis:

${}^{4}A_{2} \times 7! = 12 \times 5040 = 60\,480$

${}^{4}A_{2}$: número de maneiras de escolher ordenadamente 2 livros de matemática A para ocuparem os lugares dos extremos.

$7!$: número de maneiras de ordenar os restantes 7 livros para ocuparem os restantes 7 lugares.

$$P = \frac{{}^{4}A_{2} \times 7!}{9!} = \frac{60\,480}{362\,880} = \frac{1}{6}$$

30.2. Número de resultados favoráveis:

$4! \times 3! \times 2! \times 3! = 24 \times 6 \times 2 \times 6 = 1728$

$4!$: número de maneiras de ordenar os 4 livros de Matemática A.

$3!$: número de maneiras de ordenar os 3 livros de Física.

$2!$: número de maneiras de ordenar os 2 livros de Química.

$3!$: número de maneiras de ordenar as 3 disciplinas.

$$P = \frac{4! \times 3! \times 2! \times 3!}{9!} = \frac{1728}{362\,880} = \frac{1}{210}$$

30.3. Número de resultados favoráveis:

$2 \times 4! \times 5! = 2 \times 24 \times 120 = 5760$

2: os livros de Matemática A ficam no início ou no fim da fila.

$4!$: número de maneiras de ordenar os 4 livros de Matemática A.

$5!$: número de maneiras de ordenar os restantes 5 livros nos restantes 5 lugares.

$$P = \frac{2 \times 4! \times 5!}{9!} = \frac{5760}{362\,880} = \frac{1}{63}$$

30.4. Número de resultados favoráveis:

$4! \times 5! \times 6 = 24 \times 120 \times 6 = 17\,280$

$4!$: número de maneiras de ordenar os 4 livros de Matemática A.

$5!$: número de maneiras de ordenar os restantes 5 livros.

6: Os livros de Matemática A podem ficar no início, no fim da fila, ou entre 2 dos restantes 5 livros.

$$P = \frac{4! \times 5! \times 6}{9!} = \frac{17\,280}{362\,880} = \frac{1}{21}$$

30.5. Número de resultados favoráveis:

$6! \times {}^{7}A_{3} = 720 \times 210 = 151\,200$

$6!$: número de maneiras de ordenar os 4 livros de Matemática A e os 2 de Química.

${}^{7}A_{3}$: número de maneiras de ordenar os 3 livros de Física em 3 dos 7 lugares disponíveis (lugares no início ou no fim da fila ou entre 2 dos outros 6 livros).

$\uparrow L \uparrow L \uparrow L \uparrow L \uparrow L \uparrow L \uparrow$

$$P = \frac{6! \times {}^{7}A_{3}}{9!} = \frac{151\,200}{362\,880} = \frac{5}{12}$$

Questão 31

Número de resultados possíveis: ${}^{10}C_{2} = 45$

(é o número de maneiras de escolher 2 dos 10 vértices do prisma pentagonal).

31.1. Número de resultados favoráveis:

$2 \times \left({}^{5}C_{2} - 5\right) = 2 \times (10 - 5) = 2 \times 5 = 10$

MMA12DR © Porto Editora

2: Número de bases do prisma.

${}^5C_2$: número de maneiras de escolher dois vértices de uma das bases do prisma.

5: número de lados de um pentágono (os lados não são diagonais do pentágono).

$$P=\frac{2\times\left({}^5C_2-5\right)}{{}^{10}C_2}=\frac{10}{45}=\frac{2}{9}$$

31.2. Número de resultados favoráveis:

$5\times{}^4C_2-6=5\times6-6=30-6=24$

5: número de bases laterais de um prisma pentagonal.

${}^4C_2$: número de maneiras de escolher 2 dos 4 vértices de cada face lateral.

5: número de arestas laterais. Subtrai-se porque cada uma é contada duas vezes, uma vez que pertencem a 2 faces laterais.

$$P=\frac{5\times{}^4C_2-5}{{}^{10}C_2}=\frac{25}{45}=\frac{5}{9}$$

Pág. 28

Questão 32

32.1. Número de resultados possíveis: ${}^8C_2=28$

(é o número de maneiras de escolher 2 dos 8 vértices do octógono).

a) Número de resultados favoráveis: 8

(é o número de lados de um octógono)

$$P=\frac{8}{{}^8C_2}=\frac{8}{28}=\frac{2}{7}$$

b) Número de resultados favoráveis:

Com os vértices do octógono é possível definir 2 quadrados inscritos na circunferência ($[ACEG]$ e $[BDFH]$). Logo, há 8 resultados favoráveis.

$$P=\frac{8}{{}^8C_2}=\frac{8}{28}=\frac{2}{7}$$

c) Número de resultados favoráveis: 4

(é o número de diâmetros que é possível definir com os vértices do octógono ($[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ e $[DH]$).

$$P=\frac{4}{{}^8C_2}=\frac{4}{28}=\frac{1}{7}$$

32.2. Número de resultados possíveis: ${}^8C_3=56$

(é o número de maneiras de escolher 3 dos 8 vértices do octógono).

a) Número de resultados favoráveis:

${}^1C_1\times{}^7C_2=1\times21=21$

${}^1C_1$: o vértice A.

${}^7C_2$: número de maneiras de escolher 2 dos restantes 7 vértices.

$$P=\frac{{}^7C_2}{{}^8C_3}=\frac{21}{56}=\frac{3}{8}$$

b) Número de resultados favoráveis: $4\times6=24$

Para que o triângulo seja retângulo, terá que conter um diâmetro e, com os vértices do octógono, é possível definir 4 diâmetros.

Para cada um destes 4 diâmetros, existem 6 possibilidades de escolha do terceiro vértice.

$$P=\frac{4\times6}{{}^8C_3}=\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$$

c) Número de resultados favoráveis: $4\times2=8$

Para que o triângulo seja retângulo, terá que conter um diâmetro e, com os vértices do octógono, é possível definir 4 diâmetros. Para cada um destes 4 diâmetros, existem 2 possibilidades de escolha do terceiro vértice para que o triângulo seja isósceles.

$$P=\frac{4\times2}{{}^8C_3}=\frac{8}{56}=\frac{1}{7}$$

Pág. 29

Questão 33

Sejam O e R os seguintes acontecimentos:

O: "A carta retirada é de ouros."

R: "A carta retirada é um rei."

$$P(O)=\frac{1}{4};\ P(R)=\frac{1}{8};\ P(O\cup R)=\frac{1}{3}$$

33.1. Determinemos a probabilidade de ser retirado o rei de ouros, ou seja, $P(O\cap R)$.

$$P(O\cup R)=P(O)+P(R)-P(O\cap R)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-P(O\cap R)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(O\cap R)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(O\cap R)=\frac{6+3-8}{24}\Leftrightarrow P(O\cap R)=\frac{1}{24}$$

Como $P(O\cap R)\neq0$, podemos concluir que o rei de ouros está no baralho.

33.2. Seja n o número de cartas existentes no baralho incompleto e x o número de caras de ouros. Como, no baralho, não pode haver mais do que um rei de ouros.

$$P(O\cap R)=\frac{1}{24}\Leftrightarrow\frac{1}{n}=\frac{1}{24}\Leftrightarrow n=24$$

$$P(O)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{x}{24}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=\frac{24}{4}\Leftrightarrow x=6$$

Estão 6 cartas de ouros no baralho incompleto.

Questão 34

Total: 10 bolas

Bolas brancas: n

Bolas pretas: $10-n$

Número de resultados possíveis: ${}^{10}C_2$ (número de maneiras de escolher 2 das 10 bolas).

Número de resultados favoráveis: ${}^nC_2$ (número de maneiras de escolher 2 das n bolas brancas).

MMA12DR © Porto Editora

$$P=\frac{{}^{n}C_{2}}{{}^{10}C_{2}}\Leftrightarrow\frac{{}^{n}C_{2}}{45}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow {}^{n}C_{2}=15\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{n!}{2!(n-2)!}=15\Leftrightarrow\frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2!\cancel{(n-2)!}}=15\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^{2}-n=30\Leftrightarrow n^{2}-n-30=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^{2}-4\times1\times(-30)}}{2\times1}\Leftrightarrow n=\frac{1\pm\sqrt{121}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{1-11}{2}\Leftrightarrow n=\frac{1+11}{2}\Leftrightarrow n=-5\vee n=6$$

Como $n\in\mathbb{N}$, $n=6$.

Número de bolas pretas: $10-6=4$

Estão no saco 4 bolas pretas.

Pág. 30

Tarefas de consolidação 1

1.

1.1. $P(X\geq3)=0,43\Leftrightarrow b+\frac{1}{5}=0,43\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b=0,43-0,2\Leftrightarrow b=0,23$

$\frac{1}{4}+a+b+\frac{1}{5}=1\Leftrightarrow a=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-0,23\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=0,32$

$a=0,32$ e $b=0,23$

1.2. $\frac{1}{5}\times2000=400$

2. Espera-se que 400 bolas tenham o número 4.

$P(\overline{A}\cap B)=0,3\Leftrightarrow P(B)-P(A\cap B)=0,3$.

$\Leftrightarrow P(B)=P(A\cap B)+0,3$.

$P(\overline{A\cup B})=0,1\Leftrightarrow1-P(A\cup B)=0,1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A\cup B)=0,9\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,9\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A)+\cancel{P(A\cap B)}+0,3-\cancel{P(A\cap B)}=0,9\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A)=0,6$

Opção (D)

3. Número de alunos que frequentam o ano 2:
$0,36\times125=45$

Número de alunos que não frequentam o ano 2:
$125-45=80$

Segundo a regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento *A*, com *n* acontecimentos elementares equiprováveis, é igual ao quociente entre o número de resultados favoráveis a *A* e o número de resultados possíveis.

No contexto da situação apresentada, o número de resultados possíveis é dado por ${}^{125}C_{3}$, que é o número de maneiras de escolher 3 dos 125 alunos que frequentam o Ensino Profissional.

Relativamente ao número de resultados favoráveis, como se pretende a probabilidade de pelo menos um dos três frequentar o ano 2, podemos calculá-los subtraindo a todos os resultados possíveis, os casos em que nenhum dos três frequente o ano 2, ou seja, ${}^{80}C_{3}$, que é o número de maneiras de escolher 3 dos 80 alunos que não frequentam o ano 2. Assim, o número de resultados favoráveis é dado por ${}^{125}C_{3}-{}^{80}C_{3}$.

Logo, atendendo à regra de Laplace,

$$P=\frac{{}^{125}C_{3}-{}^{80}C_{3}}{{}^{125}C_{3}}$$

4. O número de resultados possíveis: ${}^{22}C_{2}=231$ (é o número de maneiras de escolher 2 dos 22 alunos).

Número de resultados favoráveis:

${}^{12}C_{2}+{}^{10}C_{2}=66+45=111$

${}^{12}C_{2}$: número de maneiras de escolher 2 alunos da turma A.

${}^{10}C_{2}$: número de maneiras de escolher 2 alunos da turma B.

$$P=\frac{{}^{12}C_{2}+{}^{10}C_{2}}{{}^{22}C_{2}}=\frac{111}{231}=\frac{37}{77}$$

Pág. 31

5. Números de resultados possíveis: $6\times8=48$

6: Número de resultados possíveis no dado cúbico.

8: Número de resultados possíveis no dado octaédrico.

Número de resultados favoráveis: 6

Os resultados favoráveis são: $(1,6)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(5,2)$ e $(6,1)$.

$$P=\frac{6}{6\times8}=\frac{1}{8}$$

6. Números de resultados possíveis: ${}^{8}A_{4}=1680$ (é o número de maneiras de escolher ordenadamente 4 das oito bolas).

6.1. Números de resultados favoráveis:

$3\times{}^{7}A_{3}=3\times210=630$

3: número de possibilidades de escolha da primeira bola (5, 6 ou 7).

${}^{7}A_{3}$: Número de maneiras de escolher ordenadamente 3 das restantes 7 bolas.

$$P=\frac{3\times{}^{7}A_{3}}{{}^{8}A_{3}}=\frac{630}{1680}=\frac{3}{8}$$

6.2. Números de resultados favoráveis:

$4\times{}^{7}A_{3}=4\times210=840$

4: número de possibilidades de escolha da 4.ª bola que ocupará o lugar do algarismo das unidades (0, 2, 4 ou 6).

MMA12DR © Porto Editora

$^{7}A_{3}$: número de maneiras de escolher ordenadamente 3 das restantes bolas.

$$P=\frac{4\times {}^{7}A_{3}}{{}^{8}A_{3}}=\frac{840}{1680}=\frac{1}{2}$$

7. A resposta A está errada.
Considerando $10!$ os resultados possíveis, que é o número de maneiras de ordenar as 10 pessoas, como casos favoráveis, teríamos de considerar $6!\times {}^{7}A_{4}$.
$6!$ é o número de maneiras de ordenar os 6 alunos do 12.º ano. Para cada uma destas $6!$ maneiras, temos $^{7}A_{4}$ maneiras de selecionar ordenadamente, 4 espaços entre os 7 disponíveis para colocar os 4 alunos do 11.º ano. No início, no fim da fila ou entre 2 alunos do 12.º ano.
$_{\uparrow}A_{\uparrow}A_{\uparrow}A_{\uparrow}A_{\uparrow}A_{\uparrow}A_{\uparrow}$
A resposta B está correta. Não considerando a ordem, o número de resultados possíveis pode ser dado por $^{10}C_{6}$ que representa o número de maneiras de escolher 6 dos 10 lugares para colocar os alunos do 12.º ano, ficando os alunos do 11.º ano nos lugares que sobram.
Quanto aos casos favoráveis, $^{7}C_{4}$, representa o número de maneiras de escolher 4 das 7 posições possíveis para colocar os 4 alunos do 11.º ano (no início, no fim da fila ou entre 2 alunos do 12.º ano)
$_{\uparrow}A_{\uparrow}A_{\uparrow}A_{\uparrow}A_{\uparrow}A_{\uparrow}A_{\uparrow}$

8. Número de resultados possíveis:
$^{12}C_{4}\times {}^{8}C_{4}\times {}^{4}C_{4}=495\times 70\times 1=34\,650$
$^{12}C_{4}$: número de maneiras de escolher 4 dos 12 jogadores para formar o primeiro grupo.
$^{8}C_{4}$: número de maneiras de escolher 4 dos restantes 8 jogadores para formar o segundo grupo.
$^{4}C_{4}$: número de maneiras de escolher os últimos 4 jogadores para o terceiro grupo.

Número de resultados favoráveis:
$^{2}C_{2}\times {}^{10}C_{2}\times {}^{8}C_{4}\times {}^{4}C_{4}\times 3=1\times 45\times 70\times 1\times 3=9450$
$^{2}C_{2}$: A Alice e o André integram o primeiro grupo.
$^{10}C_{2}$: Número de maneiras de escolher 2 dos restantes 10 jogadores para completar o primeiro grupo.
$^{8}C_{4}$: Número de maneiras de escolher 4 dos restantes 8 jogadores para formar o segundo grupo.
$^{4}C_{4}$: Número de maneiras de escolher os últimos 4 jogadores para o terceiro grupo.
3: A Alice e o André podem fazer parte do primeiro, do segundo ou do terceiro grupo.

$$P=\frac{{}^{2}C_{2}\times {}^{10}C_{2}\times {}^{8}C_{4}\times {}^{4}C_{4}\times 3}{{}^{12}C_{2}\times {}^{8}C_{4}\times {}^{4}C_{4}}=\frac{9450}{34\,650}=\frac{3}{11}$$

9. Número de resultados possíveis: $^{28}C_{4}=20\,475$ (é o número de maneiras de escolher 4 dos 28 cartões do saco).

9.1. Número de resultados favoráveis:
$^{16}C_{2}\times {}^{12}C_{2}=120\times 66=7920$
$^{16}C_{2}$: número de maneiras de escolher 2 das 16 raparigas.
$^{12}C_{2}$: número de maneiras de escolher 2 dos 12 rapazes.

$$P=\frac{{}^{16}C_{2}\times {}^{12}C_{2}}{{}^{28}C_{4}}=\frac{7920}{20\,475}\approx 0,387$$

9.2. Número de resultados favoráveis:
$^{2}C_{2}\times {}^{9}C_{2}=1\times 36=36$
$^{2}C_{2}$: os números 10 e 20.
$^{9}C_{2}$: número de maneiras de escolher 2 dos 9 números compreendidos entre 10 e 20.

$$P=\frac{{}^{2}C_{2}\times {}^{9}C_{2}}{{}^{28}C_{4}}=\frac{36}{20\,475}\approx 0,002$$

10. Número de resultados possíveis:
$^{10}A'_{4}\times {}^{26}A'_{2}=10^{4}\times 26^{4}=10\,000\times 676=6\,760\,000$
$^{10}A'_{4}$: número de sequências de 4 algarismos, repetidos ou não, dos 10 disponíveis.
$^{26}A'_{2}$: número de maneiras de escolher 2 letras, repetidos ou não, das 26 disponíveis.

10.1. Número de resultados favoráveis:
$^{9}A'_{4}\times 26\times 1=9^{4}\times 26=6561\times 26=170\,586$
$^{9}A'_{4}$: número de sequências de 4 algarismos, repetidos ou não, que se podem formar com os algarismos de 1 a 9. (Para que o produto seja não nulo, nenhum algarismo pode ser 0.)
26: número de maneiras de escolher a primeira letra.
1: A segunda letra é igual à primeira.

$$P=\frac{{}^{9}A'_{4}\times 26\times 1}{{}^{10}A'_{4}\times {}^{26}A'_{2}}=\frac{170\,586}{6\,760\,000}\approx 2,5\%$$

10.2. Número de resultados favoráveis:
$^{5}A'_{4}\times {}^{26}A_{2}=5^{4}\times 650=625\times 650=406\,250$
$^{5}A'_{4}$: número de sequências de 4 algarismos, repetidos ou não, que se podem formar com os 5 algarismos ímpares. (Para que o produto seja ímpar, todos os algarismos têm de ser ímpares).
$^{26}A_{2}$: Número de sequências de 2 letras diferentes das 26 disponíveis.

$$P=\frac{{}^{5}A'_{4}\times {}^{26}A_{2}}{{}^{10}A'_{4}\times {}^{26}A'_{2}}=\frac{406\,250}{6\,760\,000}\approx 6,0\%$$

MMA12DR © Porto Editora

Pág. 33

Avaliação formativa 1

1. Número de resultados possíveis:
$P_9 = 9! = 362\,880$ (é o número de maneiras de ordenar os 9 alunos).

1.1. Número de resultados favoráveis:
$P_4 \times P_5 \times 2 = 4! \times 5! \times 2 = 24 \times 120 \times 2 = 5760$
P_4: Número de maneiras de ordenar os 4 alunos da turma A.
P_5: Número de maneiras de ordenar os 5 alunos da turma B.
2: Os alunos da turma A podem estar no início da fila e os da B no fim ou ao contrário.

$$P = \frac{P_4 \times P_5 \times 2}{P_9} = \frac{5760}{362\,880} = \frac{1}{63}$$

1.2.

I) Considerando os resultados possíveis $9!$, que é o número de maneiras diferentes de ordenar as 9 pessoas, podemos considerar $4! \times 5! \times 6$ resultados favoráveis. $4!$ representa o número de formas diferentes de ordenar os 4 alunos da turma A. Para cada uma destas formas, existem $5!$ formas diferentes de ordenar os 5 alunos da turma B e para cada uma destas, existem 6 posições diferentes onde podem ficar 4 alunos da turma A (no início da fila, no fim da fila ou entre dois alunos da turma B).

II) Considerando os resultados possíveis $9!$, que é o número de maneiras diferentes de ordenar as 9 pessoas, podemos considerar $4! \times 6!$ resultados favoráveis. $4!$ representa o número de formas diferentes de ordenar os 4 alunos da turma A. Para cada uma destas formas, existem $6!$ formas diferentes de ordenar os 6 elementos (os 5 alunos da turma B e o bloco de alunos da turma A).

III) Considerando os resultados possíveis $^9C_4 \times {}^5C_5$, que é o número de maneiras diferentes de ordenar 4 dos 9 lugares da fila para colocar os 4 alunos da turma A, ficando os 5 alunos da turma B nos 5 restantes lugares, podemos considerar 6 resultados favoráveis que são as 6 posições onde podem ficar os alunos da turma A (no início da fila, no fim da fila ou entre 2 alunos da turma B).

2. **I)** Número de resultados possíveis: $^9C_5 = 126$ (é o número de maneiras de escolher 5 dos nove lugares para colocar os jornalistas de rádio)
Número de resultados favoráveis: $^7C_3 = 35$
(colocando 2 jornalistas de rádio nas extremidades, $^7C_3$ é o número de maneiras de ocupar 3 dos restantes 7 lugares com os 3 jornalistas de rádio)
I – c)

II) Número de resultados possíveis:
$P_9 = 9! = 362\,880$ (é o número de maneiras de escolher os 9 jornalistas)
Número de resultados favoráveis:
$3! \times 7! = 6 \times 5040 = 30\,240$
$3!$: número de maneiras de ordenar 3 jornalistas de imprensa.
$7!$: número de maneiras de ordenar 7 elementos (o bloco dos 3 jornalistas de imprensa e os restantes 6 jornalistas).

$$P = \frac{3! \times 7!}{9!}$$

II – a)

III) Número de resultados possíveis: $^9C_3 = 84$ (é o número de maneiras de selecionar 3 dos 9 jornalistas)
Número de resultados favoráveis:
$^5C_3 \times 3 = 10 \times 3 = 30$
$^5C_3$: número de maneiras de escolher 3 dos 5 jornalistas de rádio.
3: número de maneiras de escolher um jornalista da imprensa escrita.

$$P = \frac{^5C_3 \times 3}{^9C_3}$$

III – b)

IV) Número de resultados possíveis: $^9A_3 = 504$
(é o número de maneiras de selecionar ordenadamente 3 dos 9 jornalistas)
Número de resultados favoráveis: $^4A_3 = 24$
(é o número de maneiras de selecionar ordenadamente 3 dos 4 jornalistas que não são rádio)

$$P = \frac{^4A_3}{^9A_3}$$

IV – b)
Resposta:
I – c); II – a); III – b); IV – b)

3. Número de resultados possíveis: $^7A'_7 = 7^7$
(é o número de sequências de 7 algarismos, repetidos ou não, que se podem formar com os algarismos de 1 a 7).
Número de resultados favoráveis: $^7A'_6 \times 4 = 7^6 \times 4$
$^7A'_6$: número de sequências de 6 algarismos, repetidos ou não, que se podem formar com os algarismos de 1 a 7)
4: número de possibilidades para o 7.º algarismo (1, 3, 5 ou 7).

$$P = \frac{7^6 \times 4}{7^7} = \frac{4}{7}$$

MMA12DR © Porto Editora

2. Probabilidade condicionada. Regra do produto. Acontecimentos independentes

Pág. 35

Questão 35

35.1. $P(\overline{A}) = 2P(B)$

$$P(\overline{A \cup B}) = 5P(A \cap B) \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 5P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 5P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 5P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(\overline{A}) - P(B) = 4P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2P(B) - P(B) = 4P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) = 4P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{P(B)}{4}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{P(B)}{4}}{P(B)} = \frac{P(B)}{4P(B)} \underset{P(B)>0}{=} \frac{1}{4}$$

35.2. a) $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A) \times P(B \mid A)$

$$1 - P(A) \times P(B \mid A) = 1 - P(A) \times \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$\underset{P(A)>0}{=} 1 - P(A \cap B) = P(\overline{A \cap B})$$

b) $1 - P\left[(A \cap \overline{B}) \mid A\right] = P(B \mid A)$

$$1 - P\left[(A \cap \overline{B}) \mid A\right] = 1 - \frac{P\left[(A \cap \overline{B}) \cap A\right]}{P(A)} =$$

$$= 1 - \frac{P\left[(A \cap A) \cap \overline{B}\right]}{P(A)} = 1 - \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} =$$

$$= 1 - \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - \frac{P(A)}{P(A)} + \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= 1 - \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - 1 + \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B \mid A)$$

Pág. 36

Questão 36

72 animais

- $\frac{7}{12}$ dos animais são javalis

$\frac{7}{12} \times 72 = 42$ javalis

- $\frac{4}{7}$ dos javalis são fêmeas

$\frac{4}{7} \times 42 = 24$ javalis fêmeas

$42 - 24 = 18$ javalis machos

- 16 lobos são machos

$72 - 42 = 18$ lobos

$30 - 16 = 14$ lobos fêmeas

Considere se os acontecimentos:

I: "O animal encontrado é um javali."

F: "O animal encontrado é uma fêmea."

Vamos organizar os dados numa tabela de contingência com contagens. Na tabela, os dados estão colocados a vermelho.

	F	$\overline{F}$	Total
J	24	18	42
$\overline{J}$	14	16	30
Total	38	34	72

$24 + 14 = 38$

$72 - 38 = 34$

$$P(F \mid \overline{J}) = \frac{P(F \cap \overline{J})}{P(\overline{J})} = \frac{\frac{14}{72}}{\frac{30}{72}} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

Pág. 37

Questão 37

20% dos provadores eram estrangeiros

96 dos provadores eram portugueses

96 — 80%

x — 20%

$$x = \frac{20 \times 96}{80} = 24$$

24 dos provadores eram estrangeiros

Total de provadores: $96 + 24 = 120$

30% dos provadores votaram na marca *A*.

$30\% \times 120 = 0{,}3 \times 120 = 36$

45% dos provadores votaram na marca *B*.

$45\% \times 120 = 0{,}45 \times 120 = 54$

25% dos provadores portugueses votaram na marca *C*.

$25\% \times 96 = 0{,}25 \times 96 = 24$

50% dos provadores estrangeiros votaram na marca *B*.

$50\% \times 24 = 0{,}5 \times 24 = 12$

Vamos construir uma tabela de contingência com contagem.

Na tabela, os dados estão colocados a vermelho.

	A	B	C	Total
E	6	12	6	24
$\overline{E}$	30	42	24	96
Total	36	54	30	120

$120 - 36 - 54 = 30$

$30 - 24 = 6$

$54 - 12 = 42$

$24 - 12 - 6 = 6$

$36 - 6 = 30$

MMA12DR © Porto Editora

37.1. Participam no evento 120 provadores.

37.2. a) $P(A \cap E) = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$

b) $P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E) =$

$= \frac{36}{120} + \frac{24}{120} - \frac{6}{20} = \frac{9}{20}$

c) $P(A \mid \bar{E}) = \frac{P(A \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{\frac{30}{120}}{\frac{96}{120}} = \frac{30}{96} = \frac{5}{16}$

d) $P(E \mid B) = \frac{P(E \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{12}{120}}{\frac{54}{120}} = \frac{12}{54} = \frac{2}{9}$

Pág. 38

Questão 38

Sejam os acontecimentos:

I: "O passageiro fala Inglês."

E: "O passageiro é estrangeiro."

Sabemos que:

$P(I) = \frac{3}{5}$; $P(E) = \frac{4}{5}$

$P(\bar{E} \mid I) = 20\% = 0{,}2 = \frac{1}{5}$

$P(\bar{E} \mid I) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{P(\bar{E} \cap I)}{P(I)} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(\bar{E} \cap I) = \frac{1}{5} \times P(I) \Leftrightarrow P(\bar{E} \cap I) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(\bar{E} \cap I) = \frac{3}{25}$

Vamos construir uma tabela de contingência com frações.

Os dados estão escritos a vermelho.

	E	$\bar{E}$	**Total**
I	$\frac{12}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{5}$
$\bar{I}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{5}$
Total	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$P(\bar{E}) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$; $P(\bar{I}) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

$P(I \cap E) = \frac{3}{5} - \frac{3}{25} = \frac{12}{25}$

$P(\bar{I} \cap E) = \frac{4}{5} - \frac{12}{25} = \frac{8}{25}$

$P(\bar{I} \cap \bar{E}) = \frac{2}{5} - \frac{8}{25} = \frac{2}{25}$

$P(\bar{I} \mid E) = \frac{P(\bar{I} \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{8}{25}}{\frac{4}{5}} = \frac{5 \times 8}{4 \times 25} = \frac{2}{5}$

Questão 39

$P(R) = \frac{5}{9}$

$P(\bar{R}) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$

$P(\bar{S} \mid \bar{R}) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(\bar{S} \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(\bar{S} \cap \bar{R}) = \frac{1}{3} \times P(\bar{R}) \Leftrightarrow P(\bar{S} \cap \bar{R}) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{27}$

$P(S \mid R) = 40\% = 0{,}4 = \frac{2}{5}$

$P(S \mid R) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{P(S \cap R)}{P(R)} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(S \cap R) = \frac{2}{5} \times P(R) \Leftrightarrow P(S \cap R) = \frac{2}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$

Vamos construir uma tabela de contingência com frações.

Os dados estão escritos a vermelho.

	S	$\bar{S}$	Total
R	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{5}{9}$
$\bar{R}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{4}{9}$
Total	$\frac{14}{27}$	$\frac{13}{27}$	1

$P(R \cap \bar{S}) = \frac{5}{9} - \frac{2}{9} = \frac{3}{9}$

$P(\bar{S}) = \frac{3}{9} + \frac{4}{27} = \frac{13}{27}$

$P(\bar{R} \cap S) = \frac{4}{9} - \frac{4}{27} = \frac{8}{27}$

$P(S) = 1 - \frac{13}{27} = \frac{14}{27}$

39.1. $P(\bar{S} \mid \bar{R})$ representa a probabilidade de o jovem selecionado ter 18 anos sabendo que é rapariga.

$P(\bar{S} \mid \bar{R}) = \frac{1}{3}$

39.2. $P(R \mid S)$ representa a probabilidade de o jovem selecionado ser rapaz sabendo que tem 17 anos.

$P(R \mid S) = \frac{P(R \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{14}{27}} = \frac{2 \times 27}{9 \times 14} = \frac{3}{7}$

39.3. $P(\bar{R} \mid \bar{S})$ representa a probabilidade de o jovem selecionado ser rapariga sabendo que tem 18 anos.

$P(\bar{R} \mid \bar{S}) = \frac{P(\bar{R} \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{\frac{4}{27}}{\frac{13}{27}} = \frac{4 \times 27}{27 \times 13} = \frac{4}{13}$

MMA12DR © Porto Editora

MMA12DR © Porto Editora

Pág. 39

Questão 40

Consideramos os acontecimentos:
M: "O aluno é da ilha de S. Miguel."
F: "O aluno é rapariga."
Sabemos que:

$P(F)=\frac{3}{5}$

$P(\bar{F})=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

$P(M)=3P(\bar{M}) \Leftrightarrow P(M)=3(1-P(M)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(M)=3-3P(M) \Leftrightarrow 4P(M)=3 \Leftrightarrow P(M)=\frac{3}{4}$

$P(\bar{M})=1-P(M)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

$P(\bar{F}\mid\bar{M})=\frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{P(\bar{F}\cap\bar{M})}{P(\bar{M})}=\frac{2}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(\bar{F}\cap\bar{M})=\frac{2}{5}\times P(\bar{M}) \Leftrightarrow P(\bar{F}\cap\bar{M})=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(\bar{F}\cap\bar{M})=\frac{1}{10}$

$P(\bar{M}\mid\bar{F})=?$

$P(\bar{M}\mid\bar{F})=\frac{P(\bar{M}\cap\bar{F})}{P(\bar{F})}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

$P(\bar{M}\mid\bar{F})=\frac{1}{4}$

Questão 41

Consideramos os acontecimentos:
I: "O aluno está inscrito na cozinha italiana."
F: "O aluno está inscrito na cozinha francesa."
Sabemos que:

$P(I)=\frac{3}{5}$

$P(I\cap\bar{F})=\frac{1}{4}$

$P(\bar{F})=\frac{1}{2}$

Vamos resolver o problema utilizando uma tabela de contingência com probabilidades.

	F	$\bar{F}$	Total
I	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{5}$
$\bar{I}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$
Total	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$P(F)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$P(\bar{I})=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

$P(\bar{I}\cap\bar{F})=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

$P(\bar{I}\cap F)=\frac{2}{5}-\frac{1}{4}=\frac{3}{20}$

$P(I\cap F)=\frac{1}{2}-\frac{3}{20}=\frac{7}{20}$

41.1. $P(\bar{I}\cap\bar{F})=\frac{1}{4}$

41.2. $P(I\mid F)=\frac{P(I\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{7}{20}}{\frac{1}{2}}=\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$

Pág. 40

Questão 42

Consideramos os acontecimentos:
M: "O passageiro é mulher."
E: "O passageiro é estrangeiro."
Sabemos que:

$P(M)=58\%$

$P(E)=40\%$

$P(M\cap\bar{E})=\frac{1}{4}=25\%$

Vamos construir uma tabela de contingência com percentagens.
Os dados estão escritos a vermelho.

	E	$\bar{E}$	Total
I	33%	25%	58%
$\bar{M}$	7%	35%	42%
Total	40%	60%	100%

$P(M\cap E)=58\%-25\%=33\%$

$P(\bar{M}\cap E)=40\%-33\%=7\%$

$P(\bar{E})=100\%-40\%=60\%$

$P(\bar{M})=100\%-58\%=42\%$

$P(\bar{M}\cap\bar{E})=42\%-7\%=35\%$

42.1. $P(E\cap\bar{M})=?$

$P(E\cap\bar{M})=\frac{P(E\cap\bar{M})}{P(\bar{M})}=\frac{7\%}{42\%}=\frac{1}{6}$

42.2. $P(M\cup\bar{E})=P(M)+P(\bar{E})-P(M\cap\bar{E})=$

$=58\%+60\%-25\%=93\%=\frac{93}{100}$

Questão 43

Consideramos os acontecimentos:
A: "O aluno está inscrito em confeitaria."
B: "O aluno está inscrito em panificação."
Sabemos que:
$P(A)=52\%$; $P(B)=60\%$; $P(A\cap B)=20\%$

Vamos construir uma tabela de contingência com percentagens.
Os dados estão escritos a vermelho.

	B	$\bar{B}$	Total
A	20%	32%	52%
$\bar{A}$	40%	8%	48%
Total	60%	40%	100%

$P(\bar{A}) = 100\% - 52\% = 48\%$

$P(\bar{A} \cap B) = 60\% - 20\% = 40\%$

$P(A \cap \bar{B}) = 52\% - 20\% = 32\%$

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 48\% - 40\% = 8\%$

$P(\bar{B}) = 100\% - 60\% = 40\%$

43.1. $P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 60\% - 20\% =$

$= 40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$

$P(B \cap \bar{A}) = \frac{2}{5}$

43.2. $P(B \mid \bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{40\%}{48\%} = \frac{5}{6}$

Pág. 41

Questão 44

Sabe-se que:

$P(N) = \frac{48}{60} = \frac{4}{5}$

$P(N \cap R) = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$

$P(\bar{N} \cap R) = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$

44.1. $P(\bar{R} \mid N)$ significa a probabilidade de selecionar uma pessoa não residente em Portugal sabendo que é portuguesa.

44.2. $P(\bar{N} \cap R) = \frac{1}{30}$

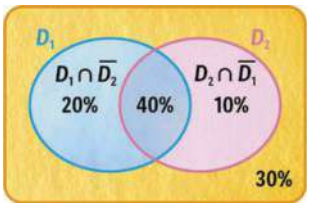
Questão 45

Sabe-se que:

$P(D_1) = 60\%$; $P(D_2) = 50\%$; $P(\bar{D}_2) = 50\%$

$P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2) = 30\%$

45.1.



$P(D_1 \cup D_2) = 100\% - 30\% = 70\%$

$P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 70\% = 60\% + 50\% - P(D_1 \cap D_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(D_1 \cap D_2) = 60\% + 50\% - 70\% \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(D_1 \cap D_2) = 40\%$

$P(D_1 \cap \bar{D}_2) = 60\% - 40\% = 20\%$

$P(D_2 \cap \bar{D}_1) = 50\% - 40\% = 10\%$

45.2. Pretende se determinar $P(D_1 \mid \bar{D}_2)$

$P(D_1 \mid \bar{D}_2) = \frac{P(D_1 \cap \bar{D}_2)}{P(\bar{D}_2)} = \frac{20\%}{50\%} = \frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%$

Pág. 42

Questão 46

140 finalistas

46.1.

	30	10	33	27	26	14
1.º	A	A	B	B	C	C
2.º	C	B	A	C	A	B
3.º	B	C	C	A	B	A

46.2. a) $P(S) = \frac{26+14}{140} = \frac{2}{7}$

b) $P(T) = \frac{10+14}{140} = \frac{6}{35}$

c) $P(S \cap T) = \frac{14}{140} = \frac{1}{10}$

d) $P(S \mid T) = \frac{P(S \cap T)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{6}{35}} = \frac{35}{60} = \frac{7}{12}$

Pág. 43

Questão 47

Consideremos os acontecimentos:
L: "O turista já visitou Lisboa."
S: "O turista já visitou Sintra."
Sabemos que:

$P(L) = 3P(S)$

$P(L \cup S) = 4P(L \cap S)$

$P(\bar{L} \cap \bar{S}) = \frac{3}{5}$

Seja $x = P(S)$.

$P(L) = 3x$

MMA12DR © Porto Editora

$P(L \cup S) = P(L) + P(S) - P(L \cap S) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4P(L \cap S) = P(L) + P(S) - P(L \cap S) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5P(L \cap S) = 3x + x \Leftrightarrow P(L \cap S) = \frac{4}{5}x$

Vamos construir uma tabela de contingência.

	S	$\bar{S}$	Total
L	$\frac{4}{5}x$	$\frac{11}{5}x$	$3x$
$\bar{L}$	$\frac{x}{5}$	$\frac{3}{5}$	$1-3x$
Total	x	$x-1$	1

$P(\bar{L} \cap S) = x - \frac{4x}{5} = \frac{x}{5}$

$P(L \cap \bar{S}) = 3x - \frac{4x}{5} = \frac{11x}{5}$

$\frac{x}{5} + \frac{3}{5} = 1 - 3x \Leftrightarrow x + 3 = 5 - 15x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{16} \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$

47.1. $P(S \cap L) = ?$

$P(S \cap L) = \frac{4x}{5} = \frac{4 \times \frac{1}{8}}{5} = \frac{\frac{1}{2}}{5} = \frac{1}{10}$

47.2. $P(\bar{L} \mid S) = ?$

$P(\bar{L} \mid S) = \frac{P(\bar{L} \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{x}{5}}{x} = \frac{\cancel{x}}{5\cancel{x}} \underset{(x>0)}{=} \frac{1}{5}$

47.3. $P(\bar{S} \mid L) = ?$

$P(\bar{S} \mid L) = \frac{P(\bar{S} \cap L)}{P(L)} = \frac{\frac{11}{5}\cancel{x}}{3\cancel{x}} \underset{(x>0)}{=} \frac{11}{15}$

Pág. 44

Questão 48

Consideremos os acontecimentos:
M: "O aluno estuda música."
D: "O aluno tem mais de 16 anos."
Sabemos que:

$P(D) = 45\% = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$

$P(\bar{D}) = \frac{11}{20}$

$P(M \mid \bar{D}) = \frac{3}{11} \Leftrightarrow \frac{P(M \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{3}{11} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(M \mid \bar{D}) = \frac{3}{11} \times P(\bar{D}) \Leftrightarrow P(M \cap \bar{D}) = \frac{3}{11} \times \frac{11}{20} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(M \cap \bar{D}) = \frac{3}{20}$

$P(D \mid \bar{M}) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(D \cap \bar{M})}{P(\bar{M})} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(D \cap \bar{M}) = \frac{1}{3} \times P(\bar{M})$

Vamos construir uma tabela de contingência.
Seja $x = P(M)$.

$P(\bar{M}) = 1 - x$

$P(D \cap \bar{M}) = \frac{1}{3}(1-x) = \frac{1}{3} - \frac{x}{3}$

$P(\bar{M} \cap \bar{D}) = \frac{11}{20} - \frac{3}{20} = \frac{2}{5}$

$\frac{1}{3} - \frac{x}{3} + \frac{2}{5} = 1 - x \Leftrightarrow -\frac{x}{3} + x = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x = \frac{4}{15} \Leftrightarrow 10x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$

	D	$\bar{D}$	Total
M		$\frac{3}{20}$	x
$\bar{M}$	$\frac{1}{3} - \frac{x}{3}$	$\frac{2}{5}$	$1-x$
Total	$\frac{9}{20}$	$\frac{11}{20}$	1

Cálculos auxiliares:

$x = \frac{2}{5}$; $P(\bar{M}) = 1 - x = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$P(\bar{D} \mid \bar{M}) = \frac{P(\bar{D} \cap \bar{M})}{P(\bar{M})} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}$

Resposta: $\frac{2}{3}$

Questão 49

$P(\bar{M}_2) = 2P(M_3)$

$P(M_2 \mid M_3) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{P(M_2 \cap M_3)}{P(M_3)} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(M_2 \cap M_3) = \frac{3}{4} \times P(M_3)$

$P(M_3 \mid M_2) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{P(M_3 \cap M_2)}{P(M_2)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(M_3 \cap M_2) = \frac{1}{4} \times P(M_2)$

Seja $x = P(M_3)$.

$P(\bar{M}_2) = 2x$; $P(M_2) = 1 - 2x$

$P(M_2 \cap M_3) = \frac{3}{4}x$

$P(M_3 \cap M_2) = \frac{1}{4}(1-2x) = \frac{1}{4} + \frac{x}{2}$

MMA12DR © Porto Editora

$\frac{3}{4}x = \frac{1}{4} - \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{4}x + \frac{x}{2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 3x + 2x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$

$P(M_3) = \frac{1}{5}$

Seja n o número de faces do cubo.

$P(M_3) = \frac{4}{n}$; $\frac{4}{n} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow n = 20$

O número de faces do dado são 20.

Pág. 45

Questão 50

Sabemos que:

$P(G) = P(I)$; $P(\bar{G}) = P(\bar{I})$

$P(G \cup \bar{I}) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow P(G) + P(\bar{I}) - P(G \cap \bar{I}) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(G) + P(\bar{I}) - [P(G) - P(G \cap I)] = \frac{3}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{P(G)} + P(\bar{I}) - \cancel{P(G)} + P(G \cap I) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(\bar{I}) + P(G \cap I) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow P(G \cap I) = \frac{3}{5} - P(\bar{I}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(G \cap I) = \frac{3}{5} - P(\bar{G}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(G \cap I) = \frac{3}{5} - [1 - P(G)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(G \cap I) = \frac{3}{5} - 1 + P(G) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(G \cap I) = -\frac{2}{5} + P(G) \quad (1)$

$P(G \mid \bar{I}) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{P(G \cap \bar{I})}{P(\bar{I})} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(G \cap \bar{I}) = \frac{2}{3} \times P(\bar{I}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(G) - P(G \cap I) = \frac{2}{3} \times P(\bar{G}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(G) - P(G \cap I) = \frac{2}{3}[1 - P(\bar{G})] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(G) - P(G \cap I) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}P(G) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(G \cap I) = P(G) - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}P(G) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(G \cap I) = \frac{5}{3}P(G) - \frac{2}{3} \quad (2)$

De (1) e (2) vem:

$-\frac{2}{5} + P(G) = \frac{5}{3}P(G) - \frac{2}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15P(G) - 25P(G) = -10 + 6 \Leftrightarrow$

$-10P(G) = -4 \Leftrightarrow P(G) = \frac{2}{5}$

Questão 51

$P(B) = 0,74$; $P(\bar{B}) = 1 - 0,74 = 0,26$

$P(\overline{A \cap B}) = 0,8 \Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) = 0,8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 1 - 0,8 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,2$

$P(A \mid \bar{B}) = \frac{10}{13} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{10}{13} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap \bar{B}) = \frac{10}{13}P(\bar{B}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = \frac{10}{13} \times P(\bar{B}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A) - 0,2 = \frac{10}{13} \times \frac{26}{100} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A) = 0,2 + 0,2 \Leftrightarrow P(A) = 0,4$

$P(A) = 0,4$

Pág. 46

Questão 52

52.1. $P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \times P(V_2 \mid V_1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

52.2. $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2 \mid A_1) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

52.3. $P(V_1 \cap A_2) = P(V_1) \times P(A_2 \mid V_1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

Pág. 47

Questão 53

Consideremos os acontecimentos:

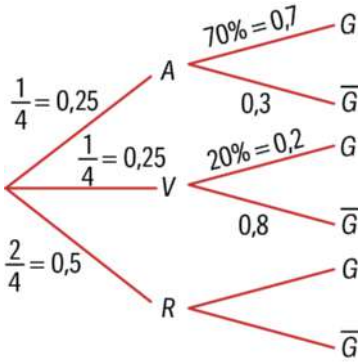
A: "A bola tirada é azul."

V: "A bola tirada é verde."

R: "A bola tirada é cor-de-rosa."

G: "A Florbela ganha o automóvel."

Vamos construir uma árvore de probabilidades.



$P(\bar{G} \mid A) = 1 - 0,7 = 0,3$

$P(\bar{G} \mid V) = 1 - 0,2 = 0,8$

$P(G) = 32,5\% \Leftrightarrow P(G) = 0,325 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap G) + P(V \cap G) + P(R \cap G) = 0,325 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,25 \times 0,7 + 0,25 \times 0,2 + P(R \cap G) = 0,325 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,175 + 0,05 + P(R \cap G) = 0,325 \Leftrightarrow$

MMA12DR © Porto Editora

$\Leftrightarrow P(R \cap G) = 0{,}1$

Pretendemos determinar $P(G \mid R)$.

$$P(G \mid R) = \frac{P(G \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = 0{,}2$$

$P(G \mid R) = 20\%$

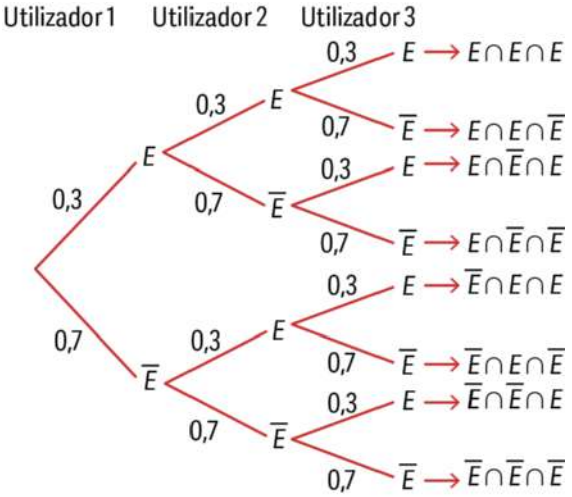
Questão 54

Sabe-se que:

$P(E) = 30\% = 0{,}3$;

$P(\overline{E}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

54.1.



54.2. Pelo menos dois utilizadores esquecerem a palavra-passe significa exatamente dois ou três esquecerem a palavra-passe.

$$P = P(E \cap E \cap \overline{E}) + P(E \cap \overline{E} \cap E) + P(\overline{E} \cap E \cap E) +$$

$$+ P(E \cap E \cap E) =$$

$$= (0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}7) \times 3 + (0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}3) =$$

$$= 0{,}216$$

Pág. 48

Questão 55

Sabe-se que:

$P(I \mid B) = 60\% = 0{,}6$; $P(I \cap B) = \frac{1}{7}$

$P(I) = \frac{11}{21}$

1.º (tabela de contingência)

	I	$\overline{I}$	Total
B	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{5}{21}$
$\overline{B}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{16}{21}$
Total	$\frac{11}{21}$	$\frac{1}{2}$	1

$P(\overline{B} \cap I) = \frac{11}{21} - \frac{1}{7} = \frac{8}{21}$

$P(I \cap B) = P(I \mid B) \times P(B) \Leftrightarrow \frac{1}{7} = 0{,}6 \times P(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B) = \frac{\frac{1}{7}}{0{,}6} \Leftrightarrow P(B) = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{6}{10}} \Leftrightarrow P(B) = \frac{5}{21}$

$P(\overline{B}) = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}$; $P(B \cap \overline{I}) = \frac{5}{21} - \frac{1}{7} = \frac{2}{21}$

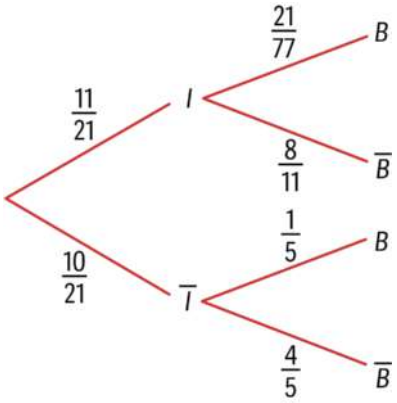
$P(\overline{B} \cap \overline{I}) = \frac{16}{21} - \frac{8}{21} = \frac{8}{21}$

2.º

55.1. $P(\overline{B} \cap I) = \frac{8}{21}$

55.2. $P(\overline{I} \mid B) = \frac{P(\overline{I} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{21}}{\frac{5}{21}} = \frac{2}{5}$

3.º (Árvore de probabilidades)



$P(\overline{I}) = 1 - \frac{11}{21} = \frac{10}{21}$

$P(B \mid I) = \frac{P(B \cap I)}{P(I)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{11}{21}} = \frac{21}{77} = \frac{3}{11}$

$P(\overline{B} \mid I) = 1 - \frac{21}{77} = \frac{8}{11}$

$P(I \mid B) = 0{,}6 \Leftrightarrow \frac{P(I \cap B)}{P(B)} = 0{,}6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(I \cap B) = 0{,}6 \times P(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B) = \frac{\frac{1}{7}}{0{,}6} \Leftrightarrow P(B) = \frac{5}{21}$

$P(B) = P(I \cap B) + P(\overline{I} \cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5}{21} = \frac{1}{7} + P(\overline{I} \cap B) \Leftrightarrow P(\overline{I} \cap B) = \frac{2}{21} \Leftrightarrow$

$P(B \mid \overline{I}) = \frac{P(\overline{I} \cap B)}{P(\overline{I})} = \frac{\frac{2}{21}}{\frac{10}{21}} = \frac{1}{5}$

$P(\overline{B} \mid \overline{I}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

MMA12DR © Porto Editora

4.º

55.1. $P(\bar{B} \cap I) = \frac{\cancel{11}}{21} \times \frac{8}{\cancel{11}} = \frac{8}{21}$

55.2. $P(\bar{I} \mid B) = \frac{P(\bar{I} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{21}}{\frac{5}{21}} = \frac{2}{5}$

5.º Achei mais fácil a tabela de contingência.

Pág. 50

Questão 56

Consideramos os acontecimentos:
R: "O aluno é rapariga."
V: "O aluno está inscrito na viagem de finalistas."

$P(R) = 60\% = 0,6$

$P(V) = 70\% = 0,7$

$P(\bar{V} \mid R) = 20\% = 0,2$

Pretendemos determinar $P(\bar{R} \mid V)$.

1.º processo (tabela de contingência)

	V	$\bar{V}$	Total
R	0,48	0,12	0,6
$\bar{R}$	0,22		0,4
Total	0,7	0,3	1

$P(\bar{R}) = 1 - 0,6 = 0,4$

$P(\bar{V}) = 1 - 0,7 = 0,3$

$P(\bar{V} \cap R) = P(\bar{V} \mid R) \times P(R) = 0,2 \times 0,6 = 0,12$

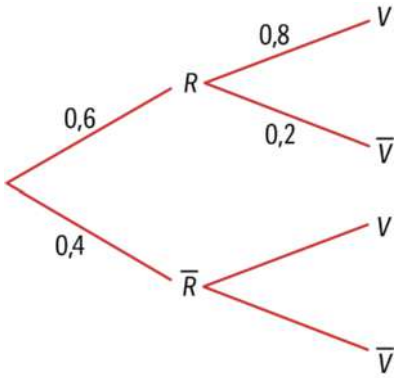
$P(R \cap V) = 0,6 - 0,12 = 0,48$

$P(\bar{R} \cap V) = 0,7 - 0,48 = 0,22$

$P(\bar{R} \mid V) = \frac{P(\bar{R} \cap V)}{P(V)} = \frac{0,22}{0,7} \approx 0,3143$

$P(\bar{R} \mid V) \approx 31\%$

2.º processo (árvore de probabilidades)



$P(\bar{R}) = 1 - 0,6 = 0,4$

$P(V \mid R) = 1 - 0,2 = 0,8$

$P(V) = 0,7 \Leftrightarrow P(R \cap V) + P(\bar{R} \cap V) = 0,7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,6 \times 0,8 + P(\bar{R} \cap V) = 0,7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,48 + P(\bar{R} \cap V) = 0,7 \Leftrightarrow P(\bar{R} \cap V) = 0,22$

$P(\bar{R} \mid V) = \frac{P(\bar{R} \cap V)}{P(V)} = \frac{0,22}{0,7} \approx 0,3143$

$P(\bar{R} \mid V) = 31\%$

Questão 57

Consideramos os acontecimentos:
I: "O hóspede é inglês."
C: "O hóspede aceitou o convite."
Sabe-se que:

$P(I) = \frac{2}{5}$; $P(I \cap \bar{C}) = \frac{1}{10}$; $P(C \mid \bar{I}) = \frac{3}{4}$

Vamos construir uma tabela de contingência.

	C	$\bar{C}$	Total
I	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$
$\bar{I}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{5}$
Total	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$P(\bar{I}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$P(C \mid \bar{I}) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(C \cap \bar{I}) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} \Leftrightarrow P(C \cap \bar{I}) = \frac{9}{20}$

$P(I \cap C) = \frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$

$P(C) = \frac{3}{10} + \frac{9}{20} = \frac{3}{4}$

$P(\bar{C}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$P(\bar{I} \cap \bar{C}) = \frac{3}{5} - \frac{9}{20} = \frac{3}{20}$

57.1. Pretende-se determinar $P(C)$.

$P(C) = \frac{3}{4}$

57.2. Pretende-se determinar $P(\bar{I} \cap \bar{C})$.

$P(\bar{I} \cap \bar{C}) = \frac{3}{20}$

57.3. Pretende-se determinar $P(\bar{I} \mid C)$.

$P(\bar{I} \mid C) = \frac{P(\bar{I} \cap \bar{C})}{P(C)} = \frac{\frac{9}{20}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{5}$

Pág. 51

Questão 58

Consideramos os acontecimentos:
R: "O aluno é rapaz."
S: "O aluno frequenta o 6.º ano."

MMA12DR © Porto Editora

Sabe-se que:

$P(R)=\frac{13}{20}$

$P(R\cap S)=\frac{3}{20}$

$P(R\cap \overline{S})=\frac{5}{7}$

Pretendemos determinar $P(\overline{R}\cap S)$.

Utilizando uma tabela de contingência tem-se que:

	S	$\overline{S}$	Total
R	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{20}$
$\overline{R}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{20}$
Total	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	1

$P(\overline{R})=1-\frac{13}{20}=\frac{7}{20}$

$P(R\cap \overline{S})=\frac{13}{20}-\frac{3}{20}=\frac{1}{2}$

$P(R\mid \overline{S})=\frac{5}{7}\Leftrightarrow P(R\cap \overline{S})=\frac{5}{7}\times P(\overline{S})\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(\overline{S})=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{7}}\Leftrightarrow P(\overline{S})=\frac{7}{10}$

$P(S)=1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$

$P(\overline{R}\cap S)=\frac{3}{10}-\frac{3}{20}=\frac{3}{20}$

$P(\overline{R}\cap \overline{S})=\frac{7}{10}-\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$

$P(\overline{R}\cap S)=\frac{3}{20}$

Questão 59

Consideremos os acontecimentos:

A: "A garrafa é de azeite do Alentejo."

V: "A garrafa é de azeite virgem."

Sabe-se que:

$P(A)=80\%=0{,}8=\frac{4}{5}$; $P(V)=\frac{1}{5}$

$P(A\mid V)=\frac{1}{4}$

Pretendemos determinar $P(A\mid \overline{V})$.

Utilizando uma tabela de contingência, tem-se que:

	V	$\overline{V}$	Total
A	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$
$\overline{A}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$
Total	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	1

$P(\overline{A})=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$; $P(\overline{V})=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

$P(A\cap V)=P(A\mid V)\times P(V)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$

$P(\overline{A}\cap V)=\frac{1}{5}-\frac{1}{20}=\frac{3}{20}$

$P(A\cap \overline{V})=\frac{4}{5}-\frac{1}{20}=\frac{3}{4}$

$P(\overline{A}\cap \overline{V})=\frac{1}{5}-\frac{3}{20}=\frac{1}{20}$

$P(A\mid \overline{V})=\frac{P(A\cap \overline{V})}{P(\overline{V})}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{4}{5}}=\frac{15}{16}$

$P(A\mid \overline{V})=\frac{15}{16}$

Pág. 52

Questão 60

60.1. $P=\frac{43+74}{1000}=0{,}117=11{,}7\%$

60.2. $P=\frac{70+20+74+92}{1000}=0{,}256=25{,}6\%$

60.3. $P=\frac{74}{43+74}=0{,}632479\approx 63{,}2\%$

60.4. $P=\frac{20}{70+20+74+92}=0{,}078125\approx 7{,}8\%$

Questão 61

$P(\overline{B})=2P(A)$

$P(\overline{A\cup B})=4P(A\cap B)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-P(A\cup B)=4P(A\cap B)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))=4P(A\cap B)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=4P(A\cap B)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-P(B)-P(A)-3P(A\cap B)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2P(A)-P(A)-3P(A\cap B)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A)=3P(A\cap B)$

$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\cancel{P(A\cap B)}}{3\cancel{P(A\cap B)}}=\frac{1}{3}$

$P(B\mid A)=\frac{1}{3}$

Pág. 53

Questão 62

62.1. Sabe-se que:

$P(A)=2P(B)\Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{2}P(A)$

$P(A)=P(C)$

MMA12DR © Porto Editora

$P(A)+P(B)+P(C)=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A)+\frac{1}{2}P(A)+P(A)=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2P(A)+P(A)+2P(A)=2 \Leftrightarrow 5P(A)=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A)=\frac{2}{5} \Leftrightarrow P(A)=0,4$

$P(B)=\frac{1}{2}P(A)=\frac{1}{2}\times 0,4=0,2$

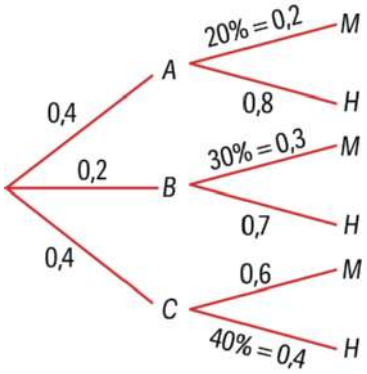
$P(C)=P(A)=0,4$

M – Mulher; H – Homem;

$P(H \mid A)=1-0,2=0,8$

$P(H \mid B)=1-0,3=0,7$

$P(M \mid C)=1-0,4=0,6$



62.2. Pretendemos determinar $P(B \mid M)$.

$P(B \mid M)=\frac{P(B \cap M)}{P(M)}=\frac{P(B)\times P(M \mid B)}{P(M)}=$

$=\frac{0,2\times 0,3}{0,38}=0,157895 \approx 15,8\%$

Cálculo auxiliar

$P(M)=P(A \cap M)+P(B \cap M)+P(C \cap M)=$

$=0,4\times 0,2+0,2\times 0,3+0,4\times 0,6=$

$=0,08+0,06+0,24=0,38$

Questão 63

Sabe-se que:

- $P(A)=P(B)$; $P(A \cap B)=P(A)\times P(B)$;
- $P(A \mid B)=\frac{1}{3}$; $P(A)>0$;

$P(A \mid B)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\underset{(P(B)>0)}{\Leftrightarrow} \frac{P(A)\times \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow P(A)=\frac{1}{3}$

$P(B)=\frac{1}{3}$

$P(A \cap B)=P(A)\times P(B)=P(A)\times P(A)=$

$=\left[P(A)\right]^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)=$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$

Pág. 54

Questão 64

Seja v o número de bolas vermelhas e a o número de bolas azuis que existiam inicialmente no saco.

Total: $v+a$

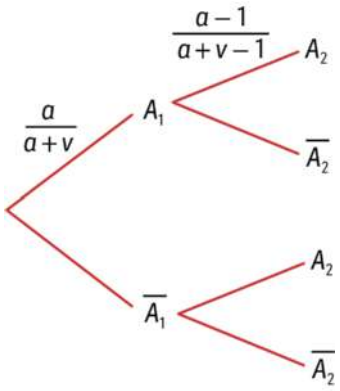
$P(A_1 \cap A_2)=\frac{1}{3}P(A_1) \underset{P(A_1)>0}{\Leftrightarrow} \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A_2 \mid A_1)=\frac{1}{3}$

$P(A_2 \mid A_1)$ designa a probabilidade de a segunda bola retirada ser azul sabendo que a primeira bola retirada também é azul.

Após a primeira bola retirada ser azul ficam no saco $v+a-1$ bolas, entre as quais $a-1$ são azuis.

$P(A_2 \mid A_1)=\frac{a-1}{v+a-1}$



$P(A_2 \mid A_1)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{a-1}{v+a-1}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3a-a=v+a-1 \Leftrightarrow v=2a-2$

Como a é o número de bolas azuis existentes no saco, a é um número natural. Logo, $2a-2$ é um número par, ou seja, existe um número par de bolas vermelhas no saco.

Questão 65

7 vermelhas; 4 azuis

$7+n$ vermelhas; $4+n$ azuis

65.1. Seja o acontecimento:

A: "A bola extraída é azul."

Total de bolas: $7+n+4+n=11+2n$

$P(A)=\frac{4}{9} \Leftrightarrow \frac{4+n}{9+n}=\frac{4}{9} \Leftrightarrow$

$\underset{(11+2n\neq 0)}{\Leftrightarrow} 9(4+n)=4(11+2n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 36+9n=44+8n \Leftrightarrow n=8$;

$n=8$

MMA12DR © Porto Editora

65.2. Sejam os acontecimentos:

A_1 : "A primeira bola extraída é azul."

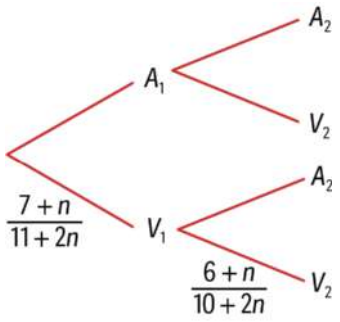
A_2 : "A segunda bola extraída é azul."

V_1 : "A primeira bola extraída é vermelha."

V_2 : "A segunda bola extraída é vermelha."

Pretendemos determinar n sabendo que:

$P(V_2 \mid V_1) = \frac{5}{9}$



$P(V_2 \mid V_1) = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \frac{6+n}{10+2n} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow$

$\underset{(10+2n \neq 0)}{\Leftrightarrow} 9(6+n) = 5(10+2n) \Leftrightarrow n = 4$

Pág. 56

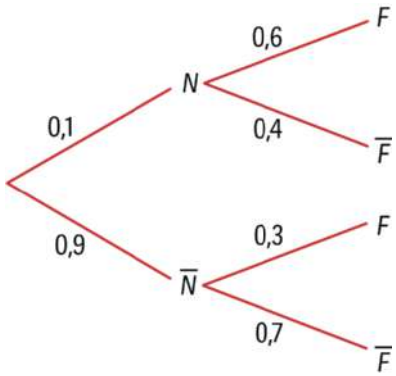
Questão 66

66.1. Sabe-se que:

$P(N) = 10\% = 0{,}1$; $P(F \mid N) = 60\% = 0{,}6$

$P(\overline{F} \mid \overline{N}) = 70\% = 0{,}7$; $P(\overline{N}) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

$P(\overline{F} \mid N) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$; $P(F \mid \overline{N}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$



66.2. a) $P(F) = P(N \cap F) + P(\overline{N} \cap F) =$

$= 0{,}1 \times 0{,}6 + 0{,}9 \times 0{,}3 = 0{,}06 + 0{,}27 = 0{,}33 = \frac{33}{100}$

b) $P(N \mid \overline{F}) = \frac{P(N \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{0{,}1 \times 0{,}4}{0{,}67} = \frac{0{,}04}{0{,}67} = \frac{4}{67}$

Cálculo auxiliar: $P(\overline{F}) = 1 - 0{,}33 = 0{,}67$

66.3. $P(N \cap F) = 0{,}1 \times 0{,}6 = 0{,}06$

$P(N) \times P(F) = 0{,}1 \times 0{,}33 = 0{,}033$

Como $P(N \cap F) \neq P(N) \times P(F)$, os acontecimentos N e F não são independentes.

Pág. 57

Questão 67

67.1. $P(A) = \frac{3}{5}$

$P(L) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(A \cap L) = \frac{3 \times 3}{5 \times 6} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

$P(A) \times P(L) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

Como $P(A \cap L) = P(A) \times P(L)$, A e L são acontecimentos independentes.

67.2. a) $P(A \mid L) = P(A) = \frac{3}{5}$

b) $P(L \mid A) = P(L) = \frac{1}{2}$

Questão 68

A e $\overline{B}$ são independentes.

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P(\overline{B}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = P(A) \times P(\overline{B}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = P(A) \times (1 - P(B)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{P(A)} - P(A \cap B) = \cancel{P(A)} - P(A) \times P(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -P(A \cap B) = -P(A) \times P(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

A e B são independentes.

Pág. 58

Questão 69

Sabe-se que:

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$; $P(A \cap B) = 0{,}18$;

$P(A) = 0{,}3$

$P(\overline{A}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow 0{,}18 = 0{,}3 \times P(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B) = \frac{0{,}18}{0{,}3} \Leftrightarrow P(B) = 0{,}6$

$P(\overline{B}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

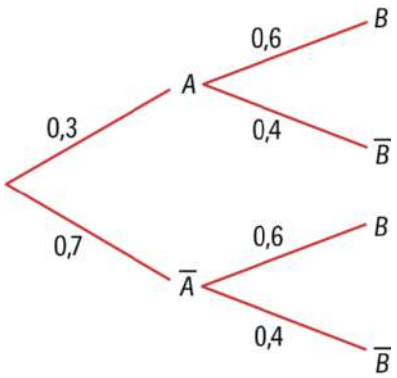
$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}6 - 0{,}18 = 0{,}42$

$P(A \cap \overline{B}) = 0{,}3 - 0{,}18 = 0{,}12$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}7 - 0{,}42 = 0{,}28$

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,18	0,42	0,6
$\overline{B}$	0,12	0,28	0,4
Total	0,3	0,7	1

MMA12DR © Porto Editora



Cálculos auxiliares:

$P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}18}{0{,}3} = 0{,}6$

$P(\overline{B} \mid A) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

$P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{0{,}42}{0{,}7} = 0{,}6$

$P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

Questão 70

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)\ ;\ P(A) = 0{,}3$

$P(\overline{A \cup B}) = 0{,}42 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0{,}42 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0{,}42 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}58$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}58 = 0{,}3 + P(B) - P(A) \times P(B) \Leftrightarrow$

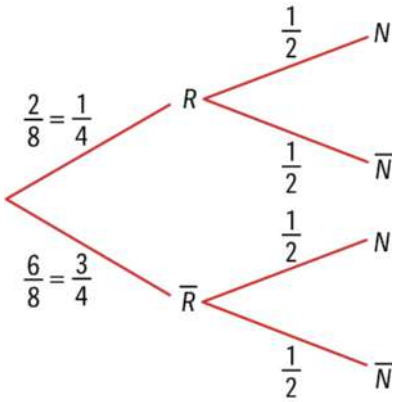
$\Leftrightarrow 0{,}58 - 0{,}3 = P(B) - 0{,}3 \times P(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}28 = 0{,}7P(B) \Leftrightarrow P(B) = \dfrac{0{,}28}{0{,}7} \Leftrightarrow P(B) = 0{,}4$

Pág. 59

Questão 71

71.1.



71.2. $P(N) = P(R \cap N) + P(\overline{R} \cap N) =$

$= \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

71.3. $P(R \cap N) = P(R) \times P(N \mid R) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$

$P(R) \times P(N) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$

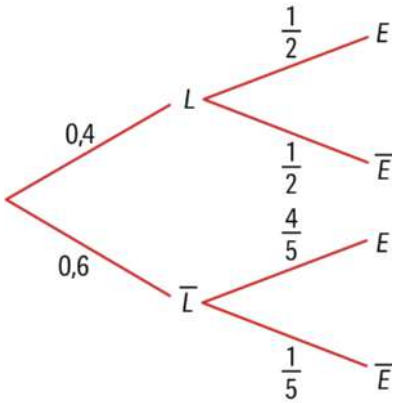
Como $P(R \cap N) = P(R) \times P(N)$, os acontecimentos R e N são independentes.

Pág. 60

Tarefas de consolidação 2

1. Consideremos os acontecimentos:
L: "O participante na vindima vive na localidade."
E: "O participante na vindima é estrangeiro."
Sabe-se que:

- $P(L) = \dfrac{40}{100} = 0{,}4\ ;\ P(E \mid L) = \dfrac{1}{2}\ ;\ P(\overline{E} \mid \overline{L}) = \dfrac{1}{5}$



$P(\overline{L}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

$P(\overline{E} \mid L) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$P(E \mid \overline{L}) = 1 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$

Pretende se determinar $P(\overline{L} \mid E)$

$P(\overline{L} \mid E) = \dfrac{P(\overline{L} \cap E)}{P(E)} = \dfrac{P(E \mid \overline{L}) \times P(\overline{L})}{P(E)} =$

$= \dfrac{\frac{4}{5} \times 0{,}6}{0{,}4 \times \frac{1}{2} + 0{,}6 \times \frac{4}{5}} = \dfrac{\frac{24}{50}}{\frac{2}{10} + \frac{12}{25}} = \dfrac{\frac{12}{25}}{\frac{17}{25}} = \dfrac{12}{17}$

$P(\overline{L} \mid E) = \dfrac{12}{17}$

2. 9 bolas brancas; 11 bolas pretas.
O saco contém 20 bolas.

$P(C \mid (\overline{A} \cap B)) = \dfrac{4}{9}$

$P(C \mid (\overline{A} \cap B))$ significa a probabilidade da terceira bola selecionada ser branca sabendo que a primeira bola selecionada foi branca e a segunda bola selecionada foi preta.

MMA12DR © Porto Editora

MMA12DR © Porto Editora

Quando a terceira bola é selecionada, estão no saco 18 bolas pois duas já foram extraídas. O número de casas possíveis é então 18.
Como a primeira bola selecionada foi branca e a segunda foi preta, quando a terceira bola é selecionada estão no saco 8 bolas brancas.
Assim, como os acontecimentos elementares são equiprováveis, pela regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis, logo a probabilidade pedida é $\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$.

3.1. $P(A)=0,3\ ;\ P(\overline{A})=1-0,3=0,7$

$P(B)=0,6\ ;\ P(\overline{B})=1-0,6=0,4$

$P(B\mid\overline{A})=\frac{4}{7}\Leftrightarrow\frac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{4}{7}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B\cap\overline{A})=\frac{4}{7}P(\overline{A})\Leftrightarrow$

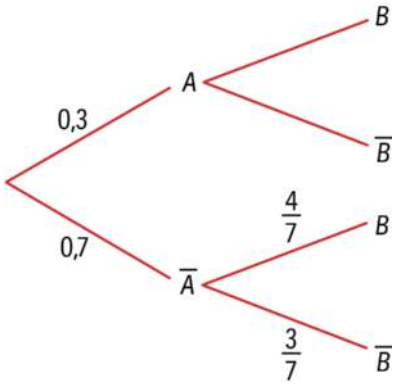
$\Leftrightarrow P(B)-P(A\cap B)=\frac{4}{7}\times 0,7\Leftrightarrow 0$

$\Leftrightarrow 0,6-P(A\cap B)=0,4\Leftrightarrow P(A\cap B)=0,2$

$P(A)\times P(B)=0,3\times 0,6=0,18$

Como $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$, os acontecimentos A e B não são independentes.

3.2. a)



Cálculos auxiliares:

$P(\overline{A})=1-0,3=0,7$

$P(\overline{B}\mid\overline{A})=1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$

$P(\overline{B}\cap\overline{A})=P(\overline{B}\mid\overline{A})\times P(\overline{A})=\frac{3}{7}\times 0,7=\frac{3}{10}=0,3$

b) $P(\overline{A}\mid\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{0,3}{0,4}=0,75$

Cálculos auxiliares:

$P(\overline{B})=1-0,6=0,4$

4. $P(A)=0,5\ ;\ P(B)=0,6$

Pretendemos mostrar que $P(B\mid A)\geq\frac{1}{5}$.

$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A\cap B)}{0,5}=$

$=\frac{P(A\cap B)}{\frac{5}{10}}=2P(A\cap B)$

Cálculos auxiliares:

$P(A\cup B)\leq 1\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)\leq 1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)\geq P(A)+P(B)-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)\geq 0,5+0,6-1\Leftrightarrow P(A\cap B)\geq 0,1\Leftrightarrow$

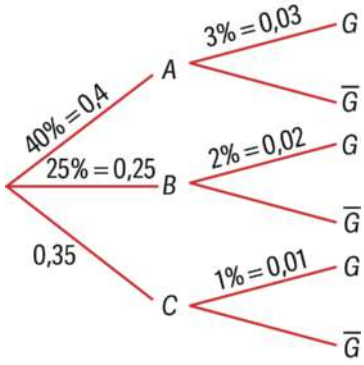
$\Leftrightarrow 2P(A\cap B)\geq 0,2$

$P(B\mid A)=2P(A\cap B)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B\mid A)\geq 0,2\Leftrightarrow P(B\mid A)\geq\frac{1}{5}$

Pág. 61

5.1. Consideremos os acontecimentos:
A: "A página foi verificada pelo autor A."
B: "A página foi verificada pelo autor B."
C: "A página foi verificada pelo autor C."
G: "A página selecionada tem gralhas."
$P(C)=1-0,4-0,25=0,35$



Pretende-se determinar $P(G)$.

$P(G)=P(A\cap G)+P(B\cap G)+P(C\cap G)\Leftrightarrow$

$=0,4\times 0,03+0,25\times 0,02+0,35\times 0,01=$

$=0,012+0,005+0,0035=0,025=2,05\%$

$P(G)=2,05\%$

5.2. Pretende-se determinar $P(B\mid\overline{G})$.

$P(B\mid\overline{G})=\frac{P(B\cap\overline{G})}{P(\overline{G})}=\frac{P(B)-P(B\cap G)}{P(\overline{G})}=$

$=\frac{0,25-0,25\times 0,02}{0,9795}=\frac{0,245}{0,9795}=0,250128\approx 25\%$

Cálculos auxiliares:

$P(B\mid\overline{G})=1-0,0205=0,9795$

$P(B\mid\overline{G})=25\%$

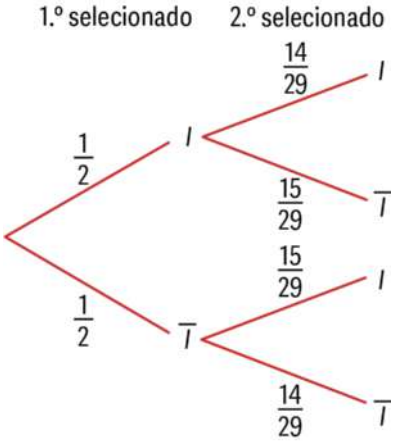
6. 10 portugueses;
5 franceses;
15 ingleses;
30 pessoas.

6.1. Número de casos possíveis: ${}^{30}C_2$

Número de casos favoráveis: ${}^{15}C_1 \times {}^{15}C_1 + {}^{15}C_2$

$$P = \frac{{}^{15}C_1 \times {}^{15}C_1 + {}^{15}C_2}{{}^{30}C_2} = \frac{15 \times 15 + 105}{435} = \frac{330}{435} = \frac{22}{29}$$

6.2. Consideremos os acontecimentos:
I: "O elemento selecionado é inglês."
$\overline{I}$: "O elemento selecionado é português ou francês."



Cálculos auxiliares:

$$P(I) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2};\ P(\overline{I}) = \frac{1}{2}$$

$$P(I \cap \overline{I}) + P(\overline{I} \cap I) + P(\overline{I} \cap \overline{I}) =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{15}{29} + \frac{1}{2} \times \frac{15}{29} + \frac{1}{2} \times \frac{14}{29} = \frac{15}{58} + \frac{15}{58} + \frac{14}{58} = \frac{44}{58} =$$

$$= \frac{22}{29}$$

7. Consideremos os acontecimentos:
E: "O sócio é estrangeiro."
F: "O sócio fala francês."
Sabe-se que:

$$P(F) = 3P(E);\ P(\overline{F}) = 1 - 3P(E)$$

$$P(F \mid E) = \frac{1}{2};\ P(\overline{E} \mid \overline{F}) = \frac{1}{3}$$

Vamos utilizar uma tabela de contingência.
Consideramos $P(E) = x$.

	F	$\overline{F}$	Total
E	$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}x$	x
$\overline{E}$	$\frac{5}{2}x$	$\frac{1}{3} - x$	$1 - x$
Total	$3x$	$1 - 3x$	1

$$P(F \mid E) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(F \cap E) = \frac{1}{2}x$$

$$P(E \cap \overline{F}) = x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$$

$$P(\overline{E} \cap F) = 3x - \frac{1}{2}x = \frac{5}{2}x$$

$$P(\overline{E} \mid \overline{F}) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{E} \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(\overline{E} \cap \overline{F}) = \frac{1}{3}(1 - 3x) \Leftrightarrow P(\overline{E} \cap \overline{F}) = \frac{1}{3} - x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - P(E \cup F)}{P(\overline{F})} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 1 - P(E \cup F) = \frac{1}{3}P(\overline{F}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(E \cup F) = 1 - \frac{1}{3}P(\overline{F}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(E \cup F) = 1 - \frac{1}{3}(1 - 3P(E)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(E \cup F) = 1 - \frac{1}{3} + P(E) \Leftrightarrow P(E \cup F) = \frac{2}{3} + P(E)$$

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{(\times 2)}{\frac{2}{3}} + \cancel{P(E)} = \cancel{P(E)} + \underset{(\times 6)}{3P(E)} - \underset{(\times 3)}{\frac{1}{2}P(E)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 = 18P(E) - 3P(E) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 = 15P(E) \Leftrightarrow P(E) = \frac{4}{15}$$

$$P(E \cap \overline{F}) + P(\overline{E} \cap \overline{F}) = P(\overline{F})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} - x = 1 - 3x \Leftrightarrow 3x + 2 - 6x = 6 - 18x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x - 6x + 18x = 6 - 2 \Leftrightarrow 15x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{15}$$

$$P(E) = \frac{4}{15}$$

8. Sabe-se que:

- $P(A) = P(\overline{A}) = 0{,}5$
- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$P(S) = 2P(A \cup B) - P(B) \Leftrightarrow 1 = 2P(A \cup B) - P(B)$$

$$2P(A \cup B) - P(B) =$$

$$= 2\big(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\big) - P(B) =$$

$$= 2P(A) + 2P(B) - 2P(A \cap B) - P(B) =$$

$$= 2P(A) + P(B) - 2P(A) \times P(B) =$$

$$= 2P(A)\big(1 + \cancel{P(B)} - \cancel{P(B)}\big) = 2P(A) = 2 \times 0{,}5 = 1$$

9.1. $P(\overline{A}) = 2P(B)$

$$P(A) = 1 - 2P(B)$$

$$P(\overline{A} \mid B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

MMA12DR © Porto Editora

$$\Leftrightarrow P(\bar{A}\cap B)=\frac{1}{2}P(B)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}P(B)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(B)-\frac{1}{2}P(B)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{2}P(B)\quad (1)$$

$$P(\bar{B}\mid A)=\frac{5}{6}\Leftrightarrow\frac{P(\bar{B}\cap A)}{P(A)}=\frac{5}{6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(\bar{B}\cap A)=\frac{5}{6}P(A)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A)-P(A\cap B)=\frac{5}{6}P(A)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)-\frac{5}{6}P(A)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{6}P(A)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{6}(1-2P(B))\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}P(B)\quad (2)$$

De (1) e (2) vem que:

$$\frac{1}{2}P(B)=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}P(B)\Leftrightarrow 3P(B)=1-2P(B)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5P(B)=1\Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{5}$$

9.2. $P(A\cap B)=\frac{1}{2}\times P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$

$$P(A)\times P(B)=(1-2P(B))\times P(B)=$$

$$=\left(1-2\times\frac{1}{5}\right)\times\frac{1}{5}=\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\frac{1}{5}=\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{25}$$

A e B não são independentes porque $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$.

Pág. 63

Avaliação formativa 2

1. Sabe-se que:

$P(A)>0$; $P(B)>0$; $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

$$P(\overline{A\cup B})+P(A)+P(B)\times P(\bar{A})=$$

$$=1-P(A\cup B)+P(A)+P(B)[1-P(A)]=$$

$$=1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]+$$

$$+P(A)+P(B)-P(B)\times P(A)=$$

$$=1-\cancel{P(A)}-\cancel{P(B)}+\cancel{P(A\cap B)}+$$

$$+\cancel{P(A)}+\cancel{P(B)}-\cancel{P(A\cap B)}=1$$

2. Sabe-se que:

$P(H)=\frac{3}{5}$; $P(M\mid\bar{H})=\frac{7}{20}$; $P(\bar{M})=70\%=\frac{7}{10}$

$$P(M)=1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}=30\%$$

I – c)

II – a)

$$P(M\mid\bar{H})=\frac{7}{20}\Leftrightarrow\frac{P(M\cap\bar{H})}{P(\bar{H})}=\frac{7}{20}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{P(M)-P(M\cap H)}{P(\bar{H})}=\frac{7}{20}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{10}-P(M\cap H)=\frac{7}{20}\times\frac{2}{5}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{10}-P(M\cap H)=\frac{7}{50}\Leftrightarrow P(M\cap H)=\frac{4}{25}$$

Cálculos auxiliares: $P(\bar{H})=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

III – b)

$$P(\bar{M}\mid\bar{H})=\frac{P(\bar{M}\cap\bar{H})}{P(\bar{H})}=\frac{P(\overline{M\cup H})}{P(\bar{H})}=\frac{1-P(M\cup H)}{P(\bar{H})}=$$

$$=\frac{1-\frac{37}{50}}{\frac{2}{5}}=\frac{\frac{13}{50}}{\frac{2}{5}}=\frac{13}{50}\times\frac{5}{2}=\frac{13}{20}=0{,}65=65\%$$

Cálculos auxiliares:

$$P(M\cup H)=P(M)+P(H)-P(M\cap H)=$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{3}{5}-\frac{4}{25}=\frac{37}{50}$$

IV – c)

Resposta: I – c); II – a); III – b); IV – c)

3. Consideremos os acontecimentos:

V: "O sócio pratica voleibol."

F: "O sócio pratica futebol."

Sabe-se que:

$$P(F)=\frac{2}{3}P(V)\Leftrightarrow P(V)=\frac{3}{2}P(F)$$

$$P(V\cup F)=2P(V\cap F)$$

Pretende-se determinar $P(V\mid F)$.

$$P(V\cup F)=P(V)+P(F)-P(V\cap F)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2P(V\cap F)=\underset{(\times 3)}{P(V)}+\frac{2}{3}P(V)-P(V\cap F)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3P(V\cap F)=\frac{5}{3}P(V)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(V\cap F)=\frac{\frac{5}{3}}{3}\times\frac{3}{2}P(F)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(V\cap F)=\frac{5}{6}P(F)$$

$$P(V\mid F)=\frac{P(V\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{5}{6}\cancel{P(F)}}{\cancel{P(F)}}=\frac{5}{6}$$

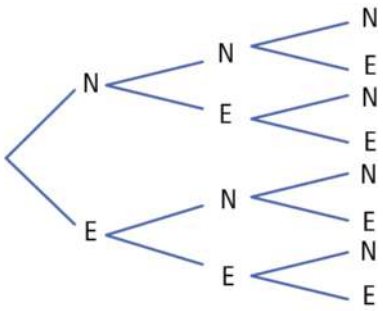
MMA12DR © Porto Editora

3. Modelos de probabilidade em espaços finitos

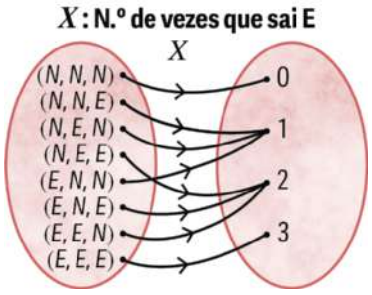
Pág. 64

Tarefa 2

1.1.



1.2.



1.3. $P(X=0)=\frac{1}{8}$; $P(X=1)=\frac{3}{8}$;

$P(X=2)=\frac{3}{8}$; $P(X=3)=\frac{1}{8}$.

Pág. 67

Questão 72

Vão ser extraídas, sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco e X é o número de vezes em que a cor da bola saída é vermelha.

A variável X para tomar os valores 0, 1 e 2, sendo as respetivas probabilidades apresentadas a seguir.

$X=0$, nunca tirar a bola vermelha.

$$P(X=0)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$$

$X=1$, a primeira bola tirada é vermelha e a segunda não é vermelha ou a primeira bola tirada não é vermelha e a segunda é vermelha.

$$P(X=1)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{30}+\frac{9}{30}=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$$

$X=2$, as duas bolas tiradas são vermelhas.

$$P(X=2)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

Questão 73

Selecionam-se dois alunos da turma e X é o número de alunos que responderam corretamente às quatro questões.

A variável X pode tomar os valores 0, 1 e 2 e as respetivas probabilidades são apresentadas a seguir.

$X=0$, nenhum dos alunos selecionados responde corretamente às quatro questões.

$$P(X=0)=\frac{23}{30}\times\frac{22}{29}\approx 0{,}58$$

$1+4+8+10=23$

$X=1$, um dos alunos selecionados respondeu corretamente às quatro questões, ou seja, ou o primeiro aluno selecionado respondeu corretamente às quatro questões e o segundo selecionado não ou o primeiro selecionado não respondeu corretamente às quatro questões e o segundo selecionado sim.

$$P(X=1)=\frac{7}{30}\times\frac{23}{29}+\frac{23}{30}\times\frac{7}{29}=\frac{161}{870}+\frac{161}{870}\approx 0{,}37$$

$X=2$, os dois alunos selecionados responderam corretamente às quatro questões.

$$P(X=2)=\frac{7}{30}\times\frac{6}{29}\approx 0{,}05$$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	0,58	0,37	0,05

Pág. 68

Questão 74

$$P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{25}=b+2a+\frac{3}{5}\Leftrightarrow b+2a=\frac{17}{25}-\frac{3}{5}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b+2a=\frac{14}{25}\quad (1)$$

$$a+a+b+2a+\frac{3}{25}=1\Leftrightarrow 4a+b=1-\frac{3}{25}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4a+b=\frac{22}{25}\quad (2)$$

De (1) e (2) vem:

$$\begin{cases} b+2a=\frac{14}{25} \\ 4a+b=\frac{22}{25} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=\frac{14}{25}-2a \\ 4a+\frac{14}{25}-2a=\frac{22}{25} \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} b=\frac{14}{25}-2a \\ 2a=\frac{22}{25}-\frac{14}{25} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=\frac{14}{25}-2a \\ 2a=\frac{8}{25} \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} b=\frac{14}{25}-\frac{8}{25} \\ a=\frac{8}{25}\times\frac{1}{2} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=\frac{6}{25} \\ a=\frac{8}{50} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=\frac{6}{25} \\ a=\frac{4}{25} \end{cases}$$

MMA12DR © Porto Editora

$a=\frac{4}{25}$ e $b=\frac{6}{25}$

Outro modo:

$P(X<2)=1-P(X\geq 2)=1-\frac{17}{25}=\frac{8}{25}$

$2a=\frac{8}{25}\Leftrightarrow 50a=8\Leftrightarrow a=\frac{8}{50}\Leftrightarrow a=\frac{4}{25}$

$a+a+b+2a+\frac{3}{25}=1\Leftrightarrow 4a+b=1-\frac{3}{25}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\times\frac{4}{25}+b=\frac{22}{25}\Leftrightarrow b=\frac{22}{25}-\frac{16}{25}\Leftrightarrow b=\frac{6}{25}$

$a=\frac{4}{25}$ e $b=\frac{6}{25}$

Questão 75

	Douro	Alentejo	
Branco	10	12	
Tinto	8	7	
Total	18	19	37

Já foram selecionadas 7 marcas:
4 do Douro; 3 do Alentejo
Falta selecionar uma marca.
Marcas ainda disponíveis:
Douro: $18-4=14$
Alentejo: $19-3=16$
Total: 30 marcas disponíveis
X é o número de marcas do Douro selecionadas. A variável X pode tomar os valores 4 e 5.
$X=4$ se a última marca selecionada for do Alentejo.

$P(X=4)=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$

$X=5$, se a última marca selecionada for do Douro.

$P(X=5)=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$

x_i	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{7}{15}$

Pág. 69

Questão 76

0, 0, 0, 1, −1

Vamos extrair 4 bolas da taça.
As somas dos números extraídas são:

$0+0+0+1=1$

$0+0+0+(-1)=-1$

$0+0+1+(-1)=0$

$0+0+1+(-1)=0$

$0+0+1+(-1)=0$

A variável X pode tomar os valores -1, 0 e 1.

$P(X=-1)=\frac{1}{5}$

$P(X=0)=\frac{3}{5}$

$P(X=1)=\frac{1}{5}$

A tabela de distribuição de probabilidade é:

x_i	−1	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

Questão 77

×	0	1	1	3
0	0	0	0	0
1	0	1	1	3
1	0	1	1	3
3	0	3	3	9

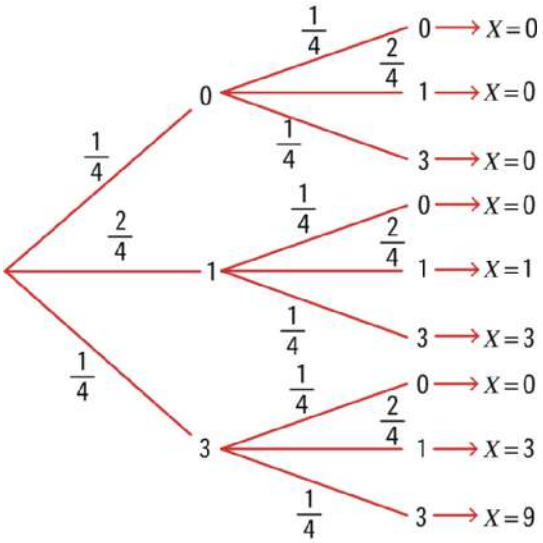
A variável X pode tomar os valores 0, 1, 3 e 9.

$P(X=0)=\frac{7}{16}$

$k=0$

Opção (D)

Ou



$P(X=0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=$

$=\frac{1}{16}+\frac{2}{16}+\frac{1}{16}+\frac{2}{16}+\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$

$k=0$

Opção (D)

MMA12DR © Porto Editora

Pág. 70

Questão 78

12.º A – 26 alunos (4 alunos para a comissão)
12.º B – 20 alunos (5 alunos para a comissão)
A variável aleatória X é o número de alunos do 12.º A que fazem parte da comissão.
A variável X pode tomar os valores 4 ou 5.
Falta selecionar 1 aluno.
12.º A: $26-4=22$ alunos disponíveis
12.º B: $20-5=15$ alunos disponíveis
Total de alunos disponíveis: $22+15=37$

$X=4$ se o aluno selecionado for do 12.ºB

$$P(X=4)=\frac{15}{37}$$

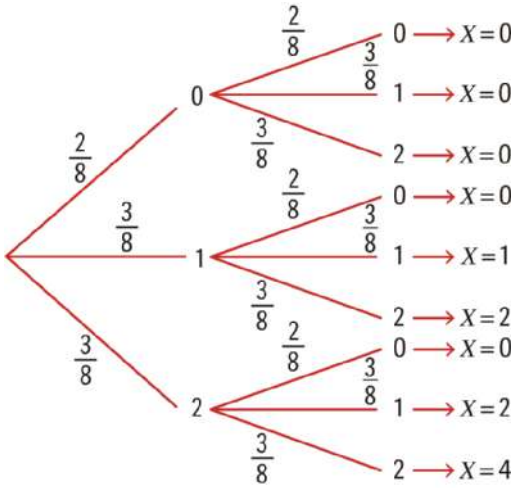
$X=5$ se o aluno selecionado for do 12.ºA

$$P(X=5)=\frac{22}{37}$$

A tabela de probabilidades da variável X é a seguinte:

x_i	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{15}{37}$	$\frac{22}{37}$

Questão 79



$$P(X=0)=\frac{2}{8}\times\frac{2}{8}+\frac{2}{8}\times\frac{3}{8}+\frac{2}{8}\times\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{2}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{2}{8}=$$

$$=\frac{4}{64}+\frac{6}{64}+\frac{6}{64}+\frac{6}{64}+\frac{6}{64}=\frac{28}{64}=\frac{7}{16}$$

$$P(X=1)=\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{9}{64}$$

$$P(X=2)=\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{9}{64}+\frac{9}{64}=\frac{18}{64}=\frac{9}{32}$$

$k=2$

Pág. 71

Questão 80

5 bolas vermelhas
2 bolas amarelas
1 bola azul
Total: 8 bolas

Como X é o número de bolas retiradas do saco, até ser retirada uma bola vermelha, a variável X pode tomar os valores 1, 2, 3 e 4.
Logo,

$X=1$ ocorre quando a primeira bola retirada é vermelha.

$$P(X=1)=\frac{5}{8}$$

$X=2$ ocorre quando a primeira bola retirada não é vermelha e a segunda bola retirada é vermelha.

$$P(X=2)=\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{15}{56}$$

$X=3$ ocorre quando a primeira e a segunda bolas retiradas não são vermelhas, mas a terceira bola retirada é vermelha.

$$P(X=3)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}=\frac{30}{336}=\frac{5}{56}$$

$X=4$ ocorre quando as três primeiras bolas retiradas não são vermelhas, mas a quarta bola retirada é necessariamente vermelha.

$$P(X=4)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{5}=\frac{1}{56}$$

A tabela de distribuição de probabilidades da variável X é a seguinte:

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

Questão 81

1	2	3	4	5

Como X é o número de bolas retiradas da taça até sair um número ímpar, a variável X pode tomar os valores 1, 2 e 3.

$X=1$ ocorre quando a primeira bola retirada da taça tem um número ímpar.

$$P(X=1)=\frac{3}{5}$$

$X=2$ ocorre quando a primeira bola retirada da taça tem um número par e a segunda bola retirada tem um número ímpar.

$$P(X=2)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

$X=3$ ocorre quando a primeira e a segunda bolas retiradas da taça têm um número par, mas a terceira bola retirada da taça tem necessariamente um número ímpar.

$$P(X=3)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{3}=\frac{1}{10}$$

A tabela que representa a função massa de probabilidade é:

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

Opção (B)

MMA12DR © Porto Editora

Pág. 72

Tarefa 3

1.1.





a) $\overline{x} = 7{,}08$

b) $\sigma^2 \approx 5{,}91$

c) $\sigma \approx 2{,}43$

1.2.





a) $\mu = 7$

b) $\sigma^2 \approx 5{,}83$

c) $\sigma \approx 2{,}42$

1.3. Os valores não são iguais.

Pág. 74

Questão 82

82.1. a) A Maria não lavar a louça corresponde a ser a Isabel ou o Danilo a lavarem a louça ao almoço e ao jantar. Assim, $P = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

b) A Isabel lavar a louça pelo menos uma vez corresponde a lavar a louça ao almoço ou lavar a louça ao jantar ou lavar a louça nas duas refeições. Assim,

$$P = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

c) O Danilo lavar a louça duas vezes corresponde ao Danilo lavar a louça ao almoço e ao jantar.

Assim, $P = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

82.2. Como X é o número de vezes que o Danilo lava a louça por dia, a variável X pode tomar os valores 0, 1 e 2.

a) $X = 0$ ocorre quando o Danilo não lava a louça nem ao almoço nem ao jantar.

$$P(X = 0) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$X = 1$ ocorre quando o Danilo lava a louça ao almoço ou lava a louça ao jantar.

$$P(X = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

$X = 2$ ocorre quando o Danilo lava a louça ao almoço e ao jantar.

$$P(X = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

A tabela de distribuição de probabilidade da variável X é:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

b)

b1)

$$\mu_x = \frac{4}{9} \times 0 + \frac{4}{9} \times 1 + \frac{1}{9} \times 2 = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$$

b2)

$$\sigma_x^2 = \frac{4}{9}(0 - 0{,}667)^2 + \frac{4}{9}(1 - 0{,}667)^2 + \frac{1}{9}(2 - 0{,}667)^2 \approx$$

$$\approx 0{,}444$$

b3) $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{0{,}444} \approx 0{,}667$





Pág. 75

Questão 83

83.1. A variável aleatória Y pode tomar os valores -2 (perde 2 €), 0 (não ganhar nem perder) e 1 (ganhar 1 €).

Determinemos as respetivas probabilidades:

MMA12DR © Porto Editora

$P(Y=-2)=P(\text{sair a bola amarela})=\frac{4}{9}$

$P(Y=0)=P(\text{sair a bola azul})=\frac{4}{9}$

$P(Y=1)=P(\text{sair a bola vermelha})=\frac{2}{9}$

A tabela da função massa de probabilidade da variável *Y* é:

y_i	-2	0	1
$P(Y=y_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$

83.2. Determinemos o valor médio, μ_y.

$\mu_y=\frac{4}{9}\times(-2)+\frac{3}{9}\times 0+\frac{2}{9}\times 1=-\frac{8}{9}+\frac{2}{9}=-\frac{6}{9}=$

$=-\frac{2}{3}=-0{,}667$

Como $\mu_y=-0{,}667<0$, o jogo não é equitativo e é desfavorável ao jogador.

83.3. $\sigma_Y^2=\frac{4}{9}\left(-2-(-0{,}667)\right)^2+\frac{3}{9}\left(0-(-0{,}667)\right)^2+$

$+\frac{2}{9}\left(1-(-0{,}667)\right)^2=$

$=\frac{4}{9}(-2+0{,}667)^2+\frac{3}{9}(0{,}667)^2+\frac{2}{9}(1+0{,}667)^2\approx 1{,}5$

$\sigma_Y=\sqrt{\sigma_Y^2}=\sqrt{1{,}5}\approx 1{,}2$

O desvio-padrão, σ_Y, indica ao jogador o risco que corre quando faz uma jogada, pois numa jogada tanto pode perder 2 €, como ganhar 1 €, como não ganhar nada.
Quanto maior for o desvio-padrão, maior será o risco que o jogador corre quando joga.





Pág. 76

Questão 84

84.1. Como *X* representa o número de vezes que sai face nacional (**N**) no lançamento de quatro moedas de 1 €, a variável *X* pode tomar os valores 0, 1, 2, 3 e 4.
A probabilidade de, num lançamento de uma moeda de 1 €, sair face nacional (N) é igual à probabilidade de sair face europeia (€).

$P(N)=P(E)=\frac{1}{2}$

$X=0$ ocorre quando saem quatro faces europeias.

$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$

$X=1$ ocorre quando sai uma face nacional e quatro europeias no lançamento de quatro moedas de 1 €.
NEEE; ENEE; EENE; EEEN

$P(X=1)=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{16}$

$X=2$ ocorre quando saem duas faces nacionais e duas faces europeias no lançamento de quatro moedas de 1 €.
NNEE; NENE; NEEN; ENNE; ENEN; ENNE
Ou

${}^4C_2=6$ representa o número de maneiras de saírem duas faces nacionais em quatro lançamentos das moedas.

$P(X=2)=6\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{6}{16}$

$X=3$ ocorre quando saem três faces nacionais e uma face europeia no lançamento de quatro moedas de 1 €.
NNNE; NNEN; NENN; ENNN
ou

${}^4C_3=4$

$P(X=3)={}^4C_3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=4\times\frac{1}{16}=\frac{4}{16}$

$X=4$ ocorre quando saem quatro faces nacionais no lançamento de quatro moedas de 1 €.
NNNN

$P(X=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$

A distribuição de probabilidade da variável aleatória *X* é:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

84.2. $\mu_x=\frac{1}{16}\times 0+\frac{4}{16}\times 1+\frac{6}{16}\times 2+\frac{4}{16}\times 3+\frac{1}{16}\times 4=$

$=\frac{4}{16}+\frac{12}{16}+\frac{12}{16}+\frac{4}{16}=\frac{32}{16}=2$

O valor médio da distribuição é 2.

84.3. $\sigma_x^2=\frac{1}{16}(0-2)^2+\frac{4}{16}(1-2)^2+\frac{6}{16}(2-2)^2+$

$+\frac{4}{16}(3-2)^2+\frac{1}{16}(4-2)^2=$

MMA12DR © Porto Editora

$$= \frac{1}{16} \times 4 + \frac{4}{16} \times 1 + \frac{6}{16} \times 0 + \frac{4}{16} \times 1 + \frac{1}{16} \times 4 =$$

$$= \frac{4}{16} + \frac{4}{16} + \frac{4}{16} + \frac{4}{16} = \frac{16}{16} = 1$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{1} = 1$$

O desvio-padrão é 1.

Questão 85

$$\mu_x = 2{,}6 \Leftrightarrow 0{,}3 \times 1 + 2a + 0{,}1 \times 3 + 4b = 2{,}6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}3 + 2a + 0{,}3 + 4b = 2{,}6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a + 4b = 2{,}6 - 0{,}3 - 0{,}3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a + 4b = 2 \Leftrightarrow a + 2b = 1 \quad (1)$$

$$P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}3 + a + 0{,}1 + b = 1 \Leftrightarrow a + b = 1 - 0{,}3 - 0{,}1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a + b = 0{,}6 \quad (2)$$

De (1) e de (2) vem:

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ a + b = 0{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - 2b \\ 1 - 2b + b = 0{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - 2b \\ -b = -1 + 0{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - 2b \\ -b = -0{,}4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - 2 \times 0{,}4b \\ b = 0{,}4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - 0{,}8 \\ b = 0{,}4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0{,}2 \\ b = 0{,}4 \end{cases}$$

$a = 0{,}2$ e $b = 0{,}4$

Pág. 77

Questão 86

$$P(X = 0) = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} \; ; \; P(X = 1) = \frac{2}{5} = \frac{4}{10}$$

O saco contém 4 bolas azuis e 6 bolas não azuis.
Como Y é o número de bolas azuis retiradas, quando se retiram duas bolas do saco, a variável Y pode tomar os valores 0, 1 e 2.
Número de resultados possíveis:

$$^{10}C_2 = \frac{10!}{2! \times 8!} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

$X = 0$ ocorre quando se retiram duas bolas não azuis do saco.

$$P(X = 0) = \frac{^6C_2}{45} = \frac{\frac{6!}{2! \times 4!}}{45} = \frac{\frac{6 \times 5}{2}}{45} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

$X = 1$ ocorre quando é retirada uma bola azul e uma bola não azul do saco.

$$P(X = 1) = \frac{^6C_2 \times {}^4C_1}{45} = \frac{\frac{6!}{1! \times 5!} \times \frac{4!}{1! \times 3!}}{45} =$$

$$= \frac{6 \times 4}{45} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

$X = 2$ ocorre quando são retiradas duas bolas azuis do saco.

$$P(X = 2) = \frac{^4C_2}{45} = \frac{\frac{4!}{2! \times 2!}}{45} = \frac{\frac{4 \times 3}{2}}{45} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

A distribuição de probabilidade da variável aleatória X é a seguinte:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

Questão 87

Como $X = 2$ e $X = 3$ são mutuamente exclusivas, isto é, um não pode acontecer ao mesmo tempo que o outro,

$$P(X = 2 \vee X = 3) = 0{,}6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 5a + a = 0{,}6 \Leftrightarrow -4a = -0{,}4 \Leftrightarrow a = \frac{0{,}4}{4} \Leftrightarrow a = 0{,}1$$

A tabela de distribuição de probabilidade da variável aleatória X é a seguinte:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,1	0,3	0,5	0,1

$3a = 3 \times 0{,}1 = 0{,}3$

$1 - 5a = 1 - 5 \times 0{,}1 = 0{,}5$

$$\mu_x = 0{,}1 \times 1 + 0{,}3 \times 1 + 0{,}5 \times 2 + 0{,}1 \times 3 =$$

$$= 0{,}3 + 1 + 0{,}3 = 1{,}6$$

O valor médio de X é 1,6.

Pág. 78

Tarefas de consolidação 3

1. 5 setores com o número 1
7 setores com o número 0
Como X é o número de vezes em que a roleta para um setor com o número 0 quando se roda a roleta duas vezes, a variável X pode tomar os valores 0, 1 e 2.

$X = 0$ ocorre quando a roleta para as duas vezes em que é rodada, no setor com o número 1.

$$P(X = 0) = \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{25}{144}$$

$X = 1$ ocorre quando a roleta para uma vez no setor com o número 1 e outra vez no setor com o número 2.

$$P(X = 1) = \frac{5}{12} \times \frac{7}{12} + \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} =$$

$$= \frac{35}{144} + \frac{35}{144} = \frac{70}{144} = \frac{35}{72}$$

$X = 2$ ocorre quando a roleta, nas duas vezes em que é rodada, para no setor com o número 0.

$$P(X = 2) = \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{49}{144}$$

A tabela de distribuição de probabilidade da variável aleatória X é a seguinte:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{25}{144}$	$\frac{35}{72}$	$\frac{49}{144}$

MMA12DR © Porto Editora

2.

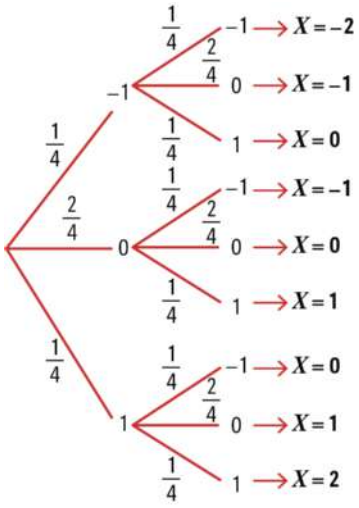
+	–1	0	0	1
–1	–1	–1	–1	0
0	–1	0	0	1
0	–1	0	0	1
1	0	1	1	2

A variável X pode tomar os valores –2, –1, 0, 1 e 2.

$P(X=0)=\frac{6}{16}$; $k=0$

Opção (D)

Ou



$P(X=0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{6}{16}$

$k=0$

Opção (D)

3.1. $P(0)=P(3)\Leftrightarrow 0{,}15=b$

$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+$

$+P(X=3)+P(X=4)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}15+0{,}05+a+0{,}15+0{,}1=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=1-0{,}15-0{,}05-0{,}15-0{,}1\Leftrightarrow a=0{,}55$

Opção (C)

3.2. $\mu_x=0{,}15\times 0+0{,}05\times 1+0{,}55\times 2+$

$+0{,}15\times 3+0{,}1\times 4=$

$=0{,}05+1{,}1+0{,}45+0{,}4=2$

A Joana almoça na cantina da empresa onde trabalha, em média, duas vezes por semana.

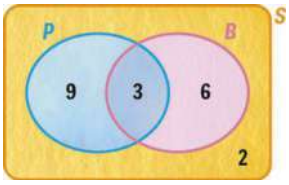
Opção (B)

Pág. 79

4. Secção de pintura: 12 operários

Bate-chapas: 9

Receção e serviços administrativos: 2



$12+9=21$; $21-18=3$; $12-3=9$; $9-3=6$

4.1. **a)** $P=\frac{3}{20}$

b) $P=\frac{9+6}{20}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$

c) $P(P\mid\overline{B})=\frac{9}{11}$

4.2. **a)** $P(X\geq 2)=0{,}15\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(X=2)+P(X=3)=0{,}15\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}10+b=0{,}15\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b=0{,}15-0{,}10\Leftrightarrow b=0{,}05$

$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a+0{,}25+0{,}10+0{,}05=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=1-0{,}25-0{,}10-0{,}05\Leftrightarrow a=0{,}6$

$a=0{,}6$ e $b=0{,}05$

b) $\mu_x=0{,}6\times 0+0{,}25\times 1+0{,}10\times 2+0{,}05\times 3=$

$=0{,}25+0{,}2+0{,}15=0{,}6$

O valor médio da variável X é 0,6.

c) Número de trabalhadores que faltaram dois dias: $0{,}10\times 20=2$

Número de trabalhadores que faltaram três dias: $0{,}05\times 20=1$.

Logo, apenas três dos 20 trabalhadores faltaram pelo menos dois dias, no último ano.

Assim, se o grupo a formar tiver pelo menos quatro trabalhadores, fica garantido que, pelo menos um deles, faltou no máximo um dia no último ano.

5.1. Como Y é o número de pontos saídos, a variável Y pode tomar os valores 0, 2, 4, 6, 8, 10 e 12.

$P(Y=0)=P(Y=2)=P(Y=4)=P(Y=6)=$

$=P(Y=8)=P(Y=10)=P(Y=12)=\frac{1}{7}$

A tabela de distribuição de probabilidade da variável aleatória Y é a seguinte:

y_i	0	2	4	6	8	10	12
$P(Y=y_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

MMA12DR © Porto Editora

5.2. $\mu_Y = \frac{1}{7}\times 0 + \frac{1}{7}\times 2 + \frac{1}{7}\times 4 + \frac{1}{7}\times 6 + \frac{1}{7}\times 8 + \frac{1}{7}\times 10 + \frac{1}{7}\times 12 =$

$= \frac{2}{7} + \frac{4}{7} + \frac{6}{7} + \frac{8}{7} + \frac{10}{7} + \frac{12}{7} = \frac{47}{7} = 6$

$\sigma_Y^2 = \frac{1}{7}(0-6)^2 + \frac{1}{7}(2-6)^2 + \frac{1}{7}(4-6)^2 + \frac{1}{7}(6-6)^2 + \frac{1}{7}(8-6)^2 + \frac{1}{7}(10-6)^2 + \frac{1}{7}(12-6)^2 =$

$= \frac{36}{7} + \frac{16}{7} + \frac{4}{7} + 0 + \frac{4}{7} + \frac{16}{7} + \frac{36}{7} = \frac{112}{7} = 16$

$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{16} = 4$

O valor médio da distribuição é 6 e o desvio-padrão é 4.

Pág. 81

Avaliação formativa 3

1. $P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + a + \frac{1}{10} + 3a = 1 \Leftrightarrow a + 3a = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4a = \frac{2}{5} \Leftrightarrow a = \frac{2}{5}\times\frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \frac{2}{20} \Leftrightarrow a = \frac{1}{10}$

Opção (A)

2. 80 livros de ficção.
12 livros de banda desenhada.
Como X é o número de livros de banda desenhada quando são selecionados dois livros, a variável X pode tomar os valores 0, 1 e 2.

Número de resultados possíveis: ${}^{92}C_2 = 4186$

• $X = 0$ ocorre quando não são selecionados os livros de banda desenhada.

$P(X=0) = \frac{{}^{80}C_2}{4186} = \frac{3160}{4186} = \frac{1580}{2093} \approx 0{,}755$

• $X = 1$ ocorre quando são selecionados um livro de ficção científica e um de banda desenhada.

$P(X=1) = \frac{{}^{80}C_1 \times {}^{12}C_1}{4186} = \frac{80\times 12}{4186} = \frac{960}{4186} \approx 0{,}229$

• $X = 2$ ocorre quando são selecionados dois livros de banda desenhada.

$P(X=2) = \frac{{}^{12}C_2}{4186} = \frac{66}{4186} \approx 0{,}016$

A função massa de probabilidade é a seguinte:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	0,755	0,229	0,016

3. $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a + 0{,}15 + 0{,}45 + 0{,}35 = 1 \Leftrightarrow a = 1 - 0{,}15 - 0{,}45 - 0{,}35 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 0{,}05$

I–c)

$\mu_X = 0{,}05\times 0 + 0{,}15\times 1 + 0{,}45\times 2 + 0{,}35\times 3 =$

$= 0{,}15 + 0{,}9 + 1{,}05 = 2{,}1$

II–c)

$\sigma_X^2 = 0{,}05(0-2{,}1)^2 + 0{,}15(1-2{,}1)^2 + 0{,}45(2-2{,}1)^2 + 0{,}35(3-2{,}1)^2 =$

$= 0{,}2205 + 0{,}1815 + 0{,}005 + 0{,}2835 = 0{,}6895$

$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{0{,}69} \approx 0{,}8$

III–a)

Resposta: I – c); II – c); III – a)

4. Modelo Normal

Pág. 82

Tarefa 4

1. $\mu = 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{6} =$

$= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$

2. O desvio-padrão é menor que o gráfico 4.

3. O valor médio é o mesmo nas quatro distribuições e o desvio-padrão diminui à medida que aumenta o número de dados.

Pág. 84

Questão 88

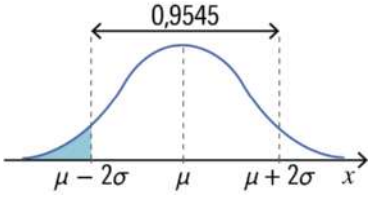
Como a reta r é eixo de simetria dos dois gráficos, tem-se que $\mu_1 = \mu_2$.

Como a curva correspondente a $N(\mu_2, \sigma_2)$ é mais achatada do que a de $N(\mu_1, \sigma_1)$, tem-se que $\sigma_1 < \sigma_2$.

A opção correta é a (C).

Pág. 86

Questão 89



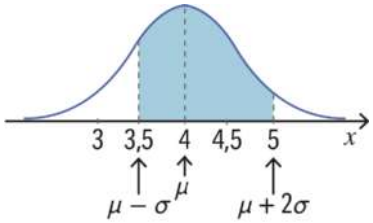
$P(X < \mu - 2\sigma) \approx \frac{1 - 0{,}9545}{2} \approx 0{,}022\,75$

A percentagem pedida é 2,28%.

MMA12DR © Porto Editora

Questão 90

$N\left(4, \frac{1}{2}\right)$



$P(3,5 < X < 5) =$

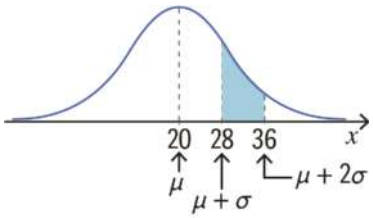
$= P(\mu - \sigma < X < \mu) + P(\mu < X < \mu + 2\sigma) =$

$= \frac{0,6827}{2} + \frac{0,9545}{2} \approx 0,341\,35 + 0,477\,25 \approx 0,8186$

$P(3,5 < X < 5) \approx 0,819$

Questão 91

$N(20, 8)$



$P(28 < X < 36) =$

$= P(\mu < X < \mu + 2\sigma) - P(\mu < X < \mu + \sigma) =$

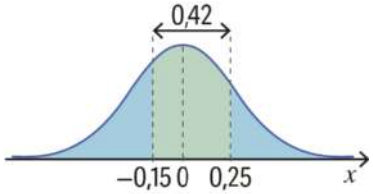
$= \frac{0,9545}{2} + \frac{0,6827}{2} \approx 0,477\,25 + 0,341\,35 \approx 0,1359$

$P(28 < X < 36) \approx 13,59\%$

Pág. 87

Questão 92

$N(0, \sigma)$



$P(X < -0,15 \vee X > 0,25) =$

$= 1 - P(-0,15 < X < 0,25) = 1 - 0,42 = 0,58$

Questão 93

$P(40 < X < 50) \approx 0,6827$

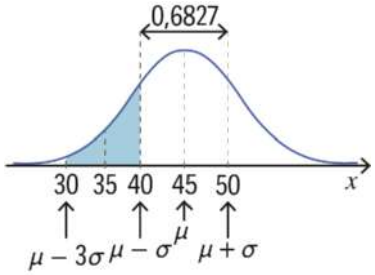
Tendo em conta o valor 0,6827, conclui-se que:

$40 = \mu - \sigma \wedge 50 = \mu + \sigma \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mu = 40 + \sigma \wedge 50 = 40 + \sigma + \sigma \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mu = 40 + \sigma \wedge 10 = 2\sigma \Leftrightarrow \mu = 40 + \sigma \wedge \sigma = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mu = 40 + 5 \wedge \sigma = 5 \Leftrightarrow \mu = 45 \wedge \sigma = 5$



$P(30 < X < 40) = P(\mu - 3\sigma < X < \mu - \sigma) =$

$= P(\mu - 3\sigma < X < \mu) - P(\mu - \sigma < X < \mu) =$

$\approx \frac{0,9973}{2} - \frac{0,6827}{2} \approx 0,498\,65 - 0,34135 \approx 0,1573$

$2600 \times 0,1573 = 408,98 \approx 409$

É de esperar que 409 demorem entre 30 e 40 minutos.

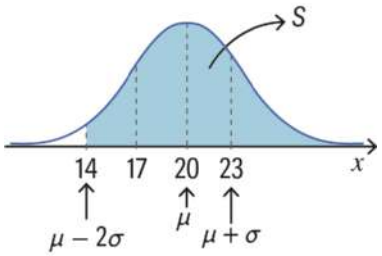
Questão 94

Se $P(X > 0,3) > P(X > 0,9)$, então o valor de μ tem que pertencer a $]0,3; 0,9[$ e tem que ser mais próximo de 0,3 do que de 0,9.
Logo, a opção correta é a opção (B).

Pág. 88

Questão 95

$N(20, 3)$

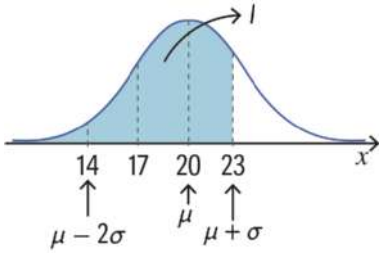


$P(I \cap S) = P(14 < X < 23) =$

$= P(\mu - 2\sigma < X < \mu + \sigma) =$

$= P(\mu - 2\sigma < X < \mu) + P(\mu < X < \mu + \sigma) \approx$

$\approx \frac{0,9545}{2} + \frac{0,6827}{2} \approx 0,477\,25 + 0,34135 \approx 0,8186$



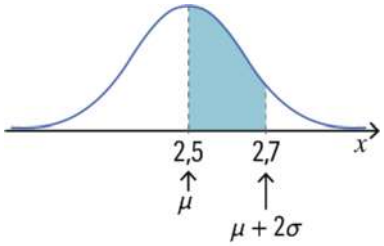
$P(I) = P(X < 23) = P(X < \mu) + P(\mu < X < \mu + \sigma) \approx$

$\approx \frac{1}{2} + \frac{0,6827}{2} \approx 0,5 + 0,34135 \approx 0,84135$

$P(S \mid I) = \frac{P(S \cap I)}{P(I)} = \frac{0,8186}{0,841\,35} \approx 0,973$

MMA12DR © Porto Editora

Questão 96



Se $\sigma = 0,1$,

$P(2,5 < X < 2,7) \approx \frac{0,9545}{2} \approx 0,477\,25$

Se $\sigma > 0,1$,

$P(2,5 < X < 2,5 + 2\sigma) > P(2,5 < X < 2,7)$ porque

$2,5 + 2\sigma > 2,7$.

$0,477\,25 > 4,8$ (Falso)

Se $\sigma < 0,1$,

$P(2,5 < X < 2,5 + 2\sigma) < P(2,5 < X < 2,7)$ porque

$2,5 + 2\sigma < 2,7$.

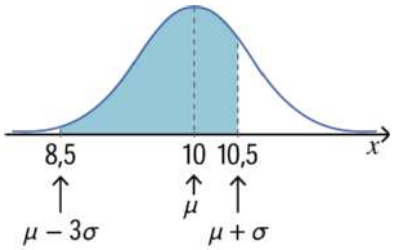
$0,477\,25 < 4,8$ (Verdadeiro)

Opção (B)

Pág. 89

Questão 97

$N(10; 0,5)$



$P(8,5 < X < 10,5) = P(\mu - 3\sigma < X < \mu + \sigma) =$

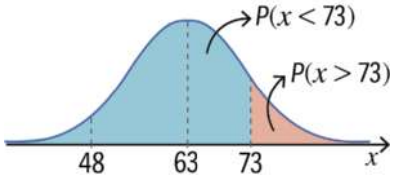
$= P(\mu - 3\sigma < X < \mu) + P(\mu < X < \mu + \sigma) =$

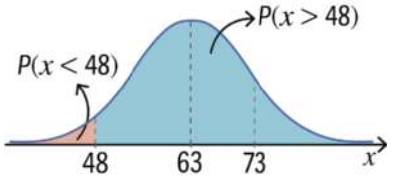
$\approx \frac{0,9973}{2} + \frac{0,6827}{2} \approx 0,498\,65 + 0,341\,35 \approx 0,84$

$P(8,5 < X < 10,5) \approx 84\%$

Questão 98

$P(X > 73) < P(X < 73)$





$P(X > 48) > P(X < 48)$

Como $63 - 48 = 15$ e $73 - 63 = 10$, então, 73 está mais próximo do valor médio do que 48.

Logo, $P(X > 48) > P(X < 73)$.

A opção correta é a opção (C).

Pág. 90

Tarefa 5

1. Opção (A)



Opção (B)



Opção (C)



Opção (D)



A opção correta é a (D).

Pág. 91

Questão 99

$X \sim N(2,5; 0,5)$

99.1. Pretende-se determinar $P(X > 4)$.

Recorrendo à calculadora gráfica:



$P(X > 4) \approx 0,0013$

A probabilidade de uma calculadora ter mais de 4 avarias é de, aproximadamente, 0,13%.

MMA12DR © Porto Editora

99.2. Pretende-se determinar $P(3 < X < 5)$.

Recorrendo à calculadora gráfica:



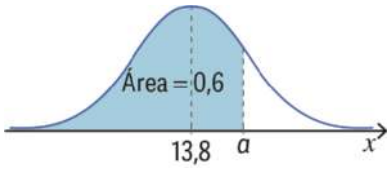
$P(3 < X < 5) \approx 0,1587$

A probabilidade de a calculadora ter entre 3 e 5 avarias é de cerca de 15,87%.

Pág. 92

Questão 100

$X \sim N(13,8;\ 1,5)$



Pretende-se determinar o valor de *a*, tal que:

$P(X < a) = 0,6$

Recorrendo à calculadora gráfica,



$P(X < 14,18) \approx 0,6$

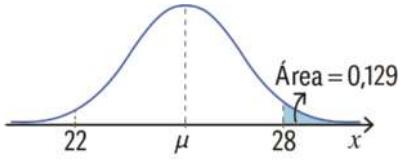
60% dos alunos obtiveram uma classificação inferior a 14,18 valores.

Outro processo:



$P(X < 14,18) \approx 0,6$

Questão 101



$X \sim N(\mu, \sigma)$

$P(X > 28) = 0,129$

$P(X > 22) = 0,871$

$P(X < 22) = 1 - P(X > 22) = 1 - 0,871 = 0,129$

$P(X < 22) = P(X > 28)$

Logo, pela simetria da curva normal,

$\mu = \dfrac{22 + 28}{2} = 25$

Recorrendo à calculadora gráfica:



Então, com arredondamento às unidades, $\sigma \approx 3$.

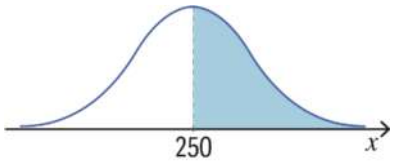
$\mu = 25$ mm e $\sigma \approx 3$ mm.

Pág. 93

Questão 102

$X \sim N(250,\ 20)$

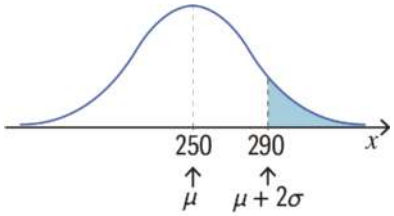
102.1.



$P(X > 250) = P(X > \mu) = 0,5$

A probabilidade de a Ana ter comprado mais de 250 gramas de framboesas é de 50%.

102.2. $290 = 250 + 2 \times 20 = \mu + 2\sigma$



$P(X > 290) = P(X > \mu + 2\sigma) =$

$= P(X > \mu) - P(\mu < X < \mu + 2\sigma) \approx$

$\approx 0,5 - \dfrac{0,9545}{2} \approx 0,5 - 0,477\,25 \approx 0,022\,75$

$400 \times 0,022\,75 \approx 9$

Espera-se que 9 embalagens tenham mais de 290 gramas.

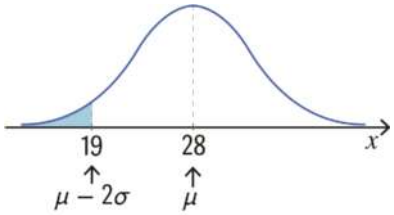
Pág. 94

Questão 103

$X \sim N(28;\ 4,5)$

103.1. Pretende-se de terminar $P(X < 19)$.

$19 = 28 - 2 \times 4,5 = \mu - 2\sigma$



MMA12DR © Porto Editora

$P(X<19)=P(X<\mu-2\sigma)=$

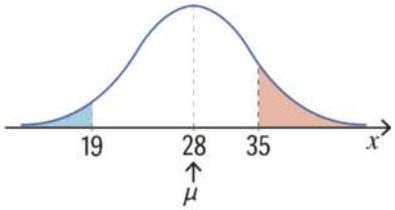
$=P(X<\mu)-P(\mu-2\sigma<X<\mu)=$

$\approx 0,5-\frac{0,9545}{2}\approx 0,5-0,47725\approx 0,02275$

A probabilidade de a dourada ser devolvida ao mar é de, aproximadamente, 2%.

103.2. $35-28=7$

$28-19=9$



35 está mais próximo do valor médio (28) do que 19.

Logo, $P(X>35)>P(X<19)$.

Então, é mais provável a dourada medir mais de 35 cm do que de ser devolvida ao mar.

Pág. 95

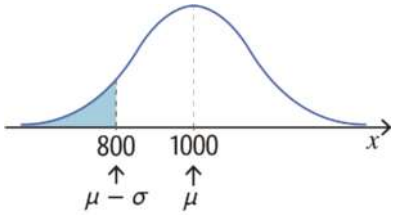
Questão 104

Espécie A: $X_A \sim N_A(1000, 200)$

Espécie B: $X_B \sim N_B(900, 100)$

104.1. Pretende-se determinar $P(X>800)$.

$800=1000-200=\mu-\sigma$



$P(X>800)=P(X>\mu-\sigma)=$

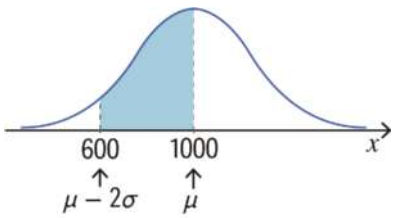
$=P(\mu-\sigma<X<\mu)+P(X>\mu)=$

$\approx\frac{0,6827}{2}+0,5\approx 0,84135\approx 84,1\%$

Cerca de 84,1% das meloas têm massa de 800 g, pelo menos.

104.2. a) Espécie A: $600=1000-2\times 200=\mu-2\sigma$

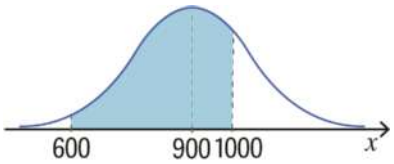
$1000=\mu$



$P(600<X_A<1000)\approx\frac{0,9545}{2}\approx 0,47725\approx 47,7\%$

b) Espécie B: $600=900-3\times 100=\mu-3\sigma$

$1000=900+100=\mu+\sigma$



$P(600<X_B<1000)=P(\mu-3\sigma<X<\mu+\sigma)=$

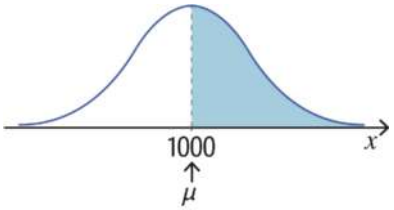
$=P(\mu-3\sigma<X<\mu)+P(\mu<X<\mu+\sigma)\approx$

$\approx\frac{0,9973}{2}+\frac{0,6827}{2}\approx 0,49865+0,34135=$

$=0,84=84\%$

104.3.

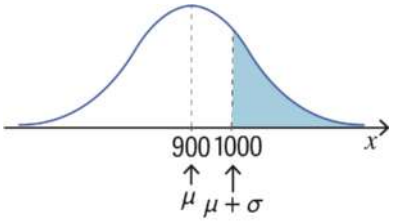
Espécie A: $P(X_A>1000)=P(X_A>\mu)\approx 0,5$



Espécie B: $P(X_B>1000)=P(X_B>\mu+\sigma)=$

$=P(X_B>\mu)-P(\mu<X_B<\mu+\sigma)\approx$

$\approx 0,5-\frac{0,6827}{2}\approx 0,5-0,34135\approx 0,15865$

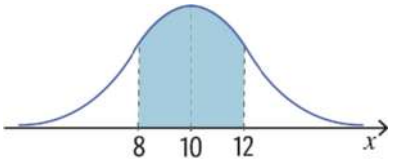


A probabilidade de as duas meloas terem mais de 1 kg é, aproximadamente, $0,5\times 0,15865\approx 0,079$, ou seja, 7,9%.

Pág. 96

Tarefas de consolidação 4

1. $X \sim N(10, \sigma)$



$P(8<X<12)\approx 0,6827$

$12-10=2\ ;\ 10-8=2$

$P(10<X<12)=P(8<X<10)\approx\frac{0,6827}{2}\approx 0,34135$

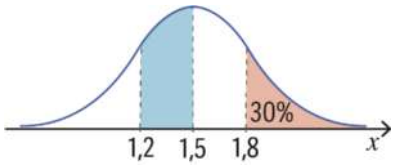
$P(X>12)=P(X>10)-P(10<X<12)\approx$

$\approx 0,5-0,34135\approx 0,15865\approx 16\%$

Opção (D)

MMA12DR © Porto Editora

2. $X \sim N(1,5;\sigma)$



$1,8-1,5=0,3$

$1,5-1,2=0,3$

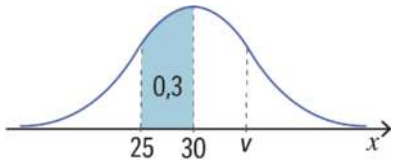
1,2 e 1,8 estão à mesma distância do valor médio

$P(1,2<X<1,5)=P(1,5<X<1,8)=$

$=P(X>1,5)-P(X>1,8)=50\%-30\%=20\%$

Opção (C)

3. $X \sim N(30;\sigma)$



$P(25<X<30)\approx 0,3$

$30-25=35\ ;\ 30+5=5$

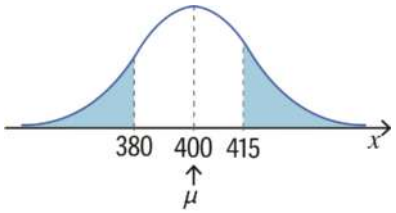
$P(X<25)=0,5-0,3=0,2$

$P(X>35)=P(X<25)=0,2$

$v=35$

Opção (C)

4. $X \sim N(400,10)$



$P(A)=P(X>415)$

$P(B)=P(X<380)$

$400-380=20\ ;\ 415-400=15$

415 está mais próxima do valor médio (400) do que 380.

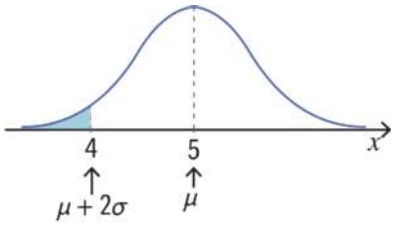
Então, $P(X>415)>P(X<380)$.

Ou seja, $P(A)>P(B)$.

Opção (A)

5. $X \sim N(400,10)$

5.1. $4=5-2\times 0,5=\mu-2\sigma$



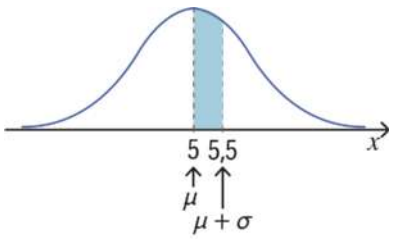
$P(X<4)=P(X<\mu-2\sigma)=$

$=P(X<\mu)-P(\mu-2\sigma<X<\mu)=$

$\approx 50\%-\frac{95,45\%}{2}\approx 50\%-47,725\%\approx$

$\approx 2,275\%\approx 2,28\%$

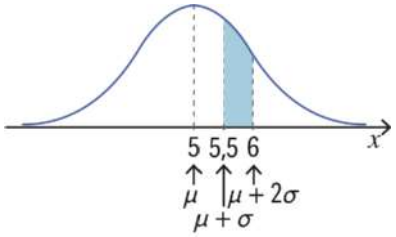
5.2. $5,5=5+0,5=\mu+\sigma$



$P(5<X<5,5)=P(\mu<X<\mu+\sigma)\approx$

$\approx\frac{68,27\%}{2}\approx 34,1\%\neq 13,6\%$

$6=5+2\times 0,5=\mu+2\sigma$



$P(5,5<X<6)=P(\mu+\sigma<X<\mu+2\sigma)=$

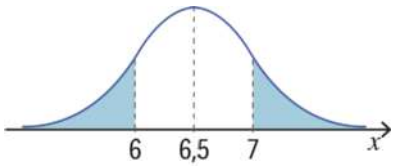
$=P(\mu<X<\mu+2\sigma)-P(\mu<X<\mu+\sigma)\approx$

$\approx\frac{95,45\%}{2}-\frac{68,27\%}{2}\approx 47,725\%-34,1\%\approx 13,6\%$

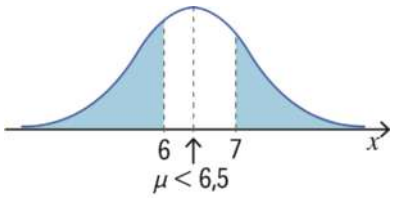
Opção (B)

Pág. 97

6. $\frac{6+7}{2}=6,5$

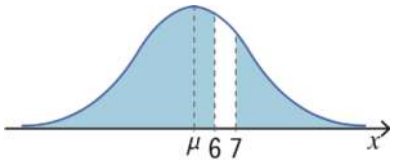


Se $\mu=6,5$, a área à esquerda de 6 é igual à área à direita de 7.



Se $\mu<6,5$, a área à esquerda de 6 é maior que a área à direita de 7.

MMA12DR © Porto Editora



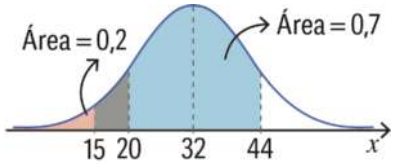
Então, um possível intervalo de amplitude unitária que contém o valor médio é $]5,5;\ 6,5[$.

7. $X \sim N(32, \sigma)$

$P(X < 20) = 0,2$

$P(15 < X < 44) = 0,7$

7.1.



$32 - 20 = 12$

$44 - 32 = 12$

20 e 44 estão à mesma distância do valor médio (32).

$P(20 < X < 32) = P(X < 32) - P(X < 20) =$

$= 0,5 - 0,2 = 0,3$

$P(20 < X < 44) = 2P(20 < X < 32) = 2 \times 0,3 = 0,6$

$P(15 < X < 20) = P(15 < X < 44) - P(20 < X < 44) =$

$= 0,7 - 0,6 = 0,1 = 10\%$

A probabilidade de o campista ter uma idade entre 15 e 20 anos é de 10%.

7.2. $P(C \cap D) = P(32 < X < 44) =$

$= P(20 < X < 32) = 0,3$

$P(D) = P(X > 32) = 0,5$

$$P(C \mid D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0,3}{0,5} = \frac{3}{5}$$

8. $X \sim N(3,6;\ \sigma)$

I. 3600 horas = 3,6 milhares de horas

$P(X < 3,6) = P(X < \mu) = 50\% \neq 75\%$

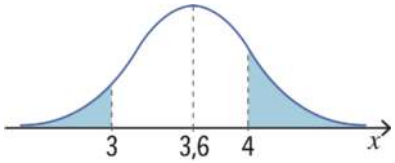
Logo, a afirmação é falsa.

II. 4000 horas = 4 milhares de horas

3000 horas = 3 milhares de horas

$4 - 3,6 = 0,4$; $3,6 - 3 = 0,6$

$P(X < 3) < P(X > 4)$



Logo, a afirmação é falsa.

III. Se $P(X > 3) = 80\%$, então,

$P(X < 3) = 100\% - 80\% = 20\%$

Como vimos anteriormente, $P(X < 3) < P(X > 4)$.

Logo, a probabilidade de o dispositivo durar mais de 4000 horas não pode ser inferior a 20%.

Logo, a afirmação é falsa.

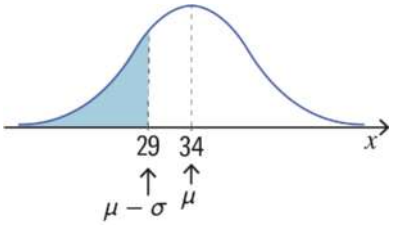
MMA12DR © Porto Editora

Pág. 99

Avaliação formativa 4

1. $X \sim N(34, 5)$

$29 = 34 - 5 = \mu - \sigma$



$P(X < 29) = P(X < \mu - \sigma) =$

$= P(X < \mu) - P(\mu - \sigma < X < \mu) \approx$

$$\approx 0,5 - \frac{0,6827}{2} = 0,5 - 0,341135 \approx 0,1587$$

2,5 milhões = 2 500 000

$2\,500\,000 \times 0,1587 \approx 396\,750$

Opção (A)

2. $X \sim N(110, \sigma)$

$P(X > 125) = 15,87\%$

$P(X > \mu + \sigma) = P(X > \mu) - P(\mu < X < \mu + \sigma) \approx$

$$\approx 50\% - \frac{68,27\%}{2} \approx 50\% - 34,135\% \approx 15,87\%$$

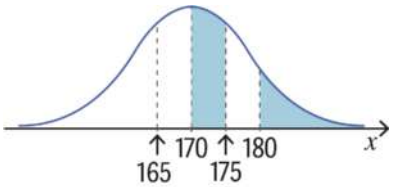
Então, $\mu + \sigma = 125 \Leftrightarrow 110 + \sigma = 125 \Leftrightarrow \sigma = 15$.

Opção (B)

3. $X \sim N(170, \sigma)$

1,65 m = 165 cm ; 1,70 m = 170 cm

1,80 m = 180 cm ; $180 - 170 = 10$; $170 - 165 = 5$



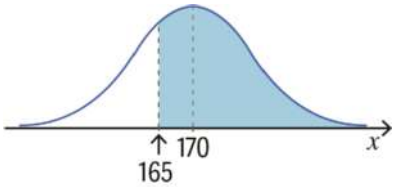
$P(170 < X < 175) = P(165 < X < 170)$

$P(165 < X < 170 \vee X > 180) < 0,5$

I é verdadeira.

$P(X > 165) > P(X > 170)$

II é verdadeira.



165 está mais próximo do valor médio (170) do que 180.
Então, $P(X > 80) < P(X < 165)$.

III é falsa.
$175 - 170 = 5$
$170 - 165 = 5$
165 e 175 estão à mesma distância do valor médio (170).
Então, $P(X > 165) = P(X < 175)$.

IV é verdadeira.
$P(\mu - \sigma > X > \mu + \sigma) = 68,27\%$
Então $\mu - \sigma = 165$ e $\mu + \sigma = 175$
$170 - \sigma = 165$ e $170 + \sigma = 175 \Leftrightarrow \sigma = 5 \neq 10$
V é falsa.
Afirmações verdadeiras: I, II e IV.

Tarefas complementares

Pág. 100

1. $6000 : 6 = 1000$
Uma vez que o dado é equilibrado, é de esperar que cada face saia cerca de 1000 vezes.

2. $A \to \frac{129}{1000} = 0,129$; $\frac{1}{2} = 0,5$

$B \to \frac{255}{1000} = 0,255$; $\frac{1}{4} = 0,25$

$C \to \frac{486}{1000} = 0,486$; $\frac{1}{8} = 0,125$

$D \to \frac{130}{1000} = 0,13$

$A \to \frac{1}{8}$; $B \to \frac{1}{4}$; $C \to \frac{1}{2}$; $D \to \frac{1}{8}$

3. Bolas cor-de-rosa: $\frac{2501}{10\,000} = 0,2501$

$0,2501 \times 200 \approx 50$

Bolas azuis: $\frac{1249}{10\,000} = 0,1249$

$0,1249 \times 200 = 24,98 \approx 25$

Bolas verdes: $\frac{6250}{10\,000} = 0,625$

$0,625 \times 200 = 125$

Espera-se que o saco tenha 50 bolas cor-de-rosa, 25 bolas azuis e 125 bolas verdes.

4. $\frac{10\,000}{2} = 5000$

4.1. Uma vez que a moeda é equilibrada, é de esperar que a face voltada para cima seja N, 5000 vezes.

4.2. Uma vez que a moeda é equilibrada, é de esperar que a face voltada para cima seja E, 5000 vezes.

Pág. 101

5. $b = 2a$

$0,05 + a + b + 0,2 = 1 \Leftrightarrow a + 2a = 1 - 0,05 - 0,2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3a = 0,75 \Leftrightarrow a = \frac{0,75}{3} \Leftrightarrow a = 0,25$

$b = 2a = 2 \times 0,25 = 0,5$

$a = 0,25$ e $b = 0,5$

6. $P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + P(\{a_3\}) + P(\{a_4\}) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,1 + 11P(\{a_3\}) + P(\{a_3\}) + 3P(\{a_3\}) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15P(\{a_3\}) = 1 - 0,1 \Leftrightarrow P(\{a_3\}) = \frac{0,9}{15} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(\{a_3\}) = 0,06$

$P(\{a_2\}) = 11P(\{a_3\}) = 11 \times 0,06 = 0,66$

$P(\{a_4\}) = 3P(\{a_3\}) = 3 \times 0,06 = 0,18$

Resultados	a_1	a_2	a_3	a_4
P	0,1	0,66	0,06	0,18

7.1. **a)** $A \cup \overline{A} = S$
b) $A \cup S = S$
c) $A \cup \varnothing = A$

7.2. **a)** $A \cap \overline{A} = \varnothing$
b) $A \cap S = A$
c) $A \cap \varnothing = \varnothing$

8.1. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

8.2. $A = \{3, 6, 9\}$
$B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$
$\overline{B} = \{4, 6, 8, 10\}$
$A \cap \overline{B} = \{6\}$

8.3. **a)** $A \cap B = \{3, 9\}$
$\overline{A \cap B} = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$
$\overline{A} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$
$\overline{B} = \{4, 6, 8, 10\}$
$\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10\} = \overline{A \cap B}$

b) $\overline{A} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$ e $\overline{B} = \{4, 6, 8, 10\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$
$\overline{A \cup B} = \{4, 8, 10\}$; $\overline{A} \cap \overline{B} = \{4, 8, 10\} = \overline{A \cup B}$

8.4. Dados: $A \cap B = \{3, 9\}$; $A \setminus B = \{6\}$
$A \setminus (A \cap B) = \{6\} = A \setminus B$

MMA12DR © Porto Editora

Pág. 102

9. $P(A)=\frac{1}{3};\ P(B)=\frac{1}{4}$

A e B são disjuntos $\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$

Então, $P(A\cap B)=0$.

9.1. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-0=\frac{7}{12}$

9.2. $P\left(A\cap \overline{B}\right)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$

10. $P(A)=0{,}7;\ P(B)=0{,}5;\ P(A\cap B)=0{,}4$

10.1. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$

$=0{,}7+0{,}5-0{,}4=0{,}8$

10.2. $P\left(\overline{A}\cap B\right)=P(B)-P(A\cap B)=0{,}5-0{,}4=0{,}1$

11. $P(A\cap B)=0{,}3;\ P\left(\overline{A}\right)=0{,}6;\ P(B)=0{,}8$

$P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-0{,}6=0{,}4$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$

$=0{,}4+0{,}8-0{,}3=0{,}9$

$P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-0{,}9=0{,}1$

12. $P(A\cup B)=2P(A);\ P(B)=4P(A\cap B);$

$P\left(\overline{A\cup B}\right)=0{,}4$

$P\left(\overline{A\cup B}\right)=0{,}4\Leftrightarrow 1-P(A\cup B)=0{,}4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A\cup B)=1-0{,}4\Leftrightarrow P(A\cup B)=0{,}6$

$P(A\cup B)=2P(A)\Leftrightarrow 0{,}6=2P(A)\Leftrightarrow P(A)=0{,}3$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}6=0{,}3+4P(A\cap B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3P(A\cap B)=0{,}3\Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}1$

$P(A)=0{,}3$ e $P(A\cap B)=0{,}1$

13.

2.ª jogada

1.ª jogada	+	1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5		
	2	3	4	5			
	3	4	5				
	4	5					
	5						
	6						

Números de resultados possíveis: 10

Números de resultados favoráveis: 2

$P=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

14.1.

	A	F	I	E
A		(A,F)	(A,I)	(A,E)
F	(F,A)		(F,I)	(F,E)
I	(I,A)	(I,F)		(I,E)
E	(E,A)	(E,F)	(E,I)	

14.2. Como a extração é feita sem reposição, a mesma moeda não pode sair duas vezes.

14.3. Número de resultados possíveis: 12

a) Número de resultados favoráveis: 3

$P=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

b) Número de resultados favoráveis: 6

$P=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

c) Número de resultados favoráveis: 9

$P=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

15. Sejam A e C os acontecimentos assim definidos:

A: "O aluno utiliza o autocarro."

B: "O aluno almoça na cantina."

Pretende-se determinar $P(A\cap C)$.

$P\left(\overline{A}\right)=0{,}25$

$P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-0{,}25=0{,}75=75\%$

60% de 75% é: $0{,}6\times 0{,}75=0{,}45$

$P(A\cap C)=45\%$

16. Sejam J e P os acontecimentos assim definidos:

J: "Ganha o João."

P: "Ganha o Pedro."

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Número de resultados possíveis: 36

Número de resultados favoráveis a J: 18

MMA12DR © Porto Editora

$P(J)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

Número de resultados favoráveis a *P*: 18

$P(P)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

O jogo é justo porque o João e o Pedro têm a mesma probabilidade de ganhar.

Pág. 104

17. Número de resultados possíveis:

$P_9=9!=362\,880$

É o número de maneiras de ordenar os 9 livros.

17.1. Número de resultados favoráveis:

$P_5\times P_4\times 2=5!\times 4!\times 2=5760$

P_5 : Número de maneiras de ordenar os livros de Matemática.

P_4 : Número de maneiras de ordenar os livros de Física.

2 : Os livros de Matemática podem estar no início ou no fim da fila.

$P=\frac{5!\times 4!\times 2}{9!}=\frac{5760}{362\,880}=\frac{1}{63}$

17.2. Número de resultados favoráveis:

$P_4\times P_5=4!\times 5!\times 6=17\,280$

P_4 : Número de maneiras de ordenar os livros de Física.

P_5 : Número de maneiras de ordenar os 5 livros de Matemática.

6 : Número de maneiras de colocar os 4 livros de Física juntos (nos extremos da fila ou entre dois livros de Matemática).

$\uparrow M\uparrow M\uparrow M\uparrow M\uparrow M\uparrow$

$P=\frac{4!\times 5!\times 6}{9!}=\frac{1}{21}$

18. Número de resultados possíveis: $P_7=7!=5040$

É o número de maneiras de ordenar as 7 bolas.

18.1. Número de resultados favoráveis:

$4\times P_6=4\times 6!=2880$

4 : Número de maneiras de selecionar um número ímpar para ocupar a posição do algarismo das unidades (1, 3, 5 ou 7).

P_6 : Número de maneiras de ordenar as restantes 6 bolas.

$P=\frac{4\times 6!}{7!}=\frac{2880}{5040}=\frac{4}{7}$

18.2. Número de resultados favoráveis:

Para que o número seja superior a 2 500 000, teremos que considerar 2 possibilidades: ou o primeiro algarismo é superior a 2 ou o primeiro algarismo é 2 e o segundo é superior ou igual a 5.

$5\times P_6+1\times 3\times P_5=5\times 6!+3\times 5!=3960$

5 : Número de possibilidades de selecionar uma bola para ocupar a primeira posição (3, 4, 5, 6 ou 7).

P_6 : Número de maneiras de ordenar as restantes 6 bolas.

1 : O primeiro algarismo é 2.

3 : Número de possibilidades de selecionar um algarismo para ocupar a posição das centenas de milhar (5, 6 ou 7).

P_5 : Número de maneiras de ordenar as restantes 5 bolas.

$P=\frac{5\times 6!+3\times 5!}{7!}=\frac{3960}{5040}=\frac{11}{14}$

18.3. Número de resultados favoráveis:

Para que o número seja inferior a 4 340 000, teremos que considerar 3 possibilidades: ou o primeiro algarismo é inferior a 4, ou o primeiro algarismo é 4 e o segundo é inferior a 3 ou ainda o primeiro algarismo é 4, o segundo é 3 e o terceiro é inferior a 4.

$3\times P_6+1\times 2\times P_5+1\times 1\times 2\times P_4=$

$=3\times 6!+2\times 5!+2\times 4!=2448$

3 : O primeiro algarismo é inferior a 4 (1, 2 ou 3).

P_6 : Número de maneiras de ordenar os restantes 6 algarismos.

1 : O primeiro algarismo é 4.

2 : O segundo algarismo é inferior a 3 (1 ou 2).

P_5 : Número de maneiras de ordenar os restantes 5 algarismos.

1 : O primeiro algarismo é 4.

1 : O segundo algarismo é 3.

2 : O terceiro algarismo é inferior a 4 (1 ou 2).

P_4 : Número de maneiras de ordenar os restantes 4 algarismos.

$P=\frac{3\times 6!+2\times 5!+2\times 4!}{7!}=\frac{2448}{5040}=\frac{17}{35}$

Pág. 105

19. Número de resultados possíveis: ${}^6A'_6=46\,656$

É o número de maneiras de ordenar 6 algarismos repetidos ou não, escolhidos entre 1 e 6.

19.1. Para que um número seja múltiplo de 3, a soma dos seus algarismos tem que ser um múltiplo de 3. Se dividirmos um número natural por 3, ou o resto é 0 ou é 1 ou é 2.

Fixando os 5 primeiros algarismos:

- Se o resto da divisão da soma de todos esses algarismos por 3 for 0, então, o último algarismo poderá ser 3 ou 6 para que o número seja divisível por 3;
- Se o resto da divisão da soma de todos esses algarismos por 3 for 1, então, o último algarismo seja divisível por 3;
- Se o resto da divisão da soma de todos esses algarismos por 3 for 2, então, o último algarismo

MMA12DR © Porto Editora

poderá ser 1 ou 4 para que o número seja divisível por 3.
Isto é, para qualquer sequência de cinco algarismos, há 2 possibilidades para o sexto que transformam o número em múltiplo de 3.
O mesmo acontece com qualquer outro dos 5 algarismos do número. Ou seja, o número de resultados favoráveis ao acontecimento é $\frac{2}{6} \times 46\,656 = 15\,552$.

$$P = \frac{15\,552}{46\,656} = \frac{1}{3}$$

19.2. Números de resultados favoráveis:
$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
6 : Número de possibilidades para o primeiro algarismo (qualquer face ao lado).
5 : O segundo algarismo tem que ser diferente do primeiro.
4 : O terceiro algarismo tem que ser diferente do segundo e do primeiro.
1 : O quarto algarismo tem que ser igual ao terceiro.
1 : O quinto algarismo tem que ser igual ao segundo.
1 : O sexto tem que ser igual ao primeiro.

$$P = \frac{120}{46\,656} = \frac{5}{1944}$$

20. Número de resultados possíveis: ${}^{20}C_5 = 15\,504$
É o número de maneiras de selecionar 5 alunos dos 20 da turma.
Número de resultados favoráveis:
$1 \times {}^{19}C_4 = 3876$
1 : A Helena é escolhida.
${}^{19}C_4$: Número de maneiras de selecionar 4 dos restantes 19 alunos.

$$P = \frac{{}^{19}C_4}{{}^{20}C_5} = \frac{3876}{15\,504} = \frac{1}{4}$$

21. Número de resultados possíveis; ${}^{16}C_2 = 120$
É o número de maneiras de selecionar 2 das 16 bolas que estão no saco.

21.1. Número de resultados favoráveis: ${}^{6}C_2 = 15$
É o número de maneiras de selecionar 2 das 6 bolas verdes.

$$P = \frac{{}^{6}C_2}{{}^{16}C_2} = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$$

21.2. Número de resultados favoráveis:
$10 \times 6 = 60$
10 : Número de maneiras de escolher uma bola amarela.
6 : Número de manerias de escolher uma bola verde.

$$P = \frac{10 \times 6}{{}^{16}C_2} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

22. Número de resultados possíveis: ${}^{12}C_6 = 924$
É o número de maneiras de selecionar 6 dos 12 alunos.

22.1. Número de resultados favoráveis: ${}^{7}C_6 = 7$
É o número de maneiras de selecionar 6 dos 7 alunos da turma B.

$$P = \frac{{}^{7}C_6}{{}^{12}C_6} = \frac{7}{924} = \frac{1}{132}$$

22.2. Para que o grupo tenha mais alunos do 12.º A do que do 12.º B, teremos que considerar 2 situações: ou o grupo tem 5 alunos do 12.º A e 1 aluno do 12.º B, ou tem 4 alunos do 12.º A e 2 alunos do 12.º B.
Número de resultados favoráveis:
${}^{5}C_5 \times {}^{7}C_1 + {}^{5}C_4 \times {}^{7}C_2 = 7 + 5 \times 21 = 112$
${}^{5}C_5$: Número de maneiras de selecionar os 5 alunos do 12.º A.
${}^{7}C_1$: Número de maneiras de selecionar 1 dos 7 alunos do 12.º B.
${}^{5}C_5 \times {}^{7}C_1$: A comissão tem 5 alunos do 12.º A e 1 aluno do 12.º B.
${}^{5}C_4$: Número de maneiras de selecionar 4 dos 5 alunos do 12.º A.
${}^{7}C_2$: Número de maneiras de selecionar 2 dos 7 do 12.º B.
${}^{5}C_4 \times {}^{7}C_2$; A comissão tem 4 alunos do 12.º A e 2 alunos do 12.º B.

$$P = \frac{{}^{5}C_5 \times {}^{7}C_1 + {}^{5}C_4 \times {}^{7}C_2}{{}^{12}C_6} = \frac{112}{924} = \frac{4}{33}$$

22.3. Seja *A* o acontecimento assim definido:
A: "O grupo tem, no máximo, 1 aluno do 12.º A".
Determinemos a probabilidade do acontecimento *A*.
Número de resultados favoráveis a *A*:
Para que o grupo tenha, no máximo, 1 aluno do 12. º A, teremos que considerar 2 situações: o grupo não tem alunos do 12.º A (7 – calculado na alínea 22.1.) ou o grupo tem 1 aluno do 12.º A.
${}^{7}C_6 + {}^{5}C_1 \times {}^{7}C_5 = 7 + 5 \times 21 = 112$
${}^{7}C_6$: Número de maneiras de selecionar os 6 dos 7 alunos do 12.º B, onde a comissão é formada apenas por alunos do 12.º B.
${}^{5}C_1$: Número de maneiras de selecionar 1 dos 5 alunos do 12.º A.
${}^{7}C_5$: Número de maneiras de selecionar 5 dos 7 do 12.º B.
${}^{5}C_1 \times {}^{7}C_5$; A comissão tem 1 aluno do 12.º A e 5 alunos do 12.º B.

$$P(A) = \frac{{}^{7}C_6 + {}^{5}C_1 \times {}^{7}C_5}{{}^{12}C_6} = \frac{112}{924} = \frac{4}{33}$$

MMA12DR © Porto Editora

O acontecimento "o grupo tem, pelo menos, dois alunos do 12.º A" é o acontecimento contrário de A. Então, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{33} = \frac{29}{33}$

22.4. Seja B o acontecimento assim definido.
B: "Os dois irmãos fazem parte do grupo."
Número de resultados favoráveis a B:
${}^{2}C_{2} \times {}^{10}C_{4} = 1 \times 210 = 210$

${}^{2}C_{2}$: Os 2 irmãos fazem parte do grupo.

${}^{10}C_{4}$: Número de maneiras de escolher 4 dos restantes 10 alunos.

$$P(B) = \frac{{}^{2}C_{2} \times {}^{10}C_{4}}{{}^{12}C_{6}} = \frac{210}{924} = \frac{5}{22}$$

O acontecimento "no máximo, um dos irmãos faz parte do grupo" é o acontecimento contrário B.

Então, $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{22} = \frac{17}{22}$.

Pág. 106

23. Número de resultados possíveis:
${}^{60}C_{6} = 50\,063\,860$
É o número de maneiras de selecionar 6 dos 60 alunos do 12.º ano.

23.1. Número de resultados favoráveis:
${}^{20}C_{1} \times {}^{20}C_{2} \times {}^{20}C_{3} = 20 \times 190 \times 1140 = 4\,332\,000$

${}^{20}C_{1}$: Número de maneiras de selecionar 1 dos 20 alunos do 12.º A.

${}^{20}C_{2}$: Número de maneiras de selecionar 2 dos 20 alunos do 12.º B.

${}^{20}C_{3}$: Número de maneiras de selecionar 3 dos 20 alunos do 12.º C.

$$P = \frac{{}^{20}C_{1} \times {}^{20}C_{2} \times {}^{20}C_{3}}{{}^{60}C_{6}} = \frac{4\,332\,000}{50\,063\,860} \approx 0,087 = 8,7\%$$

23.2. Seja A o acontecimento assim definido:
A: "Os irmãos Bia e Rui do 12.º C não fazem parte do grupo escolhido".
Número de resultados favoráveis a A:
${}^{58}C_{6} = 40\,475\,358$
É o número de maneiras de selecionar 6 dos restantes 58 alunos (excluindo a Bia e o Rui).

$$P(B) = \frac{{}^{58}C_{6}}{{}^{60}C_{6}} = \frac{40\,475\,358}{50\,063\,860} = \frac{477}{590}$$

O acontecimento "pelo menos um dos dois irmãos referidos é selecionado" é o acontecimento contrário de A.
Então,

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{477}{590} = \frac{113}{590} \approx 0,192 = 19,2\%$$

24. Número de resultados possíveis: ${}^{10}C_{4} = 210$
É o número de maneiras diferentes de selecionar 4 dos 10 lugares que ficam vazios.

24.1. Número de resultados favoráveis: 7
É o número de maneiras de colocar os 4 lugares vazios consecutivos (nos extremos ou entre 2 carros).
$\uparrow C \uparrow C \uparrow C \uparrow C \uparrow C \uparrow C \uparrow$

$$P = \frac{7}{{}^{10}C_{4}} = \frac{7}{210} = \frac{1}{30}$$

24.2. Número de resultados favoráveis: ${}^{7}C_{4}$
É o número de maneiras de escolher 4 dos 7 lugares disponíveis que ficam vazios (nos extremos ou entre 2 carros).
$\uparrow C \uparrow C \uparrow C \uparrow C \uparrow C \uparrow C \uparrow$

$$P = \frac{{}^{7}C_{4}}{{}^{10}C_{4}} = \frac{35}{210} = \frac{1}{6}$$

Pág. 107

25.1. Número de resultados possíveis: ${}^{15}C_{4} = 1365$
É o número de maneiras de selecionar 4 das 15 bolas do saco.
Número de resultados favoráveis: ${}^{10}C_{4} = 210$
É o número de maneiras de selecionar 4 das 10 bolas amarelas do saco.

$$P = \frac{{}^{10}C_{4}}{{}^{15}C_{4}} = \frac{210}{1365} = \frac{2}{13}$$

25.2. Número de resultados possíveis: ${}^{15}C_{3} = 455$
É o número de maneiras de selecionar 4 das 15 bolas do saco.
Seja A o acontecimento assim definido:
A: "As três bolas são amarelas."
Número de resultados favoráveis a A: ${}^{10}C_{3} = 120$
É o número de maneiras a selecionar 3 das 10 bolas amarelas do saco.

$$P(A) = \frac{{}^{10}C_{3}}{{}^{15}C_{3}} = \frac{120}{455} = \frac{24}{91}$$

O acontecimento "pelo menos uma das bolas é verde" é o acontecimento contrário de A.

Então, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$

25.3. Um saco contém 10 bolas amarelas e 5 bolas verdes, indistinguíveis ao tato.
Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, quatro bolas do saco.
Qual é a probabilidade de serem retiradas duas bolas de cada cor?

26.1. 1.ª resposta:
Segundo a regra de Laplace, se os acontecimentos elementares são equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de resultados favoráveis e o número de resultados possíveis.

MMA12DR © Porto Editora

Se consideramos a ordem relevantes, existem $15!$ maneiras de colocar as 15 bolas numa fila por ordem de saída. Logo, $15!$ é o número de resultados possíveis.
Tendo em conta a ordem, existem $10!$ maneiras diferentes de ordenar as 10 bolas cinzentas. Para cada uma destas maneiras existem ${}^{11}A_5$ maneiras de colocar ordenadamente as 5 bolas azuis. Para que não haja bolas azuis seguidas, estas terão que ocupar 4 de 11 lugares disponíveis (nos extremos ou entre duas bolas cinzentas).
$\uparrow\bullet\uparrow\bullet\uparrow\bullet\uparrow\bullet\uparrow\bullet\uparrow\bullet\uparrow\bullet\uparrow\bullet\uparrow\bullet\uparrow$
Assim, o número de resultados favoráveis ao acontecimento é dado por $10!\times {}^{11}A_5$.
Então, de acordo com a regra de Laplace,

$$P=\frac{10!\times {}^{11}A_5}{15!}$$

2.ª resposta:
Segundo a regra de Laplace, se os acontecimentos elementares são equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de resultados favoráveis ao acontecimento e o número de resultados possíveis.
Considerando que a ordem de saída das bolas não é relevante, existem ${}^{15}C_{10}$ maneiras diferentes de distribuir as 10 bolas cinzentas pelos 15 lugares disponíveis, ficando as bolas cinzentas pelos 15 lugares disponíveis, ficando as bolas azuis nos lugares não ocupados pelas bolas cinzentas. Assim, ${}^{15}C_{10}$ é o número de resultados possíveis.
O número de resultados favoráveis ao acontecimento é dado por ${}^{11}C_5$ que é o número de maneiras de colocar as 5 bolas azuis em 5 dos 11 lugares disponíveis (nos extremos ou entre 2 bolas cinzentas $\uparrow\bullet\uparrow\bullet\uparrow\bullet\uparrow\bullet\uparrow\bullet\uparrow\bullet\uparrow\bullet\uparrow\bullet\uparrow$)
Então, de acordo com a regra de Laplace,

$$P=\frac{{}^{11}C_5}{{}^{15}C_{10}}.$$

26.2. Seja n o número de bolas cinzentas do saco.
Se saiu uma bola cinzenta da caixa, introduziu-se uma bola cinzenta no saco, ficando o saco com $n+1$ bolas cinzentas e 7 de outras cores.
A probabilidade de retirar agora uma bola cinzenta do saco é $\frac{n+1}{n+1+7}$.
Então, $\frac{n+1}{n+1+7}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{n+1}{n+8}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4n+4=3n+24\Leftrightarrow n=20$
O saco tem 20 bolas cinzentas.

Pág. 108

27. Número de resultados possíveis: ${}^{10}A_4=5040$
É o número de maneiras de ordenar 4 dos 10 algarismos disponíveis.

27.1. Número de resultados favoráveis:
${}^{5}A_4=120$
É o número de maneiras de ordenar 4 dos 5 algarismos pares.

$$P=\frac{{}^{5}A_4}{{}^{10}A_4}=\frac{1}{42}$$

27.2. Número de resultados favoráveis:
${}^{9}A_3\times 2=504\times 2=1008$
${}^{9}A_3$: Número de maneiras de ordenar 3 dos restantes 9 algarismos.
2 : Número de possibilidades para algarismos das unidades (o ou 5).

$$P=\frac{{}^{9}A_8\times 2}{{}^{10}A_4}=\frac{1008}{5040}=\frac{1}{5}$$

27.3. Para que o número seja superior a 6500, temos que considerar 2 possibilidades: ou o primeiro algarismo é superior a 6 ou o primeiro algarismo é 6 e o segundo é superior ou igual a 5.
Número de resultados favoráveis:
$3\times {}^{9}A_3+1\times 4\times {}^{8}A_2=3\times 504+4\times 56=1736$
3 : O primeiro algarismo pode ser 7, 8 ou 9.
${}^{9}A_3$: Número de maneiras de ordenar 3 dos restantes 9 algarismos.
$3\times {}^{9}A_3$: O primeiro algarismo é superior a 6.
1 : O primeiro algarismo é 6.
4 : O segundo algarismo pode ser 5, 7, 8 ou 9.
${}^{8}A_2$: Número de maneiras de ordenar 2 dos restantes 8 algarismos.
$1\times 4\times {}^{8}A_2$: O primeiro algarismo é 6 e o segundo é superior ou igual a 5.

$$P=\frac{3\times {}^{9}A_3+1\times 4\times {}^{8}A_2}{{}^{10}A_4}=\frac{1736}{5040}=\frac{31}{90}$$

27.4. Uma vez que um dos algarismos é ímpar (9), para que a soma dos quatro algarismos seja ímpar, terão que ser os quatro ímpares ou dois pares e dois ímpares.
${}^{4}C_2\times 4!+{}^{5}C_2\times 4\times 4!=4\times 24+10\times 4\times 24=1056$
${}^{4}C_2$: Número de maneiras de selecionar 3 dos restantes 4 algarismos ímpares (1, 3, 5 e 7).
$4!$: Número de maneiras de ordenar os 4 algarismos selecionados.
${}^{4}C_2\times 4!$: Os quatro algarismos são ímpares.
${}^{5}C_2$: Número de maneiras de selecionar 2 dos 5 algarismos pares.
4 : Número de maneiras de escolher o outro algarismo ímpar (1, 3, 5 ou 7).

MMA12DR © Porto Editora

$4!$: Número de maneiras de ordenar os quatro algarismos selecionados.

${}^5C_2 \times 4 \times 4!$: Dois algarismos são ímpares e dois algarismos são pares.

$$P = \frac{{}^4C_2 \times 4! + {}^5C_2 \times 4 \times 4!}{{}^{10}A_4} = \frac{1056}{5040} = \frac{22}{105}$$

Pág. 109

28. Para responder as questões, iremos construir uma tabela de dupla entrada.
Número de resultados possíveis: $12 \times 12 = 144$

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2									(2, 9)	(2, 10)	(2, 11)	(2, 12)
3												
4									(4, 4)	(4, 10)	(4, 11)	(4, 12)
5												
6						(6, 6)			(6, 9)	(6, 10)	(6, 11)	(6, 12)
7												
8									(8, 9)	(8, 10)	(8, 11)	(8, 12)
9		(9, 2)		(9, 4)		(9, 6)		(9, 8)		(9, 10)		(9, 12)
10		(10, 2)		(10, 4)		(10, 6)		(10, 8)	(10, 9)	(10, 10)	(10, 11)	(10, 12)
11		(11, 2)		(11, 4)		(11, 6)		(11, 8)		(11, 10)		(11, 12)
12		(12, 2)		(12, 4)		(12, 6)		(12, 8)	(12, 9)	(12, 10)	(12, 11)	(12, 11)

28.1. Número de resultados favoráveis: 1
(representados a verde na tabela)

$$P = \frac{1}{144}$$

28.2. Número de resultados favoráveis: 44
(representados a vermelho na tabela)

$$P = \frac{44}{144} = \frac{11}{36}$$

28.3. Número de resultados favoráveis: 9 (preenchidos a amarelo na tabela).

$$P = \frac{9}{144} = \frac{1}{16}$$

28.4. Número de resultados favoráveis:
Para que a soma dos dois dados seja um número ímpar, terá que sair um número par num dos dados e um número ímpar no outro.
$6 \times 6 \times 2 = 72$
6 : Número de faces do dado com número par.
6 : Número de faces do dado com número ímpar.
Pode sair (par, ímpar) ou (ímpar, par): 2.

$$P = \frac{72}{144} = \frac{1}{2}$$

29.1. Número de resultados possíveis: ${}^6C_3 = 20$
É o número de maneiras de selecionar 3 dos 6 vértices do octaedro.
Número de resultados favoráveis: ${}^4C_3 = 4$
É o número de maneiras de selecionar 3 dos 4 vértices que poderão definir um plano paralelo ao plano de equação $z = 1$ (A, B, C e D).

$$P = \frac{{}^4C_3}{{}^6C_3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

29.2. Número de resultados possíveis: ${}^{12}C_8 = 495$
É o número de maneiras de selecionar 8 das 12 cores disponíveis.
Número de resultados favoráveis:
$1 \times {}^{11}C_7 = 330$
1 : A cor branca.
${}^{11}C_7$: número de maneiras de selecionar 7 das restantes 11 cores.

$$P = \frac{{}^{11}C_7}{{}^{12}C_8} = \frac{330}{495} = \frac{2}{3}$$

30.1. a) $P(A)$ representa a probabilidade de o número da bola retirada ser par.
Número de resultados possíveis: $n + 5$
É o número total de bolas no saco.
Número de resultados favoráveis:

$$2 + \frac{n}{2}$$

2 : Número de bolas brancas com número par.

$\frac{n}{2}$: número de bolas pretas com número par.

$$P = \frac{2 + \frac{n}{2}}{n+5} = \frac{\frac{4+n}{2}}{n+5} = \frac{n+4}{2n+10}$$

b) $P(A \cup \bar{B})$ representa a probabilidade do número da bola retirada ser par ou maior que 5.
Número de resultados possíveis: $n + 5$
Número de resultados favoráveis:
$2 + 2 + n - 5 = n - 1$
2 : Número de bolas brancas com número par.
2 : Número de bolas pretas com número par menor que 5.
$n - 5$: Número de bolas com número maior que 5.

$$P = \frac{n-1}{n+5}$$

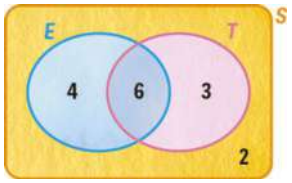
30.2. Número de resultados favoráveis a *B*:
$5 + 5 = 10$
5 : Número de bolas brancas com número menor ou igual a 5.
5 : Número de bolas pretas com número menor ou igual a 5.

$$P(B) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{10}{n+5} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 30 = n + 5 \Leftrightarrow n = 25$$

MMA12DR © Porto Editora

Pág. 110

31. Vamos organizar a informação num diagrama de Venn.
Sejam *E* e *T* os acontecimentos assim definidos:
E: "O ex-aluno é estudante."
T: "O ex-aluno é trabalhador."



Número de ex-alunos que estudam: $\frac{2}{3}\times 15 = 10$

Número de ex-alunos que estudam e trabalham: $\frac{2}{5}\times 15 = 6$

Número de ex-alunos que estudam e não trabalham: $10-6=4$

Número de ex-alunos que trabalham e não estudam: $0,2\times 15 = 3$

Número de alunos que não trabalham nem estudam: $15-6-4-3=2$

Número de resultados possíveis: ${}^{15}C_5 = 3003$

É o número de maneiras de escolher 5 dos 15 ex-alunos.

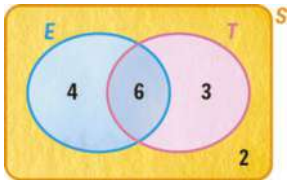
31.1. Número de resultados favoráveis:

$1\times {}^{8}C_4 = 70$

1: O Joaquim.

${}^{8}C_4$: número de maneiras de escolher 4 dos restantes 8 ex-alunos que trabalham.

$$P = \frac{{}^{8}C_4}{{}^{15}C_5} = \frac{70}{3003} = \frac{10}{429}$$



31.2. Número de resultados favoráveis:

${}^{2}C_2 \times {}^{13}C_3 = 1\times 286 = 286$

${}^{2}C_2$: O Joaquim e a Liliana.

${}^{13}C_3$: Número de maneiras de escolher 3 dos restantes ex-alunos do grupo.

$$P = \frac{{}^{13}C_3}{{}^{15}C_5} = \frac{286}{3003} = \frac{2}{21}$$

31.3. Número de alunos que estudam ou não trabalham: $10+2=12$.

Número de resultados favoráveis:

${}^{2}C_2 \times {}^{11}C_3 = 165$

${}^{2}C_2$: O Joaquim e a Liliana.

${}^{11}C_3$: Número de maneiras de escolher 3 alunos que estudam ou não trabalham, excluindo a Liliana.

$$P = \frac{{}^{11}C_3}{{}^{15}C_5} = \frac{165}{3003} = \frac{5}{91}$$

Pág. 111

32. $P(A) = 0,65$

$P(A\cap B) = 0,15$

$P(A\cup B)\le 1 \Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)\le 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,65+P(B)-0,15\le 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B)\le 1-0,5 \Leftrightarrow P(B)\le 0,5$

33.1. Número de resultados possíveis: ${}^{8}C_2 = 28$

É o número de maneiras de selecionar 2 dos 8 vértices do cubo.

a) Número de resultados favoráveis: 12 (é o número de arestas do cubo).

$$P = \frac{12}{{}^{8}C_2} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

b) Números de resultados favoráveis: 4 (Para que a reta passe no centro do cubo, tem que conter uma das 4 diagonais espaciais do cubo, $[AH]$, $[BE]$, $[CF]$ e $[DG]$.

$$P = \frac{4}{{}^{8}C_2} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$$

33.2. Números de resultados favoráveis: ${}^{8}C_3 = 56$

É o número de maneiras de selecionar 3 dos 8 vértices do cubo.

a) Número de resultados favoráveis:

$6\times {}^{4}C_3 = 6\times 4 = 24$

6 : Número de faces de um cubo.

${}^{4}C_3$: Número de maneiras de selecionar 3 dos 4 vértices de uma face do cubo.

$$P = \frac{6\times {}^{4}C_3}{{}^{8}C_2} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

b) Números de resultados favoráveis:

$12\times 2 = 24$

12 : Número de arestas do cubo.

2 : Número de possibilidades de escolha do terceiro vértice depois de escolhidos os vértices de uma aresta.

$$P = \frac{12\times 2}{{}^{8}C_2} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

34. Número de resultados possíveis: ${}^{7}C_3 = 35$

É o número de maneiras das bolas amarelas ocuparem 3 dos 7 lugares da fila, ficando as vermelhas nos lugares não ocupados pelas bolas amarelas.

34.1. Seja *A* o acontecimento assim definido:
A: "As extremidades da fila são ocupadas por bolas vermelhas".

MMA12DR © Porto Editora

Número de resultados favoráveis a *A*:

${}^5C_3 = 10$ (é o número de maneiras de colocar as 3 bolas amarelas em 3 dos 5 lugares do meio da fila)

$$P(A) = \frac{{}^5C_3}{{}^7C_3} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$$

O acontecimento "pelo menos uma bola amarela ocupa uma das extremidades da fila" é o acontecimento contrário de *A*.

Então, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$.

34.2. Número de resultados favoráveis: 5

É o número de possibilidades de colocar as 3 bolas amarelas juntas (nas extremidades ou entre duas bolas vermelhas). ↑ • ↑ • ↑ • ↑ • ↑

$$P = \frac{5}{{}^7C_3} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

34.3. Número de resultados favoráveis: ${}^5C_3$

É o número de maneiras de colocar as 3 bolas amarelas em 3 dos 5 lugares disponíveis (nos extremos ou entre duas bolas vermelhas).

↑ • ↑ • ↑ • ↑ • ↑

$$P = \frac{{}^5C_3}{{}^7C_3} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$$

35. Número de resultados possíveis:

$7 \times 2 \times {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2 = 14 \times 15 \times 6 \times 1 = 1260$

7 : Número de possibilidades de colocar as letras P e E juntas.

2 : As letras P e E podem aparecer de 2 maneiras (PE ou EP).

${}^6C_2$: Número de maneiras de colocar os dois A em 2 dos 6 lugares disponíveis.

${}^4C_2$: Número de maneiras de colocar os dois 5 em 2 dos 4 lugares disponíveis.

${}^2C_2$: Número de maneiras de colocar os dois 7 nos dois lugares disponíveis.

Número de resultados favoráveis: 1 (é a primeira tentativa)

$$P = \frac{1}{7 \times 2 \times {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2} = \frac{1}{1260}$$

Pág. 113

36.1. Número de resultados possíveis: 12

É o número de bolas no saco.

a) Número de resultados favoráveis: 2

É o número de bolas brancas com número par (2 e 4).

$$P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

b) Número de resultados favoráveis: 4

É o número de bolas pretas com número primo (2, 3, 5 e 7).

$$P = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

36.2. Número de resultados possíveis: ${}^{12}A'_2 = 12^2 = 144$

É o número de maneiras de tirar 2 das 12 bolas, repetidas ou não.

a) Número de resultados favoráveis:

${}^5A'_2 + {}^7A'_2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$

${}^5A'_2$: Número de maneiras de extrair 2 das 5 bolas brancas, repetidas ou não.

${}^7A'_2$: Número de maneiras de extrair 2 das 7 bolas pretas, repetidas ou não.

$$P = \frac{{}^5A'_2 + {}^7A'_2}{{}^{12}A'_2} = \frac{74}{144} = \frac{37}{72}$$

b) Número de resultados favoráveis:

$12 \times 1 = 12$

12 : Número de probabilidades de tirar a primeira bola.

1 : A segunda bola é igual à primeira.

$$P = \frac{12 \times 1}{{}^{12}A'_2} = \frac{12}{144} = \frac{1}{12}$$

c) Seja *A* o acontecimento assim definido:

A: "o produto dos números inscritos nas duas bolas é ímpar".

Número de resultados favoráveis a *A*:

Para que o produto dos números inscritos nas duas bolas seja ímpar, é necessário que os dois sejam ímpares.

Existem 7 bolas com número ímpar (3 brancas e 4 pretas).

${}^{34}A'_2 = {}^7A'_2 = 7^2 = 49$ (é o número de maneiras de escolher 2 das 7 bolas com número ímpar, repetidas ou não).

$$P(A) = \frac{{}^7A'_2}{{}^{12}A'} = \frac{49}{144}$$

O acontecimento "o produto dos números inscritos nas duas bolas é par" é o acontecimento contrário de *A*.

Então, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{49}{144} = \frac{95}{144}$

36.3. Número de resultados possíveis: ${}^{12}C_5 = 792$

É o número de maneiras de extrair 5 das 12 bolas do saco.

a) Número de resultados favoráveis:

${}^5C_5 + {}^7C_5 = 1 + 21 = 22$

${}^5C_5$: Número de maneiras de selecionar 5 bolas brancas.

${}^7C_5$: Número de maneiras de selecionar 5 das 7 bolas pretas.

$$P = \frac{{}^5C_5 + {}^7C_5}{{}^{12}C_5} = \frac{22}{792} = \frac{1}{36}$$

b) Número de resultados favoráveis: ${}^7C_5 = 21$

É o número de maneiras de selecionar 5 das 7 bolas com números ímpares inscritos.

MMA12DR © Porto Editora

$$P = \frac{{}^{7}C_5}{{}^{12}C_5} = \frac{21}{792} = \frac{7}{264}$$

c) Número de resultados favoráveis:

${}^{7}C_3 \times {}^{5}C_2 = 35 \times 10 = 350$

${}^{7}C_3$: Número de maneiras de selecionar 3 das bolas com número ímpar.

${}^{5}C_2$: Número de maneiras de selecionar 2 das 5 bolas com número par.

$$P = \frac{{}^{7}C_3 \times {}^{5}C_2}{{}^{12}C_5} = \frac{350}{792} = \frac{175}{396}$$

d) Número de resultados favoráveis:

Para que a soma dos 5 números seja um número par, ou os 5 números são pares, ou são 2 ímpares e 3 pares ou são 4 ímpares e 1 par.

${}^{5}C_5 + {}^{7}C_2 \times {}^{5}C_3 + {}^{7}C_4 \times {}^{5}C_1 =$

$= 1 + 21 \times 10 + 35 \times 5 = 386$

${}^{5}C_5$: Número de maneiras de selecionar as 5 bolas com número par.

${}^{7}C_2$: Número de maneiras de selecionar 2 das 7 bolas com número ímpar.

${}^{5}C_3$: Número de maneiras de selecionar 3 das 5 bolas com número par.

${}^{7}C_4$: Número de maneiras de selecionar 4 das 7 bolas com número ímpar

${}^{5}C_1$: Número de maneiras de selecionar 1 das 5 bolas com número par.

$$P = \frac{{}^{5}C_5 + {}^{7}C_2 \times {}^{5}C_3 + {}^{7}C_4 \times {}^{5}C_1}{{}^{12}C_5} = \frac{386}{792} = \frac{193}{396}$$

e) Para que seja extraída uma e uma só bola branca e duas e só duas bolas com o número par, temos que considerar duas situações: ou a bola branca é par ou é ímpar.

Número de resultados favoráveis:

$2 \times {}^{3}C_2 \times {}^{4}C_3 + 3 \times {}^{3}C_2 \times {}^{4}C_2 =$

$= 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 3 \times 6 = 78$

2 : Número de maneiras de selecionar 1 das 2 bolas brancas com número par.

${}^{3}C_1$: Número de maneiras de selecionar 1 das 3 bolas pretas com número par.

${}^{4}C_3$: Número de maneiras de selecionar 3 das 4 bolas pretas com número ímpar.

$2 \times {}^{3}C_2 \times {}^{4}C_3$: A bola branca tem número par.

3 : Número de maneiras de selecionar 1 das 3 bolas brancas com número ímpar.

${}^{3}C_2$: Número de maneiras de selecionar 2 das 3 bolas pretas com número par.

${}^{4}C_2$: Número de maneiras de selecionar 2 das 4 bolas pretas com número ímpar.

$3 \times {}^{3}C_2 \times {}^{4}C_2$: A bola branca tem número ímpar.

$$P = \frac{2 \times {}^{3}C_2 \times {}^{4}C_3 + 3 \times {}^{3}C_2 \times {}^{4}C_2}{{}^{12}C_5} = \frac{78}{792} = \frac{13}{132}$$

37. Número de resultados possíveis: ${}^{9}C_6 = 84$

É o número de maneiras de selecionar 6 das restantes 9 pessoas (excluindo o Pedro).

Número de resultados favoráveis:

${}^{2}C_2 \times {}^{7}C_4 = 1 \times 35 = 35$

${}^{2}C_2$: Número de maneiras de selecionar as duas pessoas ao lado do Pedro.

${}^{7}C_4$: Número de maneiras de selecionar 4 das restantes 7 pessoas (excluindo o Pedro e as duas pessoas ao lado dele).

$$P = \frac{{}^{2}C_2 \times {}^{7}C_4}{{}^{9}C_6} = \frac{35}{84} = \frac{5}{12}$$

38. Número de resultados possíveis:

${}^{24}C_8$: Número de maneiras de selecionar B dos 24 alunos para formar o 1.º grupo.

${}^{16}C_8$: Número de maneiras de selecionar 8 dos restantes 16 alunos para formar o 2.º grupo.

${}^{8}C_8$: Número de maneiras de selecionar os restantes 8 alunos para o 3.º grupo.

${}^{24}C_8 \times {}^{16}C_8 \times {}^{8}C_8$

Número de resultados favoráveis:

${}^{2}C_2 \times {}^{22}C_6 \times {}^{16}C_8 \times {}^{8}C_8 \times 3$

${}^{2}C_2$: Número de maneiras de selecionar os 2 irmãos para integrar o 1.º grupo.

${}^{22}C_6$: Número de maneiras de selecionar 6 dos restantes 22 alunos para completar o 1.º grupo.

${}^{16}C_8$: Número de maneiras de selecionar os restantes 8 alunos para formar o 2.º grupo.

${}^{8}C_8$: Número de maneiras de selecionar os restantes 8 alunos para formar o 3.º grupo.

3 : O João e o Pedro podem estar no 1.º, 2.º ou 3.º grupo.

$$P = \frac{{}^{2}C_2 \times {}^{22}C_8 \times \cancel{{}^{16}C_8} \times \cancel{{}^{8}C_8} \times 3}{{}^{12}C_5 \times \cancel{{}^{16}C_8} \times \cancel{{}^{8}C_8}} = \frac{1 \times 74\,613 \times 3}{735\,471} =$$

$$= \frac{223\,839}{735\,741} = \frac{7}{23}$$

Pág. 114

39.1. Número de resultados possíveis: ${}^{9}C_2 = 36$

É o número de maneiras de escolher 2 dos 9 vértices do sólido.

Número de resultados favoráveis: ${}^{4}C_2 = 6$

É o número de maneiras de escolher 2 dos 4 vértices que pertencem ao prisma e à pirâmide (D, E, F e G).

MMA12DR © Porto Editora

$$P = \frac{{}^4C_2}{{}^9C_2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

39.2. Número de resultados possíveis:

${}^7A'_9 = 7^9 = 40\,353\,607$

Cada face pode ser colorida com qualquer uma das 7 cores disponíveis.

Número de resultados favoráveis:

$4 \times {}^5C_2 \times P_6 = 4 \times 10 \times 6! = 40 \times 720 = 28\,800$

Número de maneiras de selecionar 1 das 4 faces triangulares para colorir de amarelo.

${}^5C_2$: Número de maneiras de selecionar 2 das 5 faces retangulares para colorir de amarelo.

P_6: Número de maneiras de colorir as 6 faces restantes com as restantes 6 cores sem as repetir.

$$P = \frac{4 \times {}^5C_2 \times P_6}{{}^7A'_9} = \frac{28\,800}{40\,353\,607} \approx 0,0007 = 0,07\%$$

40. Número de resultados possíveis: $10! = 3\,628\,800$

É o número de maneiras de selecionar ordenadamente as 10 pessoas para ocupar os 10 lugares disponíveis.

40.1. Número de resultados favoráveis:

$P_2 \times P_8 \times 7 = 2 \times 40\,320 \times 7 = 564\,480$

P_2: Número de maneiras de colocar ordenadamente a Laura e Leonor nos 2 lugares a elas destinados.

P_8: Número de maneiras de colocar ordenadamente as restantes 8 pessoas nos restantes 8 lugares.

Número de posições que a Laura e a Leonor podem ocupar (1.º e 4.º, 2.º e 5.º, 3.º e 6.º, 4.º e 7.º, 5.º e 8.º, 6.º e 9.º e 7.º e 10.º).

$$P = \frac{P_2 \times P_8 \times 7}{P_{10}} = \frac{564\,480}{3\,628\,800} = \frac{7}{45}$$

40.2. Número de resultados favoráveis:

$P_2 \times P_8 = 2 \times 40\,320 = 80\,640$

P_2: Número de maneiras de colocar ordenadamente a Laura e Leonor.

P_8: Número de maneiras de colocar ordenadamente 8 elementos (os restantes 7 amigos e o bloco construído pela Laura, a Leonor e o Pedro).

$$P = \frac{P_2 \times P_8}{P_{10}} = \frac{80\,640}{3\,628\,800} = \frac{1}{45}$$

41.1. Número de resultados possíveis: ${}^{10}C_6 = 210$

É o número de maneiras de selecionar 6 das 10 bolas do saco.

Número de resultados favoráveis:

${}^5C_2 \times {}^3C_2 \times {}^2C_2 = 10 \times 3 \times 1 = 30$

${}^5C_2$: Número de maneiras de selecionar 2 das 5 bolas azuis.

${}^3C_2$: Número de maneiras de selecionar 2 das 3 bolas vermelhas.

${}^2C_2$: Número de manerias de selecionar as 2 bolas cinzentas.

$$P = \frac{{}^5C_2 \times {}^3C_2 \times {}^2C_2}{{}^{10}C_6} = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}$$

41.2. Número de resultados possíveis:

${}^{10}A'_6 = 10^6 = 1\,000\,000$

É o número de maneiras de extrair 6 das 10 bolas do saco, repetidas ou não.

Número de resultados favoráveis:

${}^6C_2 \times {}^4C_2 \times {}^5A'_2 \times {}^3A'_2 \times {}^2A'_2 =$

$= 15 \times 6 \times 25 \times 9 \times 4 = 81\,000$

${}^6C_2$: Número de maneiras de escolher 2 das 6 posições disponíveis para colocar as 2 bolas azuis.

${}^4C_2$: Número de maneiras de escolher 2 das 4 posições disponíveis para colocar as 2 bolas vermelhas (as 2 bolas cinzentas ficarão nas posições que sobram).

${}^5A'_2$: Número de maneiras extrair 2 das 5 bolas azuis, repetidas ou não.

${}^3A'_2$: Número de maneiras de extrair 2 das 3 bolas vermelhas, repetidas ou não.

${}^2A'_2$: Número de maneiras de extrair 2 bolas cinzentas, repetidas ou não.

$$P = \frac{{}^6C_2 \times {}^4C_2 \times {}^5A'_2 \times {}^3A'_2 \times {}^2A'_2}{{}^{10}A'_2} =$$

$$= \frac{81\,000}{1\,000\,000} = \frac{81}{1000}$$

Pág. 115

42. $P(A) = 0,56$; $P(B) = 0,45$

$P(A \cup B) \leq 1 \Leftrightarrow 0,56 + 0,45 - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -P(A \cap B) \leq 1 - 1,01 \Leftrightarrow -P(A \cap B) \leq -0,01 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) \geq 0,01$

Para que um número seja múltiplo de 6, tem que ser par e múltiplo de 3.

$P(A \cap B)$ representa a probabilidade de o número ser par e múltiplo de 3, ou seja, a probabilidade de ser múltiplo de 6. Como esta probabilidade é superior a 0, existe pelo menos uma bola com um múltiplo de 6.

43. Número de resultados possíveis: ${}^nC_2$

É o número de maneiras de selecionar 2 dos n alunos da escola.

Número de resultados favoráveis: ${}^2C_1 \times {}^{n-2}C_1$

MMA12DR © Porto Editora

MMA12DR © Porto Editora

${}^{2}C_{1}$: Número de maneiras de escolher 1 dos 2 irmãos.

${}^{n-2}C_{1}$: Número de maneiras de escolher 1 dos restantes $n-2$ alunos (exclui-se o Rui e o irmão).

$$P=\frac{7}{30}\Leftrightarrow\frac{{}^{2}C_{1}\times{}^{n-2}C_{1}}{{}^{n}C_{2}}=\frac{7}{30}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\times(n-2)}{\frac{n!}{2!(n-2)!}}=\frac{7}{30}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\times2(n-2)\cancel{(n-2)!}}{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}=\frac{7}{30}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{4n-8}{n^2-n}=\frac{7}{30}\Leftrightarrow 120n-240=7n^2-7n\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7n^2-127n+240=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{127\pm97}{14}\Leftrightarrow n=\frac{15}{7}\vee n=16$$

Como $n\in\mathbb{N}$, $n=16$. O grupo tem 16 elementos.

44.1. Número de diagonais de um polígono:

${}^{n}C_{2}-n$

${}^{n}C_{2}$: Número de maneiras de selecionar 2 dos n vértices do polígono.

n: Número de lados do polígono (subtrai-se porque os lados do polígono não são diagonais do mesmo).

$${}^{n}C_{2}-n=\frac{n!}{2!(n-2)!}-n=\frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}}-n=$$

$$=\frac{n^2-n}{2}-n=\frac{n^2-n-2n}{2}=\frac{n^2-3n}{2}$$

44.2. Número de resultados possíveis: ${}^{n}C_{2}$

É o número de maneiras de selecionar 2 dos n vértices do polígono.

Número de resultados favoráveis: $\frac{n^2-3n}{2}$

(que é o número de diagonais do polígono).

$$P=\frac{8}{9}\Leftrightarrow\frac{\frac{n^2-3n}{2}}{{}^{n}C_{2}}=\frac{8}{9}\Leftrightarrow\frac{\frac{n^2-3n}{2}}{\frac{n!}{2(n-2)!}}=\frac{8}{9}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\cancel{2}\cancel{(n-2)!}(n^2-3n)}{\cancel{2}n(n-1)\cancel{(n-2)!}}=\frac{8}{9}\Leftrightarrow\frac{n^2-3n}{n^2-n}=\frac{8}{9}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9n^2-27n=8n^2-8n\Leftrightarrow n^2-19n=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(n-19)=0\Leftrightarrow n=0\vee n=19$$

Como $n\geq3$, $n=19$.

45. Número de resultados possíveis: ${}^{10}C_{5}=252$

É o número de maneiras de selecionar 5 dos 10 rapazes da turma par formar o 1.º grupo. O 2.º grupo fica com os 5 restantes.

Número de resultados favoráveis:

${}^{2}C_{2}\times{}^{8}C_{3}=1\times56\times2=112$

${}^{2}C_{2}$: Número de maneiras de escolher 2 irmãos para integrar o 1.º grupo.

${}^{8}C_{3}$: Número de maneiras de selecionar 3 dos restantes 8 rapazes da turma para completar o 1.º grupo.

2 : Os dois irmãos podem fazer parte do 1.º ou do 2.º grupo.

$$P=\frac{{}^{2}C_{2}\times{}^{8}C_{3}\times2}{{}^{10}C_{5}}=\frac{112}{252}=\frac{4}{9}$$

46. Número de resultados possíveis: ${}^{15}C_{5}=3003$

É o número de maneiras de selecionar 5 dos 15 bombons.

Número de resultados favoráveis:

Para que haja pelo menos um bombom de cada sabor, temos que considerar 2 situações ou há 3 bombons de 1 sabor e os outros 2 dos dois restantes sabores ou há 2 bombons de dois dos sabores e 1 do outro sabor.

No primeiro caso, os resultados favoráveis são:

$${}^{7}C_{3}\times{}^{5}C_{1}\times{}^{3}C_{1}+{}^{5}C_{3}\times{}^{7}C_{1}\times{}^{3}C_{1}+{}^{3}C_{3}\times{}^{7}C_{1}\times{}^{5}C_{3}=$$

$$=35\times5\times3+10\times7\times3+1\times7\times5=770$$

${}^{7}C_{3}$: Número de maneiras de escolher 3 dos 7 bombons de avelã.

${}^{5}C_{1}$: Número de maneiras do escolher 1 bombom dos 5 baunilha.

${}^{3}C_{1}$: Número de maneiras de escolher 1 bombom dos 3 elementos.

${}^{5}C_{3}$: Número de maneiras de escolher 3 dos 5 bombons de baunilha.

${}^{7}C_{1}$: Número de escolher 1 bombom dos 7 de avelã.

${}^{3}C_{3}$: Número de maneiras de escolher dos 3 de caramelo.

No segundo caso, o número de resultados favoráveis é dado por:

$${}^{7}C_{1}\times{}^{5}C_{2}\times{}^{3}C_{2}+{}^{5}C_{1}\times{}^{7}C_{2}\times{}^{3}C_{2}+{}^{3}C_{1}\times{}^{7}C_{1}\times{}^{5}C_{2}=$$

$$=7\times10\times3+5\times21\times3+3\times21\times10=1155$$

${}^{7}C_{1}$: Número de maneiras de escolher 1 dos 7 bombons de avelã.

${}^{5}C_{2}$: Número de maneiras do escolher 2 dos 5 bombons de baunilha.

${}^{3}C_{2}$: Número de maneiras de escolher 2 dos 3 bombom de caramelo.

${}^{5}C_{1}$: Número de maneiras de escolher 1 dos 5 bombons de baunilha.

${}^{7}C_{2}$: Número de escolher 2 dos 7 bombons de avelã.

${}^3C_1$: Número de maneiras de escolher 1 dos 3 de caramelo.
Número total de casos favoráveis:
$770+1155=1925$

$$P=\frac{1925}{3003}=\frac{25}{39}$$

Pág. 116

47.1.

	A	V	C	Total
I	3	2	2	7
$\bar{I}$	2	1	0	3
Total	5	3	2	10

47.2. a) $P(I\mid V)=\dfrac{P(I\cap V)}{P(V)}=\dfrac{\frac{2}{10}}{\frac{3}{10}}=\dfrac{2}{3}$

b) $P(\bar{I}\mid C)=\dfrac{P(\bar{I}\cap C)}{P(C)}=\dfrac{\frac{0}{10}}{\frac{2}{10}}=0$

c) $P(C\mid I)=\dfrac{P(C\cap I)}{P(I)}=\dfrac{\frac{2}{10}}{\frac{7}{10}}=\dfrac{2}{7}$

d) $P(A\mid I)=\dfrac{P(A\cap I)}{P(I)}=\dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{10}}=\dfrac{3}{7}$

e) $P(I\mid A)=\dfrac{P(I\cap A)}{P(A)}=\dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{5}{10}}=\dfrac{3}{5}$

f) $P(\bar{I}\mid \bar{A})=\dfrac{P(\bar{I}\cap \bar{A})}{P(\bar{A})}=\dfrac{\frac{1+0}{10}}{\frac{3+2}{10}}=\dfrac{1}{5}$

48.1. Sejam os acontecimentos:
E: "O participante é espanhol."
H: "O participante é homem."
Comecemos por organizar os dados numa tabela de contingência com contagens. Os dados estão colocados a vermelho.

	H	$\bar{H}$	Total
E	36	48	84
$\bar{E}$	36	32	68
Total	72	80	152

$152-84=68$; $68-32=36$; $72-36=36$
$84-36=48$; $152-72=80$

Pretendemos determinar $P(\bar{E})$.

$$P(\bar{E})=\frac{68}{152}=\frac{17}{38}$$

48.2. Pretendemos determinar $P(\bar{E}\mid\bar{H})$.

$$P(\bar{E}\mid\bar{H})=\frac{P(\bar{E}\cap\bar{H})}{P(\bar{H})}=\frac{\frac{32}{152}}{\frac{80}{152}}=\frac{32}{80}=\frac{2}{5}$$

Pág. 117

49.1. Pretendemos determinar $P(T)$.

$$P(T)=\frac{105}{140}=\frac{3}{4}=75\%$$

49.2. Pretendemos determinar $P(C)$.

$$P(C)=\frac{123}{140}\approx 0{,}878\,571\approx 88\%$$

49.3. Pretendemos determinar $P(D\mid T)$.

$$P(D\mid T)=\frac{P(D\cap T)}{P(T)}=\frac{\frac{12}{140}}{\frac{105}{140}}=\frac{12}{105}\approx 0{,}114\,29\approx 11\%$$

50. Comecemos por organizar os dados numa tabela de contingência com contagens. Os dados estão colocados a vermelho.

	B	$\bar{B}$	Total
A	8	7	15
$\bar{A}$	6	3	9
Total	14	10	152

$14-6=8$; $8+7=15$; $10-7=3$; $6+3=9$

50.1. $P(A)=\dfrac{15}{24}=\dfrac{5}{8}$

50.2. $P(B)=\dfrac{14}{24}=\dfrac{7}{12}$

50.3. $P(A\cap B)=\dfrac{8}{24}=\dfrac{1}{3}$

50.4. $P(\bar{A}\cap B)=\dfrac{6}{24}=\dfrac{1}{4}$

50.5. $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{12}}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{12}{7}=\dfrac{12}{21}=\dfrac{4}{7}$

50.6. $P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{8}}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{8}{5}=\dfrac{8}{15}$

50.7. $P(\bar{A}\mid\bar{B})=\dfrac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\dfrac{\frac{3}{24}}{\frac{5}{12}}=\dfrac{3}{24}\times\dfrac{12}{5}=\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$

Cálculos auxiliares: $P(\bar{B})=1-P(B)=1-\dfrac{7}{12}=\dfrac{5}{12}$

MMA12DR © Porto Editora

50.8. $P(\bar{B}\mid\bar{A})=\dfrac{P(\bar{B}\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}=\dfrac{\frac{3}{24}}{\frac{3}{8}}=\dfrac{\cancel{3}}{24}\times\dfrac{8}{\cancel{3}}=\dfrac{8}{24}=\dfrac{1}{3}$

Cálculos auxiliares:

$P(\bar{A})=1-P(A)=1-\dfrac{5}{8}=\dfrac{3}{8}$

Pág. 118

51. $P(A\mid B)\times P(B)+P(\bar{B})-P(\overline{A\cup B})=P(A)$

$P(A\mid B)\times P(B)+P(\bar{B})-P(\overline{A\cup B})=$

$=P(A\cap B)+P(\bar{B})-\left[1-P(\overline{A\cup B})\right]=$

$=P(A\cap B)+\cancel{1}-P(B)-\cancel{1}+P(A\cup B)=$

$=\cancel{P(A\cap B)}-\cancel{P(B)}+P(A)+$

$+\cancel{P(B)}-\cancel{P(A\cap B)}=P(A)$

52. $P(A\mid B)=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=\dfrac{1}{3}\times P(B)\Leftrightarrow P(A\cap B)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{10}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=\dfrac{1}{10}$

$P(\overline{A\cup B})=\dfrac{3}{5}\Leftrightarrow 1-P(A\cap B)=\dfrac{3}{5}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=1-\dfrac{3}{5}\Leftrightarrow P(A\cap B)=\dfrac{2}{5}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{2}{5}=P(A)+\dfrac{3}{10}-\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow P(A)=\dfrac{2}{5}-\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A)=\dfrac{2}{10}\Leftrightarrow P(A)=\dfrac{1}{5}$

Opção (B)

Pág. 119

53. Consideremos os acontecimentos:
F: "O bombom tem recheio de fruta."
C: "O bombom tem recheio de café."
Sabe-se que:

$P(F)=\dfrac{2}{5}\ ;\ P(C)=\dfrac{1}{4}\ ;\ P(F\cap C)=\dfrac{3}{20}$

Vamos resolver o problema utilizando uma tabela de contingência (os dados do problema estão a cor vermelha).

	F	$\bar{F}$	Total
C	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$
$\bar{C}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
Total	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

$P(C\cap\bar{F})=\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{20}=\dfrac{1}{10}$

$P(\bar{C})=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

$P(\bar{C}\cap F)=\dfrac{2}{5}-\dfrac{3}{20}=\dfrac{1}{4}$

$P(\bar{F})=1-\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5}$

$P(\bar{C}\cap\bar{F})=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$

53.1. Pretende-se determinar $P(C\mid\bar{F})$.

$P(C\mid\bar{F})=\dfrac{P(C\cap\bar{F})}{P(\bar{F})}=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{5}{30}=\dfrac{1}{6}$

53.2. Pretende-se determinar $P(F\mid\bar{C})$.

$P(F\mid\bar{C})=\dfrac{P(F\cap\bar{C})}{P(\bar{C})}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{1}{3}$

53.3. Pretende-se determinar $P(\bar{F}\cap\bar{C})$.

$P(\bar{F}\cap\bar{C})=\dfrac{1}{2}$

54. Consideremos os acontecimentos:
C: "Dia de chuva."
A:" Semáforo avariado."

Sabe-se que: $P(C)=\dfrac{7}{20}\ ;\ P(A\mid C)=\dfrac{1}{7}$

Pretendemos determinar $P(\bar{A}\mid C)$.

$P(\bar{A}\mid C)=1-P(A\mid C)=1-\dfrac{1}{7}=\dfrac{6}{7}$

55. Consideramos os acontecimentos:
C: "A flor é um cravo."
V: "A flor é vermelha."
Sabemos que:

$P(\bar{C})=P(C)=50\%=0{,}5$

$P(V)=60\%=0{,}6$

$P(V\mid\bar{C})=40\%\Leftrightarrow\dfrac{P(V\cap\bar{C})}{P(\bar{C})}=0{,}4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(V\mid\bar{C})=0{,}4\times 0{,}5\Leftrightarrow P(V\cap\bar{C})=0{,}2$

Vamos resolver o problema utilizando uma tabela de contingência (os dados do problema estão a cor vermelha).

	V	$\bar{V}$	Total
C	0,4	0,1	0,5
$\bar{C}$	0,2	0,3	0,5
Total	0,6	0,4	1

MMA12DR © Porto Editora

$P(C \cap V) = 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}4$

$P(C \cap \overline{V}) = 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}1$

$P(\overline{C} \cap \overline{V}) = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$

$P(\overline{V}) = 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4$

55.1. Pretendemos determinar $P(C \cap V)$.

$$P(C \cap V) = 0{,}4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

55.2. Pretendemos determinar $P(\overline{C} \mid \overline{V})$.

$$P(\overline{C} \mid \overline{V}) = \frac{P(\overline{C} \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = \frac{3}{4}$$

56. Consideramos os acontecimentos:
H: "O aluno é rapaz."
M: "O aluno é rapariga."
A: "O aluno pertenceu à turma *A*".
B: "O aluno pertenceu à turma *B*".
Vamos organizar os dados numa tabela:

	H	*M*	Total
A	8	16	24
B	15	15	30
Total	23	31	54

$15 + 15 = 30$; $24 + 30 = 54$; $15 + 16 = 31$
$54 - 31 = 23$; $23 - 15 = 8$

Pretendemos determinar $P(A \mid M)$.

$$P(A \mid M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{16}{54}}{\frac{31}{54}} = \frac{16}{31}$$

57. Consideremos os acontecimentos:
C: "O turista selecionou a canoa."
L: "O turista selecionou a lancha."
T: "O turista selecionou o catamarã."
I: "O turista escolheu inglês."
A: "O turista escolheu alemão."
Sabe-se que:

$P(C) = 50\%$; $P(L) = 40\%$; $P(T) = 10\%$;

$P(C \cap I) = 15\%$; $P(L \cap A) = 8\%$; $P(T \cap A) = 5\%$

Vamos construir uma tabela de contingência com percentagens.

	C	*L*	*T*	Total
I	35%	32%	5%	72%
A	15%	8%	5%	28%
Total	50%	40%	10%	100%

$15 + 8 + 5 = 28$; $100 - 28 = 72$; $50 - 15 = 35$

$40 - 8 = 32$; $10 - 5 = 5$; $35 + 32 + 5 = 72$

57.1. Pretendemos determinar $P(I)$.

$P(I) = 72\%$

57.2. Pretendemos determinar $P(C \mid I)$.

$$P(C \mid I) = \frac{P(C \cap I)}{P(I)} = \frac{35\%}{72\%} = \frac{35}{72}$$

58. Consideremos os acontecimentos:
A: "O sócio votou na lista *A*."
B: "O sócio votou na lista *B*."
C: "O sócio absteve-se."
D: "O sócio tem menos de 40 anos."
$\overline{D}$: "O sócio tem 40 anos ou mais."
Sabe-se que:

$P(A) = 35\% = 0{,}35$

$P(B) = 40\% = 0{,}4$

$P(C) = 25\% = 0{,}25$

$$P(D \mid A) = 20\% \Leftrightarrow \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = 0{,}2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(D \cap A) = 0{,}2 \times 0{,}35 \Leftrightarrow P(D \cap A) = 0{,}07$$

$$P(D \mid B) = 30\% \Leftrightarrow \frac{P(D \cap B)}{P(B)} = 0{,}3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(D \cap B) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$$

$$P(D \mid C) = 15\% \Leftrightarrow \frac{P(D \cap C)}{P(C)} = 0{,}15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(D \cap C) = 0{,}15 \times 0{,}25 = 0{,}0375$$

Vamos organizar os dados numa tabela de contingência.

	A	*B*	*C*	Total
D	0,07	0,12	0,0375	0,2275
$\overline{D}$	0,28	0,28	0,2125	0,7725
Total	0,35	0,4	0,	1

$P(D) = 0{,}07 + 0{,}12 + 0{,}0375 = 0{,}2275$

$P(\overline{D}) = 1 - 0{,}2275 = 0{,}7725$

$P(A \cap \overline{D}) = 0{,}35 - 0{,}07 = 0{,}28$

$P(B \cap \overline{D}) = 0{,}4 - 0{,}12 = 0{,}28$

$P(C \cap \overline{D}) = 0{,}25 - 0{,}0375 = 0{,}2125$

58.1. Pretendemos determinar $P(D)$.

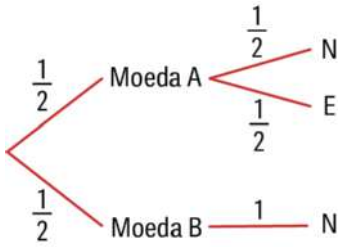
$P(D) = 0{,}2275 \approx 22{,}8\%$

58.2. Pretendemos determinar $P(A \mid \overline{D})$.

$$P(A \mid \overline{D}) = \frac{P(A \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0{,}28}{0{,}7725} \approx 0{,}362 = 36{,}2\%$$

MMA12DR © Porto Editora

59.



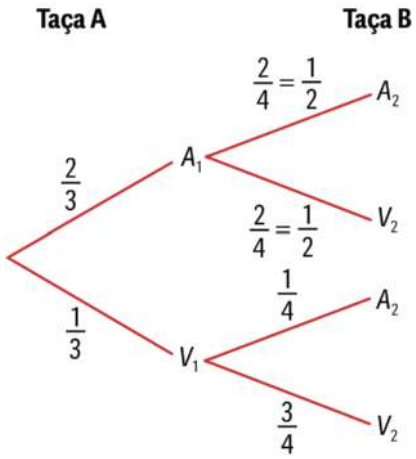
$$P(B\mid N)=\frac{P(B\cap N)}{P(N)}=\frac{\frac{1}{2}\times 1}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 1}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{3}{2}$$

A probabilidade de ter lançado a moeda viciada é $\frac{2}{3}$.

Pág. 121

60.



60.1. $P(A_1\cap A_2)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

60.2. $P(A_2\mid V_1)=\frac{1}{4}$

60.3. $P(A_2\mid A_1)=\frac{1}{2}$

61. Consideremos os acontecimentos:
A: "O grafo foi produzido pela máquina".
B: "O grafo foi produzido pela máquina *B*".
C: "O grafo foi produzido pela máquina *C*".
D: "O grafo é defeituoso".
Sabe-se que:

$P(A)=60\%=0,6$

$P(\bar{D}\mid A)=99\%=0,99$

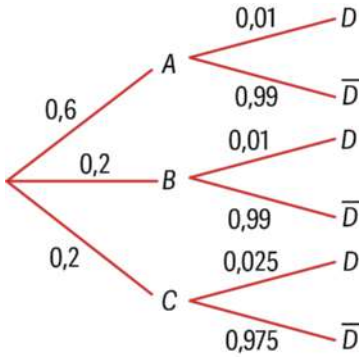
$P(B)=\frac{1-0,6}{2}=0,2$

$P(C)=0,2$

$P(\bar{D}\mid B)=0,99$

$P(D\mid C)=2,5\%=0,025$

Vamos construir uma árvore de probabilidade:



61.1. $P(D)=0,6\times 0,01+0,2\times 0,01+0,2\times 0,025=$

$=0,006+0,002+0,005=0,013=1,3\%$

61.2. $P(B\mid D)=\frac{P(B\cap D)}{P(B)}=\frac{0,2\times 0,01}{0,013}=\frac{0,002}{0,013}=\frac{2}{13}$

62. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\Leftrightarrow \frac{2}{5}=\frac{3}{5}+\frac{1}{2}-P(A\cap B)$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{3}{5}+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{7}{10}$

$P(A)\times P(B)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$

Como $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$, os acontecimentos *A* e *B* não são independentes.

63. $P(A)\times\left[5P(B\mid A)+1\right]=P(A\cup B)$

$\Leftrightarrow P(A)\times\left[5\frac{P(A\cap B)}{P(A)}+1\right]=$

$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\underset{(P(A)\neq 0)}{\Leftrightarrow}\frac{5\cancel{P(A)}P(A\cap B)}{\cancel{P(A)}}+\cancel{P(A)}=$

$=\cancel{P(A)}+P(B)-P(A\cap B)$

$\Leftrightarrow 5P(A\cap B)+P(A\cap B)=P(B)$

$\Leftrightarrow 6P(A\cap B)=P(B)$

$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\cancel{P(A\cap B)}}{6\cancel{P(A\cap B)}}=\frac{1}{6}$

Opção (D)

MMA12DR © Porto Editora

Pág. 122

64. Sabe-se que:

$A=\{2,4,6\};\ P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$B=\{3,6\};\ P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$C=\{2,3,5\};\ P(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

64.1. $A\cap B=\{6\};\ P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$P(A)\times P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

Como $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$, os acontecimentos A e B são independentes.

64.2. $A\cap C=\{2\};\ P(A\cap C)=\frac{1}{6}$

$P(A)\times P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

Como $P(A\cap C)\neq P(A)\times P(C)$, os acontecimentos A e C não são independentes.

64.3. $B\cap C=\{3\}\ ;\ P(B\cap C)=\frac{1}{6}$

$P(B)\times P(C)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

Como $P(B\cap C)=P(B)\times P(C)$, os acontecimentos B e C são independentes.

65. Consideremos os acontecimentos:
A: "A leitura da matrícula foi efetuada pelo pórtico A."
B: "A leitura da matrícula foi efetuada pelo pórtico B."
C: "A leitura da matrícula foi efetuada pelo pórtico C."
F: "Ocorreu uma falha na leitura da matrícula."
$\overline{F}$: "A matrícula foi lida corretamente."
Sabe-se que:

$P(A)=40\%=0,40\ ;\ P(B)=35\%=0,35$

$P(C)=100\%-40\%-35\%=25\%=0,25$

$P(F\mid A)=3\%=0,03\ ;\ P(F\mid B)=2\%=0,02$

$P(F\mid C)=1\%=0,01$

65.1. Pretendemos determinar $P(F)$.

$P(F)=P(F\cap A)+P(F\cap B)+P(F\cap C)$

$=P(A)\times P(F\mid A)+P(B)\times P(F\mid B)+$

$+P(C)\times P(F\mid C)$

$=0,4\times0,03+0,35\times0,02+0,25\times0,01$

$=0,012+0,007+0,0025$

$=0,0215=2,15\%$

A probabilidade de a matrícula não ter sido lida corretamente é de 0,0215, ou seja, 2,15%.

65.2. Pretendemos determinar $P(B\mid\overline{F})$.

$P(\overline{F})=1-P(F)=1-0,0215=0,9785$

$P(B\cap\overline{F})=$
$=P(B)\times P(\overline{F}\mid B)=$
$=0,35\times0,98=0,343$

$P(F\mid B)=0,02$
$P(\overline{F}\mid B)=1-0,02=$
$=0,98$

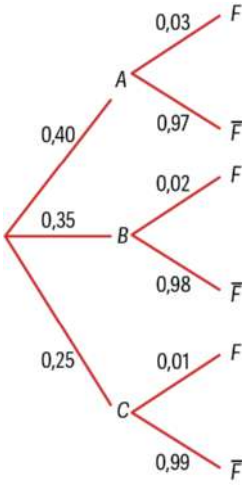
$P(B\mid\overline{F})=\frac{P(B\cap\overline{F})}{P(\overline{F})}=\frac{0,343}{0,9785}$

$\approx0,3505\approx35\%$

A probabilidade de a passagem ter sido registada no pórtico B, sabendo que a matrícula foi lida corretamente foi de, aproximadamente, 35%.

Outro modo:

65.



Cálculo auxiliar:
$P(C)=1-0,4-0,35=0,25$
$P(\overline{F}\mid A)=1-0,03=0,97$
$P(\overline{F}\mid B)=1-0,02=0,98$
$P(\overline{F}\mid C)=1-0,01=0,99$

65.1. Pretendemos determinar $P(F)$.

$P(F)=$
$=P(A)\times P(F\mid A)+P(B)\times P(F\mid B)+$
$+P(C)\times P(F\mid C)$
$=0,4\times0,03+0,35\times0,02+0,25\times0,01$
$=0,012+0,007+0,0025$
$=0,0215=2,15\%$

A probabilidade de a matrícula não ter sido lida corretamente é de 0,0215, ou seja, 2,15%.

65.2. Pretendemos determinar $P(B\mid\overline{F})$.

$P(B\mid\overline{F})=\frac{P(B\cap\overline{F})}{P(\overline{F})}=\frac{0,35\times0,98}{1-0,0215}$

$\approx0,3505\approx35\%$

A probabilidade de a passagem ter sido registada no pórtico B, sabendo que a matrícula foi lida corretamente foi de, aproximadamente, 35%.

66. Consideremos os acontecimentos:
T: "O aluno desloca-se em transportes públicos."
C: "O aluno almoça na cantina."

MMA12DR © Porto Editora

Sabe-se que:

$P(T \cup C) = \frac{1}{2}$; $P(C) = \frac{2}{5}$; $P(T) = \frac{1}{3}$

Pretendemos determinar $P(T \mid C)$.

C.A.

$P(T \cup C) = P(T) + P(C) - P(T \cap C)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - P(T \cap C)$

$\Leftrightarrow P(T \cap C) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow P(T \cap C) = \frac{7}{30}$

$P(T \mid C) = \frac{P(T \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{7}{30}}{\frac{2}{5}} = \frac{7}{30} \times \frac{5}{2} = \frac{7}{12}$

Opção (D)

Pág. 124

67. $8 \times 8 \times 8 = 8^3 = 512$

Número de resultados possíveis: 512

67.1. Número de resultados favoráveis:

$6 \times {}^4A_3 = 6 \times 24 = 512$

em que:

6 : número de faces do cubo

${}^4A_3$: número de maneiras de escolher ordenadamente 3 vértices dos 4 que cada face contém.

$P(T) = \frac{6 \times {}^4A_3}{512} = \frac{6 \times 24}{512} = \frac{9}{32}$

67.2. Número de resultados possíveis para o 3.º lançamento: 8

Número de resultados favoráveis para o 3.º lançamento: 4 (os vértices C, D, F e G)

$P = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

68. Consideremos os acontecimentos:

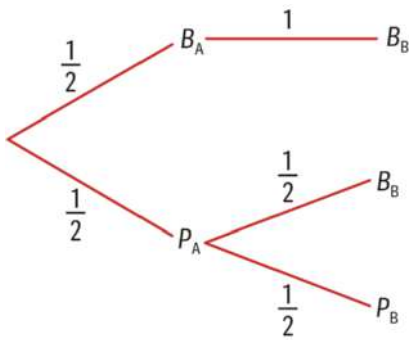
B_A : "A bola retirada da caixa A é branca."

P_A : "A bola retirada da caixa A é preta."

B_B : "A bola retirada da caixa B é branca."

P_B : "A bola retirada da caixa B é preta."

Vamos construir a árvore de probabilidade:



Pretendemos determinar $P(B_A \mid B_B)$.

$P(B_A \mid B_B) = \frac{P(B_A \cap B_B)}{P(B_B)}$

$= \frac{\frac{1}{2} \times 1}{\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$

A probabilidade de a bola retirada da caixa A ser branca é $\frac{2}{3}$.

69. Consideremos os acontecimentos:

X: "O aluno é membro do clube do xadrez."

F: "O aluno é membro do clube de fotografia."

Sabe-se que:

$P(X) = 4\% = 0,04$

$P(F \mid X) = 25\% = 0,25 \Leftrightarrow \frac{P(F \cap X)}{P(X)} = 0,25$

$\Leftrightarrow P(F \cap X) = 0,25 \times 0,04$

$\Leftrightarrow P(F \cap X) = 0,01$

$P(X \cup F) = 6\% = 0,06$

69.1. Pretendemos determinar $P(F)$.

$P(X \cup F) = P(X) + P(F) - P(X \cap F)$

$\Leftrightarrow 0,06 = 0,04 + P(F) - 0,01$

$\Leftrightarrow P(F) = 0,06 - 0,04 + 0,01$

$\Leftrightarrow P(F) = 0,03$

69.2. Pretendemos determinar $P(\overline{X} \mid F)$.

$P(\overline{X} \mid F) = \frac{P(\overline{X} \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F) - P(X \cap F)}{P(F)} =$

$= \frac{0,03 - 0,01}{0,03} = \frac{0,02}{0,03} = \frac{2}{3}$

70. Número de resultados possíveis: ${}^7C_3 = 35$

Número de resultados favoráveis ao acontecimento *A*: ${}^6C_2 = 15$ (uma das bolas tem de ser o 0).

Em que: ${}^6C_2$ representa o número de maneiras de escolher duas bolas entre 1, 2, 3, 4, 5 e 6

Número de resultados favoráveis ao acontecimento *B*: 2 (0+1+4; 0+2+3)

Número de resultados favoráveis ao acontecimento $A \cap B$: 2

$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{35}}{\frac{15}{35}} = \frac{2}{15}$

Opção (A)

MMA12DR © Porto Editora

Pág. 125

71. Consideremos os acontecimentos:
E: "O aluno tem experiência em cozinha."
I: "O aluno está inscrito em cozinha italiana."
Sabe-se que:

$P(E)=2P(I)$

$P(E\mid I)=\frac{1}{4}=0,25$

$P(\overline{I}\mid\overline{E})=40\%=0,4$

Pretendemos determinar $P(I)$.

Seja $P(I)=x$

$P(E\mid I)=0,25\Leftrightarrow P(E\cap I)=P(E\mid I)\times P(I)$

$\Leftrightarrow P(E\cap I)=0,25x$

$P(\overline{I}\mid\overline{E})=0,4\Leftrightarrow P(\overline{I}\cap\overline{E})=P(\overline{I}\mid\overline{E})\times P(\overline{E})$

$\Leftrightarrow P(\overline{I}\cap\overline{E})=0,4(1-2x)$

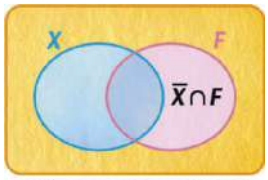
$\Leftrightarrow P(\overline{I}\cap\overline{E})=0,4-0,8x$

Note-se que:

$P(E)=2P(I)$

$P(E)=2x$

$P(\overline{E})=1-2x$



$P(\overline{X}\cap F)=P(F)-P(X\cap F)$

	E	$\overline{E}$	Total
I	$0,25x$		x
$\overline{I}$		$0,4-0,8x$	
Total	$2x$	$1-2x$	1

$P(I\cap\overline{E})=P(\overline{E})-P(\overline{I}\cap\overline{E})$

$P(I\cap\overline{E})=1-2x-(0,4-0,8x)$

$=1-2x-0,4+0,8x=0,6-1,2x$

$P(I\cap\overline{E})=P(I)-P(I\cap E)$

$P(I\cap\overline{E})=x-0,25x=0,75x$

$0,75x=0,6-1,2x\Leftrightarrow 0,75x+1,2x=0,6$

$\Leftrightarrow 1,95x=0,6\Leftrightarrow x=\frac{0,6}{1,95}=\frac{60}{195}=\frac{4}{13}$

$P(I)=\frac{4}{13}$

A probabilidade de o aluno estar inscrito na cozinha italiana é $\frac{4}{13}$.

Pág. 126

72. Consideremos os acontecimentos:
C: "O elemento do grupo gostava do prato de carne."
F: "O elemento do grupo gostava do prato de peixe."
Sabe-se que:

$P(C)=2P(F)\ ;\ P(C\cup F)=3P(C\cap F)$

Seja $P(F)=x\ ;\ P(C)=2x$

$P(F\cup C)=3P(F\cap C)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(F)+P(C)-P(F\cap C)=3P(F\cap C)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2x=4P(F\cap C)\Leftrightarrow 3x=4P(F\cap C)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(F\cap C)=\frac{3x}{4}$

72.1. Pretendemos determinar $P(\overline{C}\mid F)$.

$$P(\overline{C}\mid F)=\frac{P(\overline{C}\cap F)}{P(F)}=\frac{P(F)-P(C\cap F)}{P(F)}$$

$$=\frac{x-\frac{3}{4}x}{x}=\frac{\frac{1}{4}\cancel{x}}{\cancel{x}}\underset{(x>0)}{=}\frac{1}{4}$$

72.2. Pretendemos determinar $P(\overline{F}\mid C)$.

$$P(\overline{F}\mid C)=\frac{P(\overline{F}\cap C)}{P(C)}=\frac{P(C)-P(F\cap C)}{P(C)}$$

$$=\frac{2x-\frac{3}{4}x}{2x}=\frac{\frac{5}{4}\cancel{x}}{2\cancel{x}}\underset{(x>0)}{=}\frac{5}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$$

73. Consideremos os acontecimentos:
B: "O turista visitou o palácio da Bolsa."
E: "O turista visitou a estação de S. Bento."
Sabe-se que:

$P(B\cap\overline{E})=\frac{1}{5}\Leftrightarrow P(B)-P(E\cap B)=\frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow P(E\cap B)=P(B)-\frac{1}{5}$ (1)

$P(E)=\frac{3}{5}$

$P(E\mid B)=40\%=\frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow P(E\cap B)=P(E\mid B)\times P(B)$

$\Leftrightarrow P(E\cap B)=\frac{2}{5}P(B)$ (2)

De (1) e (2) vem:

$P(B)-\frac{1}{5}=\frac{2}{5}P(B)\Leftrightarrow P(B)-\frac{2}{5}P(B)=\frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow\frac{3}{5}P(B)=\frac{1}{5}\Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{5}\times\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$

Pretendemos determinar $P(E\mid\overline{B})$.

$$P(E\mid\overline{B})=\frac{P(E\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(E)-P(E\cap B)}{P(\overline{B})}=$$

$$=\frac{\frac{3}{5}-\frac{2}{15}}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{7}{15}}{\frac{2}{3}}=\frac{7}{15}\times\frac{3}{2}=\ =\frac{21}{30}=\frac{7}{10}$$

MMA12DR © Porto Editora

C.A.

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$P(E \cap B) = \frac{2}{5} P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$

74. $P(\overline{A \cup B}) = 4P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 4P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 4P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 4P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow 1 - P(A) - P(B) = 3P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow 1 - P(B) - P(A) = 3P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow P(\overline{B}) - P(A) = 3P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow 2P(A) - P(A) = 3P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow P(A) = 3P(A \cap B)$

$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \underset{(P(A \cap B) > 0)}{=} \frac{P(A \cap B)}{3P(A \cap B)} = \frac{1}{3}$

Pág. 127

75. Sabe-se que:

$P(A) = P(B)$ (A e B equiprováveis)

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ (A e B independentes)

$P(A) = \frac{2}{3}$

$P(A \mid (A \cup B)) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} =$ | $P(A \cap (A \cup B)) = P(A)$ porque $A \subset (A \cup B)$.

$= \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3} \times \frac{9}{8} = = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

C.A.

$P(A \cap B) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$

76. Consideremos os acontecimentos:

C: "O jovem está inscrito em capoeira."

$\overline{C}$: "O jovem está inscrito em danças latinas."

H: "O jovem inscrito é rapaz."

$\overline{H}$: "O jovem inscrito é rapariga."

Sabe-se que:

- $P(H) = \frac{2}{3} P(\overline{C})$
- $P(C \mid H) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(C \cap H) = P(C \mid H) \times P(H)$

$\Leftrightarrow P(C \cap H) = \frac{1}{3} P(H)$

- $P(\overline{C} \mid \overline{H}) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow P(\overline{C} \cap \overline{H}) = P(\overline{C} \mid \overline{H}) \times P(\overline{H})$

$\Leftrightarrow P(\overline{C} \cap \overline{H}) = \frac{5}{6} P(\overline{H})$

Pretende-se determinar $P(\overline{C})$.

Seja $P(H) = x$ e $P(\overline{H}) = 1 - x$

	C	$\overline{C}$	Total
H	$\frac{1}{3}x$	$\frac{2}{3}x$	x
$\overline{H}$		$\frac{5}{6} - \frac{5}{6}x$	$1 - x$
Total		$\frac{3}{2}x$ ou $\frac{5}{6} - \frac{1}{6}x$	1

$P(H \cap \overline{C}) = x - \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}x$

$P(\overline{C} \cap \overline{H}) = \frac{5}{6} P(\overline{H}) = \frac{5}{6}(1 - x) = \frac{5}{6} - \frac{5}{6}x$

$P(\overline{C}) = \frac{2}{3}x + \frac{5}{6} - \frac{5}{6}x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}x$

$P(H) = \frac{2}{3} P(\overline{C}) \Leftrightarrow 3P(H) = 2P(\overline{C})$

$\Leftrightarrow 3x = 2P(\overline{C}) \Leftrightarrow P(\overline{C}) = \frac{3}{2}x$

$\frac{3}{2}x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}x \Leftrightarrow \frac{3}{2}x + \frac{1}{6}x = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{5}{3}x = \frac{5}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\cancel{5}}{6} \times \frac{3}{\cancel{5}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$P(\overline{C}) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

A probabilidade de o jovem estar inscrito em danças latinas é $\frac{3}{4}$.

77. Consideremos os acontecimentos:

B: "A bola é branca."

N: "A bola é numerada."

Seja x o número de bolas contidas no saco.

Sabe-se que:

$P(B) = \frac{20}{x}$; $P(B \cap N) = \frac{5}{x}$; $P(B \cap N) = \frac{1}{6}$

$\frac{5}{x} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = 30$

O saco contém 30 bolas.

Como existem 20 bolas brancas, o número de bolas pretas que estão no saco é 10.

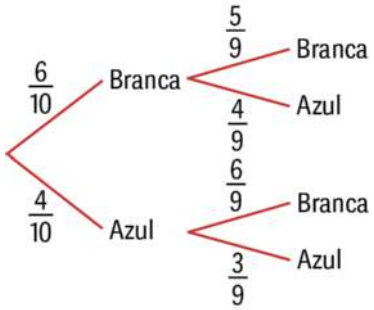
78. 4 bolas azuis

6 bolas brancas

Total: 10 bolas

MMA12DR © Porto Editora

78.1. Vamos construir uma árvore de probabilidade:



$P(A|B)$ representa a probabilidade da primeira bola extraída ser branca, sabendo que as duas bolas extraídas são da mesma cor.

$P(A \cap B)$ representa a probabilidade de a primeira bola extraída ser branca e as duas bolas extraídas serem da mesma cor, isto é, representa a probabilidade de as duas bolas extraídas serem brancas.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = = \frac{\frac{6}{10} \times \frac{5}{9}}{\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9}} = \frac{5}{7}$$

78.2. $4 + n$ bolas azuis; 6 bolas brancas

Total: $4 + n + 6 = 10 + n$

$$P(\text{as duas bolas serem brancas}) =$$

$$= \frac{6}{10+n} \times \frac{5}{9+n} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{30}{(10+n)(9+n)} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{30}{90+10n+9n+n^2} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{30}{90+19n+n^2} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 19n + 90 = 240 \Leftrightarrow n^2 + 19n - 150 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-19 \pm \sqrt{19^2 - 4 \times 1 \times (-150)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-19 \pm \sqrt{961}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{-19 \pm 31}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = -25 \vee n = 6$$

Como $n > 0$, $n = 6$.

Pág. 128

79. Como X é o número de vezes que saiu o número 1 quando se lança o dado duas vezes, a variável X pode tomar os valores 0, 1 e 2.

. $X = 0$ ocorre quando não sai o número 1 em nenhum dos lançamentos.

$$P(X=0) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

. $X = 1$ ocorre quando sai o número 1 num só lançamento.

$$P(X=1) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

. $X = 2$ ocorre quando sai o número 1 nos dois lançamentos.

$$P(X=2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

A tabela de distribuição de probabilidade da variável X é a seguinte:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$

$$\mu_X = \frac{9}{16} \times 0 + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{1}{16} \times 2 = \frac{3}{8} + \frac{2}{16} = \frac{1}{2}$$

80.1. Como X é o número de vezes que a roleta para no setor branco quando a roleta é rodada 3 vezes, a variável X pode tomar os valores 0, 1, 2 e 3.

. $X = 0$ ocorre quando a roleta nunca para no setor branco, quando é rodada 3 vezes.

$$P(X=0) = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

. $X = 1$ ocorre quando a roleta para apenas uma vez no setor branco, quando é rodada 3 vezes.

BCC; CBC; CCB, onde B é branco e C é outra cor.

$$P(X=1) = \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{6}$$

$$= 3 \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{96}{216} = \frac{4}{9}$$

. $X = 2$ ocorre quando a roleta para duas vezes no setor branco, quando é rodada 3 vezes.

BBC; BCB; CBB

$$P(X=2) = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6}$$

$$= 3 \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{48}{216} = \frac{2}{9}$$

. $X = 3$ ocorre quando a roleta para no setor branco, quando é rodada 3 vezes.

$$P(X=3) = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{8}{216} = \frac{1}{27}$$

A tabela de distribuição de probabilidade da variável X é a seguinte:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

80.2. $\mu_X = \frac{8}{27} \times 0 + \frac{4}{9} \times 1 + \frac{2}{9} \times 2 + \frac{1}{27} \times 3 = 1$

$$\sigma_x^2 = \frac{8}{27}(0-1)^2 + \frac{4}{9}(1-1)^2 + \frac{2}{9}(2-1)^2 + \frac{1}{27}(3-1)^2$$

$$= \frac{8}{27} + 0 + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}82$$

O valor médio é 1 e o desvio-padrão é 0,82, aproximadamente.

MMA12DR © Porto Editora

81.1. a) $\mu_x = 0,3\times(-1)+0,1\times 0+0,2\times 1+0,3\times 2+0,1\times 3$

$= -0,3+0,2+0,6+0,3 = 0,8$

O valor médio é 0,8.

b)

$\sigma_x^2 = 0,3(-1-0,8)^2+0,1(0-0,8)^2+0,2(1-0,8)^2+$

$+0,3(2-0,8)^2+0,1(3-0,8)^2 = 1,96$

$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{1,96} = 1,4$

O desvio-padrão é 1,4.

81.2.



82. 0 0 0 1 1 −1

Consideremos a tabela de dupla entrada:

2.º Lançamento

1.º Lançamento	×	−1	0	0	0	1	1
	−1	1	0	0	0	−1	−1
	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0
	1	−1	0	0	0	1	1
	1	−1	0	0	0	1	1

Como X é o produto dos números saídos nos dois lançamentos, a variável X pode tomar os valores -1, 0 e 1.

$P(X=-1) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$; $P(X=0) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$;

$P(X=1) = \frac{5}{36}$

$\mu_x = \frac{1}{9}\times(-1)+\frac{3}{4}\times 0+\frac{5}{36}\times 1 = -\frac{1}{9}+0+\frac{5}{36} = \frac{1}{36}$

O valor médio da variável aleatória X é $\frac{1}{36}$.

Pág. 129

83.1. $P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

$\Leftrightarrow \frac{3}{10}+a+b=1 \Leftrightarrow a+b=1-\frac{3}{10} \Leftrightarrow a+b=\frac{7}{10}$

$\Leftrightarrow a+b=0,7 \quad (1)$

$\mu_x = 1,8 \Leftrightarrow \frac{3}{10}\times 1+2a+3b=1,8$

$\Leftrightarrow 2a+3b=1,8-\frac{3}{10} \Leftrightarrow 2a+3b=1,5 \quad (2)$

De (1) e (2) vem:

$\begin{cases} a+b=0,7 \\ 2a+3b=1,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0,7-b \\ 2(0,7-b)+3b=1,5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0,7-b \\ 1,4-2b+3b=1,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0,7-b \\ b=1,5-1,4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0,7-0,1 \\ b=0,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0,6 \\ b=0,1 \end{cases}$

$a=0,6$ e $b=0,1$

83.2. $\sigma_x^2 = \frac{3}{10}\times(1-1,8)^2+0,6(2-1,8)^2+0,1(3-1,8)^2$

$= 0,192+0,024+0,144 = 0,36$

$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{0,36} = 0,6$

Pág. 130

84.1. $P(X=1000) = \frac{2}{10\ 000} = 0,0002$

Para qualquer algarismo final, existem 1000 números e um deles é o premiado.

Logo, números que ganham 5 €:

$1000-1=999$

$P(X=5) = \frac{999}{10\ 000} = 0,0999$

$P(X=0) = 1-(0,0001+0,0002+0,0999) = 0,8998$

x_i	0	5	1000	5000
$P(X=x_i)$	0,8998	0,0999	0,0002	0,0001

84.2. a) $\mu_x = 0,8998\times 0+0,0999\times 5+0,0002\times 1000+$

$+0,0001\times 5000$

$= 0,4995+0,2+0,5 = 1,1995 \approx 1,20$

O valor médio é 1,20, aproximadamente.

b) $\sigma_x^2 = 0,8998(0-1,20)^2+0,0999(5-1,20)^2+$

$+0,0002(1000-1,20)^2+0,0001(5000-1,20)^2$

$= 2701,0587$

$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{2701,0587} \approx 51,97$

O desvio-padrão é 51,97, aproximadamente.

84.3.



85.1. Como X é o ganho obtido numa aposta quando se roda a roleta duas vezes, a variável X pode tomar os valores 0, 6 e 12.

$X=0$ ocorre quando sai o zero nas duas jogadas.

$P(X=0) = \frac{4}{6}\times\frac{4}{6} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

$X=6$ ocorre quando sai o zero numa jogada e o seis noutra.

0 6 ; 6 0

MMA12DR © Porto Editora

$P(X=6)=\frac{4}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{8}{36}+\frac{8}{36}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$

$X=12$ ocorre quando sai o seis nas duas jogadas.

$P(X=12)=\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

A tabela de distribuição de probabilidade da variável aleatória X é a seguinte:

x_i	0	6	12
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

85.2. $P(X\geq 6)=P(X=6)+P(X=12)=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$

85.3. $\mu_x=\frac{4}{9}\times 0+\frac{4}{9}\times 6+\frac{1}{9}\times 12=\frac{24}{9}+\frac{12}{9}=\frac{36}{9}=4$

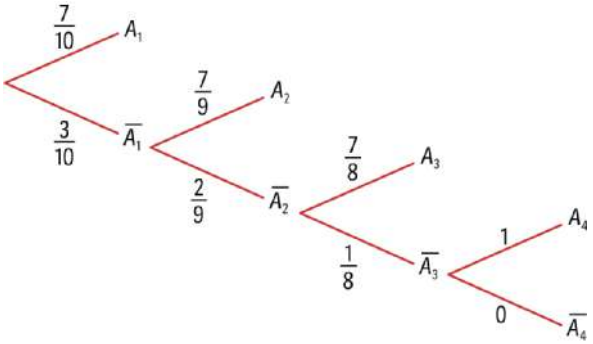
O valor médio ganho por um jogador numa aposta é 4 €. Como o custo de cada aposta é 5 €, o lucro médio obtido pelos bombeiros por aposta é 5 € – 4 € = 1 €. Como se registaram 435 apostas, o lucro estimado é $435\times 1=435$ €

Resposta: 435 €

Pág. 131

86.1. 7 bolas amarelas
2 bolas azuis
1 bola branca
Total: 10 bolas

Seja A_n o acontecimento "a bola retirada é amarela", $1\leq n\leq 4$.



$P(X=1)=\frac{7}{10}$

$P(X=2)=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{21}{90}=\frac{7}{30}$

$P(X=3)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{42}{720}=\frac{7}{120}$

$P(X=4)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}\times 1=\frac{6}{720}=\frac{1}{120}$

A tabela de distribuição de probabilidade da variável aleatória X é a seguinte:

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{120}$

86.2. $P(X\geq 3\mid X\geq 2)=\frac{P(X\geq 3)}{P(X\geq 2)}=\frac{\frac{7}{120}+\frac{1}{120}}{\frac{7}{30}+\frac{7}{120}+\frac{1}{120}}$

$=\frac{\frac{8}{120}}{\frac{3}{10}}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{15}\times\frac{10}{3}=\frac{10}{45}=\frac{2}{9}$

Pág. 132

87.1. Consideremos:
O: "Sair casa com o zero."
P: "Sair casa preta."
V: "Sair casa vermelha."

Como X é o valor obtido (lucro/prejuízo) após duas jogadas, a variável X pode tomar os valores -10, -2, 5, 6, 13 e 20.

$X=-10$ ocorre quando sai casa preta nas duas jogadas.

PP: -5 € -5 € $=-10$ €

$P(X=-10)=\frac{18}{37}\times\frac{18}{37}=\frac{324}{1369}$

$X=-2$ ocorre quando sai uma casa de cada cor.

PV: -5 € $+3$ € $=-2$ €

VP: 3 € -5 € $=-2$ €

$P(X=-2)=2\times\frac{18}{37}\times\frac{18}{37}=\frac{648}{1369}$

$X=5$ ocorre quando sai a casa com o zero e a casa preta.

OP: 10 € -5 € $=5$ €

PO: -5 € $+10$ € $=5$ €

$P(X=5)=2\times\frac{1}{37}\times\frac{18}{37}=\frac{36}{1369}$

$X=6$ ocorre quando sai casa vermelha nas duas jogadas.

VV: 3 € $+3$ € $=6$ €

$P(X=6)=\frac{18}{37}\times\frac{18}{37}=\frac{324}{1369}$

$X=13$ ocorre quando sai uma casa com o zero e uma casa vermelha.

OV: 10 € $+3$ € $=13$ €

VO: 3 € $+10$ € $=13$ €

$P(X=13)=2\times\frac{1}{37}\times\frac{18}{37}=\frac{36}{1369}$

$X=20$ ocorre quando sai a casa com o zero nas duas jogadas.

OO: 10 € $+10$ € $=20$ €

$P(X=20)=\frac{1}{37}\times\frac{1}{37}=\frac{1}{1369}$

A tabela de distribuição de probabilidade da variável aleatória X é a seguinte:

x_i	-10	-2	5	6	13	20
$P(X=x_i)$	$\frac{324}{1369}$	$\frac{648}{1369}$	$\frac{36}{1369}$	$\frac{324}{1369}$	$\frac{36}{1369}$	$\frac{1}{1369}$

MMA12DR © Porto Editora

87.2. $P(X \geq 5) = P(X=5) + P(X=6) +$

$+ P(X=13) + P(X=20) =$

$= \frac{36}{1369} + \frac{324}{1369} + \frac{36}{1369} + \frac{1}{1369} \approx 0,29 = 29\%$

87.3. $\mu_x = \frac{324}{1369} \times (-10) + \frac{648}{1369} \times (-2) + \frac{36}{1369} \times 5 +$

$+ \frac{324}{1369} \times 6 + \frac{36}{1369} \times 13 + \frac{1}{1369} \times 20 =$

$= \frac{-1924}{1369} \approx -1,41$

$\sigma_x^2 = \frac{324}{1369}(-10+1,41)^2 + \frac{648}{1369}(-2+1,41)^2 +$

$+ \frac{36}{1369}(5+1,41)^2 + \frac{324}{1369}(6+1,41)^2 +$

$+ \frac{36}{1369}(13+1,41)^2 + \frac{1}{1369}(20+1,41)^2$

$= 37,4989$

$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{37,4989} \approx 6,12$

O valor médio é, aproximadamente, $-1,41$ e o desvio-padrão é $6,12$, aproximadamente.

87.4. Como $\mu_X = -1,41 < 0$, o jogo é desfavorável ao jogador. O jogador perderá, em média, 1,41 por jogada.

88. $Z = 0$ ocorre quando não sai nenhum setor branco, quando a roleta gira duas vezes, isto é, sai duas vezes o setor azul.

Assim, $P(Z=0) = P(X=2) = \frac{1}{16}$. Opção (D)

Pág. 133

89.1. $\mu_X = \frac{2}{5} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{5} \times 2 + \frac{1}{15} \times 3$

$= \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{15} = \frac{14}{15} \approx 0,93$

$\sigma_x^2 = \frac{2}{5}(0-0,93)^2 + \frac{1}{3}(1-0,93)^2 +$

$+ \frac{1}{5}(2-0,93)^2 + \frac{1}{15}(3-0,93)^2 \approx 0,86$

$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{0,86} \approx 0,93$

O valor médio é $0,93$, aproximadamente, e o desvio-padrão é $0,93$, aproximadamente.

89.2. *Número total de filhos* = *número de famílias* $\times$ $\times$ *número médio de filhos por família* ;

Total de filhos = $30 \times \frac{14}{15} = 28$

O número total de filhos das 30 famílias é 28.

89.3. $P(X > 1 \mid X \leq 2) = \frac{P(1 < X \leq 2)}{P(X \leq 2)}$

$= \frac{P(X=2)}{P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)}$

$= \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{14}{15}} = \frac{1}{5} \times \frac{15}{14} = \frac{3}{14}$

90. 15 envelopes: 20 € ; 5 envelopes: 5 €

Como X é a soma dos valores das notas contidas nos envelopes, a variável X pode tomar os valores 10, 25 e 40.

Número de resultados possíveis: $^{20}C_2 = 190$

$X = 10$ ocorre quando são retirados dois envelopes com 5 € cada.

$P(X=10) = \frac{^5C_2}{190} = \frac{10}{190} = \frac{1}{19}$

$X = 25$ ocorre quando é retirado um envelope com 5 € e um com 20 €.

$P(X=25) = \frac{^{15}C_1 \times {}^5C_1}{190} = \frac{15 \times 5}{190} = \frac{75}{190} = \frac{15}{38}$

$X = 40$ ocorre quando são retirados dois envelopes com 20 € cada.

$P(X=40) = \frac{^{15}C_2}{190} = \frac{105}{190} = \frac{21}{38}$

A tabela de distribuição de probabilidade da variável aleatória X é a seguinte:

x_i	10	25	40
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{19}$	$\frac{15}{38}$	$\frac{21}{38}$

91.1. $\mu_X = \frac{1}{36} \times 0 + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{11}{36} \times 2 + \frac{1}{3} \times 3 + \frac{1}{6} \times 4 = \frac{22}{9}$

$\sigma_x^2 = \frac{1}{36}\left(0 - \frac{22}{9}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{22}{9}\right)^2 + \frac{11}{36}\left(2 - \frac{22}{9}\right)^2 +$

$+ \frac{1}{3}\left(3 - \frac{22}{9}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(4 - \frac{22}{9}\right)^2 = 1,08027$

$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{1,08027} \approx 1,04$

O valor médio é $\frac{22}{9}$ e o desvio-padrão $1,04$, aproximadamente.

91.2. x bolas estão numeradas com o número 2.

$X = 4$ ocorre quando são retiradas duas bolas com o número 2.

$P(X=4) = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{^xC_2}{^9C_2} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{^xC_2}{36} = \frac{1}{6}$

$\Leftrightarrow {}^xC_2 = 6 \Leftrightarrow \frac{x!}{2!(x-2)!} = 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x(x-1)\cancel{(x-2)!}}{2!\cancel{(x-2)!}} = 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-12)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 4 \ \vee \ x = -3$

Como $x > 0$, $x = 4$. Estão numeradas 4 bolas com o número 2.

MMA12DR © Porto Editora

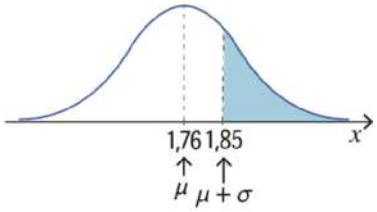
Pág. 134

92.1. $N(1{,}76;\ 0{,}09)$

$P(X > 1{,}85) = P(X > 1{,}76) - P(1{,}76 < X < 1{,}85)$

$= P(X > \mu) - P(\mu < X < \mu + \sigma)$

$\approx \frac{1}{2} - \frac{0{,}6827}{2} = 0{,}5 - 0{,}34135 = 0{,}15865$



$120 \times 0{,}15865 = 19{,}038 \approx 19$

Estima-se que cerca de 19 candidatos tenham altura superior a 1,85 metros.

92.2. $P(1{,}62 < X < 1{,}90) = 0{,}88$; $1{,}76 - 1{,}62 = 0{,}14$;

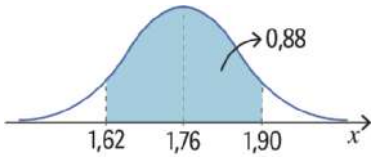
$1{,}90 - 1{,}76 = 0{,}14$

1,62 e 1,90 estão à mesma distância do valor médio e a curva normal é simétrica em relação ao valor médio.

Então, $P(1{,}62 < X < 1{,}76) = \frac{0{,}88}{2} = 0{,}44$

$P(X > 1{,}62) = P(1{,}62 < X < 1{,}76) + P(X > 1{,}76)$

$= 0{,}44 + 0{,}5 = 0{,}94$

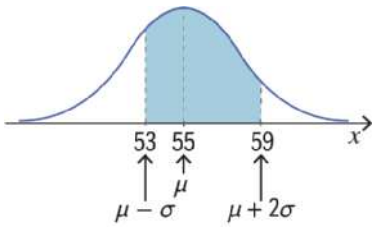


93.1. $N(55,\ 2)$

$P(53 < X < 59) = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$

$= P(\mu - \sigma < X < \mu) + P(\mu < X < \mu + 2\sigma)$

$\approx \frac{0{,}6827}{2} + \frac{0{,}9545}{2} \approx 0{,}34135 + 0{,}47725 \approx 0{,}8186$



$P(X < 53 \vee X > 59) = 1 - P(53 < X < 59)$

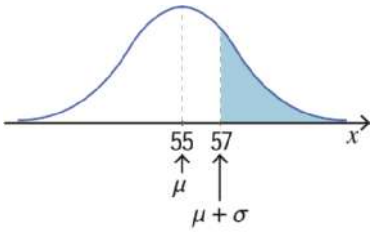
$\approx 1 - 0{,}8186 \approx 0{,}1814$

A probabilidade de que um pão produzido pela padaria Papo Seco não tenha o *peso* em conformidade com o critério de qualidade é de, aproximadamente, $0{,}1814$.

93.2. $P(X > 57) = P(X > \mu + \sigma)$

$= P(X > \mu) - P(\mu < X < \mu + \sigma) \approx \frac{1}{2} - \frac{0{,}6827}{2}$

$\approx 0{,}5 - 0{,}34135 \approx 0{,}15865$

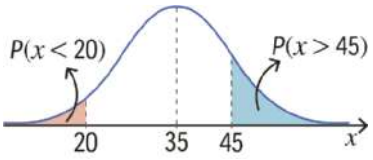


Estima-se que 16 pães tenham *peso* superior a 57 gramas.

94.1. $N(35,\ \sigma)$; $P(X < 35) = P(X < \mu) = \frac{1}{2} = 0{,}5$

A probabilidade do Rui esperar menos de 35 minutos é de 50%.

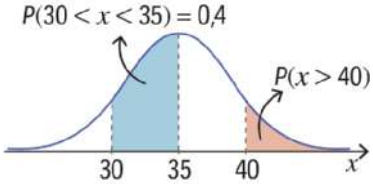
94.2. $35 - 20 = 15$; $45 - 35 = 10$



45 está a menor distância de 35 (μ) do que 20

Então, $P(X > 45) > P(X < 20)$. Logo, é mais provável o Rui ter de esperar mais de 45 minutos.

94.3. $35 - 30 = 5$; $40 - 35 = 5$



O valor médio (35) está à mesma distância de 30 e de 40, pelo que $P(35 < X < 40) = P(30 < X < 35)$.

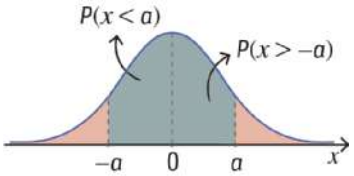
$P(X > 40) = P(X > 35) - P(35 < X < 40)$

$= 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}1 = 10\%$

A probabilidade de o Rui ter de esperar mais de 40 minutos é de 10%.

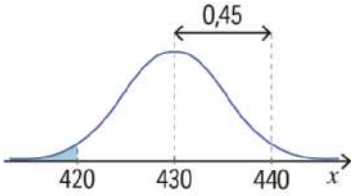
Pág. 135

95. Atendendo à simetria da curva normal em relação ao valor médio, temos que $-a$ e a se encontram à mesma distância do valor médio. Então, $P(X < a) = P(X > -a)$. Opção (C).



96. $N(430, \sigma)$; $P(430 < X < 440) = 0{,}45$

$430 - 420 = 10$; $440 - 430 = 10$



MMA12DR © Porto Editora

Então, 420 e 440 estão à mesma distância do valor médio (430).
Atendendo à simetria da curva normal em relação ao valor médio,
$P(420 < X < 430) = P(430 < X < 440)$.

Logo, $P(420 < X < 440) = 2 \times P(430 < X < 440)$

$= 2 \times 0,45 = 0,9$

$P(X < 420) = P(X < 430) - P(420 < X < 430)$

$= 0,5 - 0,45 = 0,05$

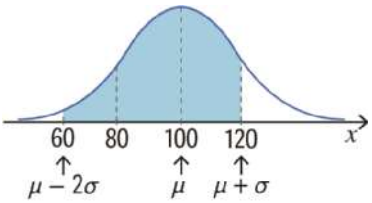
$P(X > 420) = 1 - P(X < 420) = 1 - 0,05 = 0,95$

A opção correta é a (D).

97. $N(100, 20)$;

$60 = 100 - 2 \times 20 = \mu - 2\sigma$;

$120 = 100 + 20 = \mu + \sigma$

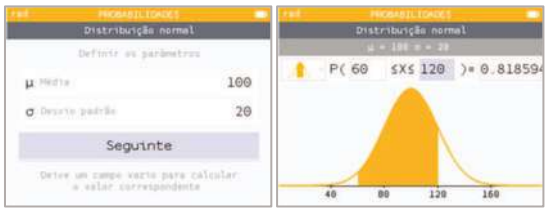


$P(60 < X < 120) = P(\mu - 2\sigma < X < \mu + \sigma)$

$= P(\mu - 2\sigma < X < \mu) + P(\mu < X < \mu + \sigma)$

$\approx \frac{0,9534}{2} + \frac{0,6827}{2} \approx 0,47725 + 0,34135 \approx 0,8186$

A probabilidade de o candidato ter de percorrer entre 60 e 120 km é de, aproximadamente, 81,86%. Na calculadora gráfica:

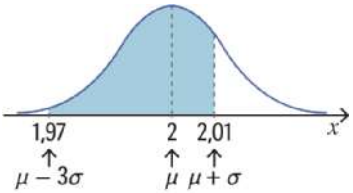


$P(60 < X < 120) \approx 81,86\%$

98.1. $X \sim N(2; 0,01)$

$1,97 = 2 - 3 \times 0,01 = \mu - 3\sigma$

$2,01 = 2 + 0,01 = \mu + \sigma$



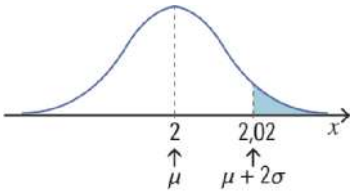
$P(1,97 < X < 2,01) = P(\mu - 3\sigma < X < \mu + \sigma)$

$= P(\mu - 3\sigma < X < \mu) + P(\mu < X < \mu + \sigma)$

$\approx \frac{0,9973}{2} + \frac{0,6827}{2} \approx 0,84$

$P(1,97 < X < 2,01) \approx 84\%$

98.2. $2,02 = 2 + 2 \times 0,01 = \mu + 2\sigma$



$P(X > 2,02) = P(X > \mu + 2\sigma)$

$= P(X > \mu) - P(2 < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,5 - \frac{0,9545}{2}$

$\approx 0,5 - 0,47725 \approx 0,02275$

Na calculadora gráfica:



$P(X > 2,02) \approx 2\%$

99. $X \sim N(150; 20)$; $130 = 150 - 20 = \mu - \sigma$

$190 = 150 + 2 \times 20 = \mu + 2\sigma$

$P(A \cap B) = P(130 < X < 190)$

$= P(\mu - \sigma < X < \mu + 2\sigma)$

$= P(\mu - \sigma < X < \mu) + P(\mu < X < \mu + 2\sigma)$

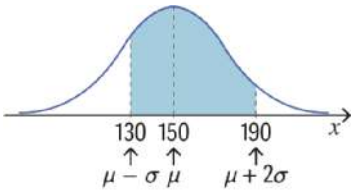
$\approx \frac{0,6827}{2} + \frac{0,9545}{2} \approx 0,34135 + 0,47725 \approx 0,8186$

$P(B) = P(X < 190) = P(X < \mu + 2\sigma)$

$= P(X < \mu) + P(\mu < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,5 + 0,47725$

$\approx 0,97725$

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,8186}{0,97725} \approx 0,938 = 83,8\%$



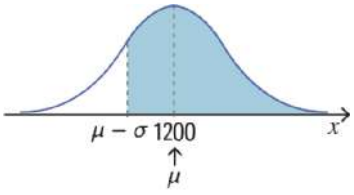
Pág. 137

100. $X \sim N(1200, \sigma)$; $P(X > 1100) = 84,135\%$

100.1. $P(X > 1200 - \sigma) = P(\mu - \sigma < X < \mu) + P(X > \mu)$

$\approx \frac{68,27\%}{1} + 50\% \approx 34,135\% + 50\% \approx 84,135\%$

Então, $1200 - \sigma = 1100 \Leftrightarrow \sigma = 100$



MMA12DR © Porto Editora

100.2. Pretende-se determinar $P(1100 < X < 1350)$.

Na calculadora gráfica:



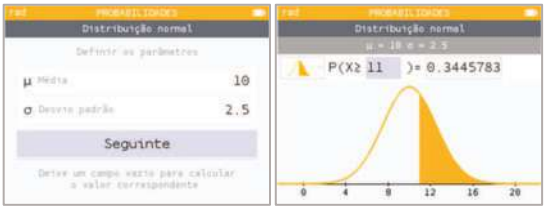
$P(1100 < X < 1350) \approx 0,7745$; $300 \times 0,7745 \approx 232$

Espera-se que 232 funcionários tenham um vencimento bruto compreendido entre 1100 € e 1350 €.

Pág. 138

101.1. $X \sim N(10;25)$.

Pretende-se determinar $P(X > 11)$.



$P(X > 11) \approx 34,5\%$

101.2. Pretende-se determinar $P(9 < X < 12)$.



$P(9 < X < 12) \approx 44,4\%$

102.1. $X \sim N(174,8)$

a) Pretende-se determinar $P(X > 180)$.



$P(X > 180) \approx 22,7\%$

b) Pretende-se determinar $P(170 < X < 188)$.



$P(170 < X < 188) \approx 65,1\%$

102.2. Na calculadora:



$P(X < 168) \approx 0,226\,63$; $300 \times 0,226\,63 \approx 68$

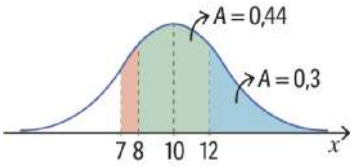
É de esperar que 68 alunos tenham altura inferior a 168 cm.

103. $X \sim N(10,\sigma)$; $P(X > 12) = 0,3$;

$P(7 < X < 12) = 0,44$

$P(10 < X < 12) = P(X > 10) - P(X > 12)$

$= 0,5 - 0,3 = 0,2$



$P(8 < X < 10) = P(10 < X < 12) = 0,2$

$P(8 < X < 12) = 2P(10 < X < 12) = 2 \times 0,2 = 0,4$

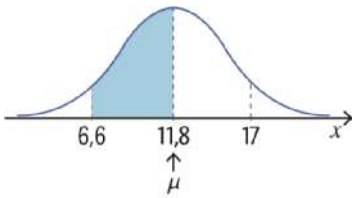
$P(7 < X < 8) = P(7 < X < 12) - P(8 < X < 12) =$

$= 0,44 - 0,4 = 0,04$; $600 \times 0,04 = 24$

É de esperar que 24 prédios tenham uma altura compreendida entre 7 e 8 metros.

104. $X \sim N(11,8;\sigma)$; $P(6,6 < X < 11,8) = 0,4$

$P(X > a) = 0,1$; $11,8 - 6,6 = 5,2$; $11,8 + 5,2 = 17$



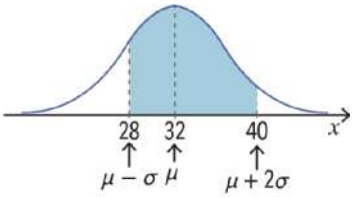
$P(11,8 < X < 17) = P(6,6 < X < 11,8) = 0,4$

$P(X > 17) = P(X > 11,8) - P(11,8 < X < 17)$

$= 0,5 - 0,4 = 0,1$. Logo, $a = 17$.

Pág. 139

105. $X \sim N(32,4)$



I. $28 = 32 - 4 = \mu - \sigma$; $40 = 32 + 2 \times 4 = \mu + 2\sigma$

$P(28 < X < 40) = P(\mu - \sigma < X < \mu + 2\sigma)$

$= P(\mu - \sigma < X < \mu) + P(\mu < X < \mu + 2\sigma)$

$\approx \frac{68,27\%}{2} + \frac{95,45\%}{2} \approx 81,86\% \approx 81,9\%$; I – c)

MMA12DR © Porto Editora

II. $P(X<\mu)=0,5$ e $\mu=32$; II – b)

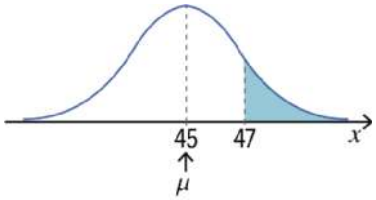
III. $P(X>40)=P(X>\mu+2\sigma)$

$=P(X<\mu)-P(\mu<X<\mu+2\sigma)\approx 50\%-\dfrac{95,45\%}{2}$

$\approx 50\%-47,725\%\approx 2,275\%\approx 2,28\%$; III – b)

I – c); II – b); III – b)

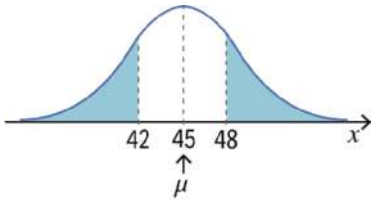
106. $X\sim N(45,\sigma)$



I. $P(X>47)<P(X>45)$;

Ou seja, $P(X>47)<0,5$. I – c)

II. $45-42=3$; $45+3=48$



42 e 48 estão à mesma distância do valor médio (45).

$P(X<42)=P(X>48)$; II – a)

III. $P(45<X<45+2\sigma)=P(\mu<X<\mu+2\sigma)$

$\approx\dfrac{0,9545}{2}\approx 0,47725$; III – b)

IV. $P(X<45-2\sigma)=0,5-P(\mu-2\sigma<X<\mu)$

$\approx 0,5-\dfrac{0,9545}{2}\approx 0,5-0,47725\approx 0,02275$;

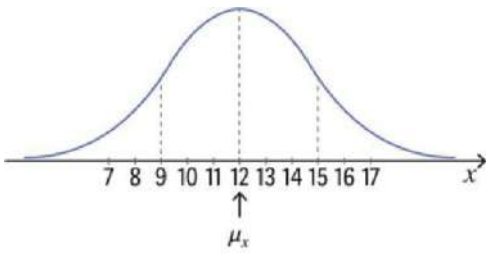
IV – b)

I – c); II – a); III – b); IV – b)

Avaliação global 1

Pág. 140

1.



$P(X>12)=0,5$

$P(9<X<12)=P(X>9)-P(X>12)=$

$=0,7-0,5=0,2$

$P(7<X<9)=$

$=P(X<12)-P(9<X<12)-P(X<7)=$

$=0,5-0,2-0,2=0,1$

$P(15<X<17)=P(7<X<9)=0,1$

Opção (D)

2.

$\overline{6}\times\overline{6}\times\overline{6}\times\overline{6}=6^4=1296$

Número de resultados possíveis: 1296

$\overset{5}{\underset{6}{\overline{2}}}\times\overline{6}\times\overline{6}\times\overset{2}{\underset{6}{\overline{3}}}=216$

Número de resultados favoráveis: 216

$P=\dfrac{216}{1296}=\dfrac{1}{6}$; Opção (A)

3. 2 bolas vermelhas; 4 bolas azuis

$P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)$

$X=0$ ocorre quando saem duas bolas vermelhas.

$P(X=0)=\dfrac{1}{{}^6C_2}=\dfrac{1}{15}$

$X=1$ ocorre quando sai uma bola vermelha e uma bola azul.

$P(X=1)=\dfrac{2\times 4}{{}^6C_2}=\dfrac{8}{15}$;

$P(X<2)=\dfrac{1}{15}+\dfrac{8}{15}=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$

Opção (D)

4. $\mu_X=2\Leftrightarrow a\times 0+0,3\times 1+2b+0,1\times 3+0,2\times 4=2$

$\Leftrightarrow 0,3+2b+0,3+0,8=2\Leftrightarrow 2b+1,4=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2b=2-1,4\Leftrightarrow 2b=0,6\Leftrightarrow b=0,3$

$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+$

$+P(X=3)+P(X=4)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a+0,3+0,3+0,1+0,2=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a+0,9=1\Leftrightarrow a=0,1$

Opção (D)

5. $P(B)=\dfrac{2}{5}$

$P(A\mid B)=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=\dfrac{1}{4}\times P(B)\Leftrightarrow P(A\cap B)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{10}$

$P(B\mid A)=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=\dfrac{1}{3}\times P(A)\Leftrightarrow\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{3}P(A)\Leftrightarrow P(A)=\dfrac{3}{10}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A\cup B)=\dfrac{3}{10}+\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow P(A\cup B)=\dfrac{3}{5}$

$P(\overline{A\cup B})=1-\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}=0,4$

Opção (B)

Pág. 141

6. Número de resultados possíveis: ${}^8C_2=28$

Número de casos favoráveis: $\underset{(1)}{12}+\underset{(2)}{12}=24$

MMA12DR © Porto Editora

(1) Número de retas que contêm as arestas do cubo.
(2) Número de retas que contêm as diagonais de cada uma das faces do cubo ($\underset{(3)}{6}\times\underset{(4)}{2}=12$).

(3) Número de faces.
(4) Número de diagonais.

$P=\frac{24}{28}=\frac{6}{7}$; Opção (A)

Outro modo: $P=1-\frac{\overset{(1)}{4}}{{}^{8}C_{2}}=\frac{6}{7}$

(1) Diagonais espaciais.
Opção (A)

7. $P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0)+$
$+P(X=1)+P(X=2)=1$

$\Leftrightarrow 0,01+0,12+k+0,36+0,09=1\Leftrightarrow k=0,42$

I – c)

$X=2$ ocorre quando sai o número 1 nos dois lançamentos. Seja n o número de faces com o número 1.

$P(X=2)=0,09\Leftrightarrow\frac{n}{20}\times\frac{n}{20}=0,09$

$\Leftrightarrow\frac{n^2}{400}=0,09\Leftrightarrow n^2=36\underset{(n>0)}{\Leftrightarrow}n=6$

II – a)

$\mu_X=0,01\times(-2)+0,12\times(-1)+$
$+0,42\times0+0,36\times1+0,09\times2=$
$=-0,02-0,12+0,36+0,18=0,4$

III – b)

$P(X<2\mid X>0)=\frac{P(X=1)}{P(X>0)}=\frac{0,36}{0,36+0,09}=0,8$

IV – b)

Resposta: I – c); II – a); III – b); IV – b).

Avaliação global 2

Pág. 142

1. $P(A)=0,6$; $P(B)=0,3$; $P(B\mid A)=\frac{1}{3}$

1.1. Pretende-se determinar $P(A\cup B)$.

$P(B\mid A)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow P(B\cap A)=\frac{1}{3}\times0,6\Leftrightarrow P(B\cap A)=0,2$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$=0,6+0,3-0,2=0,7$

A probabilidade de o aluno escolhido ser rapariga ou membro do clube de leitura é 0,7.

1.2. $P(B)=0,3$

$0,3\times30=9$ alunos que fazem parte do clube de leitura.

$P(A\cap B)=0,2$

$0,2\times30=6$ raparigas que fazem parte do clube de leitura.

$9-6=3$ rapazes do clube de leitura.

Seja C o acontecimento definido da seguinte forma:

C: "A comissão é formada por elementos do mesmo sexo."

Número de resultados possíveis: ${}^{9}C_{4}=126$

É o número de maneiras de escolher 4 dos 9 membros do clube de leitura.

Número de resultados favoráveis a C: ${}^{6}C_{4}=15$

É o número de maneiras de escolher 4 das 6 raparigas do clube de leitura. Não é possível formar uma comissão só de rapazes porque só há 3 rapazes no clube.

$P(C)=\frac{{}^{6}C_{4}}{{}^{9}C_{4}}=\frac{15}{126}=\frac{5}{42}$

O acontecimento "A comissão tem pelo menos um rapaz e pelo menos uma rapariga." é o acontecimento contrário de C.

$P(\overline{C})=1-P(C)=1-\frac{5}{42}=\frac{37}{42}\approx88,1\%$

A probabilidade de fazerem parte da comissão pelo menos um rapaz e pelo menos uma rapariga é 88,1%.

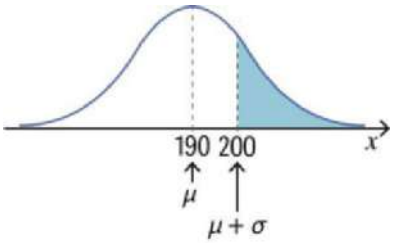
2.1. Em média, cada maçã *pesa* 190 g.

9500 kg = 9 500 000 g

9 800 000 : 190 = 50 000

Estima-se que tenham sido colhidas 50 000 maçãs.

2.2.



$200=190+10=\mu+\sigma$

$P(x>200)=P(x>\mu+\sigma)=P(x>\mu)-P(\mu<x<\mu+\sigma)$

$\approx0,5-\frac{0,6827}{2}\approx0,5-0,34135\approx0,15865$

$9500\times0,15865\approx1507$ kg

É de esperar que o agricultor disponha de cerca de 1507 kg de maçãs para satisfazer a encomenda.

3. Número de resultados possíveis: $P_7=7!=5040$

É o número de maneiras de ordenar as 7 pessoas nos 7 lugares disponíveis.

3.1. Número de resultados favoráveis:

$\underset{(1)}{2}\times\underset{(2)}{P_5}=2\times5!=2\times120=240$

(1) A Laura pode estar no início da fila e a Leonor no fim ou a Leonor no início e a Laura no fim.

MMA12DR © Porto Editora

(2) Número de maneiras de sentar ordenadamente as restantes 5 pessoas nos restantes 5 lugares.

$$P=\frac{2\times P_5}{P_7}=\frac{240}{5040}=\frac{1}{21}$$

3.2. Número de resultados favoráveis:

$$\underset{(1)}{P_2}\times\underset{(2)}{P_5}\times\underset{(3)}{6}=2!\times 5!\times 6=2\times 120\times 6=1440$$

(1) Número de maneiras de colocar a Laura e a Leonor juntas (pode ser Laura, Leonor ou Leonor, Laura)
(2) Número de maneiras de posicionar ordenadamente as restantes 5 pessoas do grupo nos restantes 5 lugares.
(3) Número de possibilidades de colocar a Laura e a Leonor juntas na fila (No início, no fim da fila ou entre duas das outras 5 pessoas) ↑ • ↑ • ↑ • ↑ • ↑ • ↑

$$P=\frac{P_2\times P_5\times 6}{P_7}=\frac{1440}{5040}=\frac{2}{7}$$

3.3. Número de resultados favoráveis:

$$\underset{(1)}{P_4}\times\underset{(2)}{{}^5A_3}=24\times 60=1440$$

(1) Número de maneiras de ordenar os 4 rapazes.
(2) Número de maneiras de colocar as 3 raparigas em 3 dos 5 lugares disponíveis (ou no início da fila, ou no fim, ou entre 2 rapazes)

↑ H ↑ H ↑ H ↑ H ↑

$$P=\frac{P_4\times {}^5A_3}{P_7}=\frac{1440}{5040}=\frac{2}{7}$$

Pág. 143

4. Sejam E e B os acontecimentos assim definidos:
E: "O cliente tem automóvel elétrico."
B: "O cliente tem tarifa bi-horária."

$$P(E)=0,32\ ;\ P(B)=0,35\ ;\ P\left(\overline{B}\mid E\right)=\frac{1}{8}$$

Vamos resolver o problema utilizando uma tabela de contingência (os dados do problema estão a cor vermelha)

	B	$\overline{B}$	Total
E	0,28	0,04	0,32
$\overline{E}$	0,07	0,61	0,68
Total	0,35	0,65	1

$$P\left(\overline{B}\mid E\right)=\frac{1}{8}\Leftrightarrow P\left(\overline{B}\cap E\right)=\frac{1}{8}P(E)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(\overline{B}\cap E\right)=\frac{1}{8}\times 0,32\Leftrightarrow P\left(\overline{B}\cap E\right)=0,04$$

$$P\left(\overline{B}\right)=1-P(B)=1-0,35=0,65$$

$$P\left(\overline{E}\right)=1-P(E)=1-0,32=0,68$$

$$P\left(\overline{E}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{B}\right)-P\left(E\cap\overline{B}\right)=0,65-0,04=0,61$$

$$P\left(E\cap B\right)=P(E)-P\left(E\cap\overline{B}\right)=0,32-0,04=0,28$$

$$P\left(\overline{E}\cap B\right)=P(B)-P\left(E\cap B\right)=0,35-0,28=0,07$$

4.1. Pretende-se determinar $P\left(\overline{E}\cap\overline{B}\right)$.

Por observação da tabela construída, tem-se que $P\left(\overline{E}\cap\overline{B}\right)=0,61$.

A probabilidade de o cliente não ter automóvel elétrico nem tarifa bi-horária é 0,61.

4.2. Pretende-se determinar $P(E\cup B)$.

$$P(E\cup B)=P(E)+P(B)-P(E\cap B)$$
$$=0,32+0,35-0,28=0,39$$

A probabilidade de o cliente ter automóvel elétrico ou tarifa bi-horária é 0,39.

4.3. Pretende-se determinar $P\left(\overline{E}\mid B\right)$.

$$P\left(\overline{E}\mid B\right)=\frac{P\left(\overline{E}\cap B\right)}{P(B)}=\frac{0,07}{0,35}=0,2$$

A probabilidade de o cliente não ter automóvel elétrico, sabendo que tem tarifa bi-horária é 0,2.

5. M e N são equiprováveis $\Leftrightarrow P(M)=P(N)$
M e N são independentes $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(M\cap N)=P(M)\times P(N)$

$$P\left(M\cup N\right)=P\left(M\right)+P\left(N\right)-P\left(M\cap N\right)=$$
$$=P\left(M\right)+P\left(M\right)-P\left(M\right)\times P\left(N\right)=$$
$$=2P\left(M\right)-P\left(M\right)\times P\left(M\right)=P\left(M\right)[2-P\left(M\right)]$$

6. Sejam B e N os acontecimentos assim definidos:
B: "A bola retirada é branca."
N: "A bola retirada tem um número primo."

$$P(B\cap N)=\frac{1}{3}\ ;\ P(N\mid B)=\frac{3}{4}$$

Como as bolas estão numeradas com 1, 2 ou 3, as únicas bolas que não têm número primo são as bolas com o número 1. Então, pretende-se determinar $P\left(B\cap\overline{N}\right)$.

$$P(N\mid B)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{P(N\cap B)}{P(B)}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}=\frac{3}{4}P(B)\Leftrightarrow P(B)=\frac{4}{9}$$

$$P(B\cap\overline{N})=P(B)-P(B\cap N)=\frac{4}{9}-\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

A probabilidade de a bola ser branca com o número 1 é $\frac{1}{9}$.

7. Número de resultados possíveis:

$${}^7A'_8=7^8=5\,764\,801$$

É o número de maneiras de pintar as 8 faces do prisma com as 7 cores disponíveis repetidas ou não.
Número de resultados favoráveis:

$$\underset{(1)}{{}^6C_2}\times\underset{(2)}{P_6}=15\times 720=10\,800$$

(1) Número de maneiras de selecionar 2 das 6 faces laterais para colorir de vermelho.
(2) Número de maneiras de selecionar ordenadamente as 6 restantes cores para colorir as restantes 6 faces.

$$P=\frac{{}^6C_2\times P_6}{{}^7A'_8}=\frac{10\,800}{5\,764\,801}\approx 0,0019=0,19\%$$

MMA12DR © Porto Editora